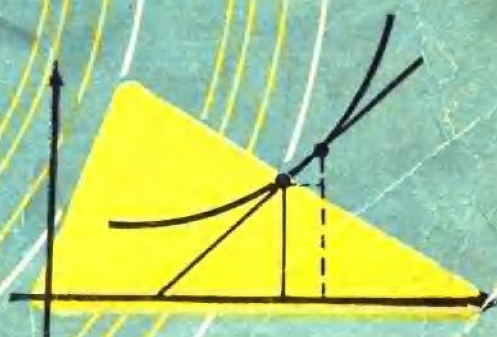


科学史话

微积分发展史

[美] C. H. 爱德华 著



北京出版社

自然科学史话
微 积 分 发 展 史

〔美〕C.H.爱德华 著

张鸿林 译

北 京 出 版 社

编辑说明

《自然科学史话》是按数学、物理、化学、生物、地学、天文等学科编写的。这套《史话》较系统地介绍上述学科的发展历史和某些科学原理或定律的渊源，以及人们对自然界由浅入深、由表及里的认识过程。编写上力求深入浅出，通俗易懂，做到科学性、知识性和思想性的统一，以便于有兴趣探索自然科学发展史的大、中学生和广大读者阅读，特别是帮助广大中学理科教师扩大知识面，更好地做好教学工作。

自然科学史话

微积分发展史

WeiJifen Fazhanshi

〔美〕C.H.爱德华 著

张鸿林 译

北京出版社出版

（北京北三环中路6号）

新华书店北京发行所发行

德外印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 15.25印张 325,000字

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数 1—3,300

ISBN 7-200-00031-0/0·2

书号：7071·1118 定价：3.45元

541/99/06

译者序

人们常说“牛顿和莱布尼茨发明微积分”，如此概括人类思维的这一伟大成果的产生，其实是太简单了。当然，十七世纪英国的牛顿和德国的莱布尼茨以其卓越的天才首先明确地认识到求积问题和作切线问题之间的互逆关系，建立了微积分基本定理，并且系统地总结出一套强有力的无穷小算法，这的确是微积分发展史上头等重大的事件。但是，微积分的一些基本问题的提出和解决，其根源可以追溯到古希腊时代，那时欧多克斯和阿基米得就曾利用穷竭法有效地计算出某些特殊几何图形的面积或体积。到了十六世纪，德国的开普勒和意大利的卡瓦列利等人又重新考察了求积问题。（十七世纪，法国的笛卡儿、费马、帕斯卡和英国的沃利斯研究了作切线的问题，而费马还进一步研究了求极值的问题。因此，牛顿说：“我所以有这样的成就，是因为我站在巨人们的肩上的缘故。”仅就微积分的发明而言，属于他所谓“巨人”之列的，至少可以举出上面提到的这些光辉的名字。）

牛顿和莱布尼茨建立微积分，在十八世纪获得了蓬勃的发展，特别是欧洲大陆的数学家，主要是伯努利家族、欧拉、拉格朗日、拉普拉斯等人，继承了莱布尼茨的传统，在微积分的广泛研究及其对力学的应用方面取得了辉煌的成就。尽管这一新学科在当时尚无可靠的逻辑基础，但是由于

它的无比威力和巨大成功，仍然为人们普遍接受：当然，同时也受到以贝克莱主教为代表的宗教势力的猛烈攻击。十九世纪的数学家柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯在微积分的严格化方面作出了重要的贡献，为这一学科奠定了牢靠的逻辑基础。二十世纪，微积分又在两个不同的方向上有了新的发展，即出现了勒贝格积分和非标准分析。

总之，正如当代数学分析权威 R. 柯朗所指出的，微积分这一学科乃是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶；这种奋斗已经历了两千五百年之久，它深深扎根于人类活动的许多领域，并且只要人们认识自身和认识自然的努力一日不止，这个过程就将继续不已。

一切科学工作者和科学史工作者，以及一切学习、研究、讲授和应用微积分的教师和学生，熟悉这一学科的历史发展，了解人类的这一巨大精神财富的积累过程和历代数学家的艰苦卓绝的奋斗精神，对于自身的工作具有重要的意义。本书正是为这些人而写的。

在已有的微积分史著作中，最有影响的一本是 C. B. 波耶 (Boyer) 的《微积分的历史及其概念的发展》(The History of the Calculus and its Conceptual Development, 1949, 1959 重印)*，其中对微积分的基本概念的历史发展作了很好的介绍，对微积分所包含的丰富的哲学思想作了深入的分析。然而，微积分作为一个数学分支，决不是一些基本概念的抽象总体，而是一种很有用的计算工具，能够用来解决大量实际问题。本书正是把它作为一门计算学科来研究

* 有中译本：卡尔·B·波耶，微积分概念史，上海人民出版社，1977。

的，即通过历史上的许多计算实例，具体说明它的基本概念和一般方法究竟是怎样形成的。因此，可以说本书是对波耶的名著的一个补充，而且写得深入浅出，更容易为一般读者所理解。

本书详细论述了从古至今微积分发展的整个过程，特别是其中的一些重大事件，当然也涉及到数学思想的演变。前两章介绍希腊数学的某些内容，这是后来微积分发展的基础。第三章叙述阿拉伯人对希腊文化遗产的吸收和传播，以及中世纪经院的繁琐设想，正是这种设想促进了关于无穷小的研究，并最终导致西欧数学的复兴。第四章至第七章叙述对数计算、无穷小面积法和切线方法，以及无穷级数法，而这几个因素相结合推动了十七世纪数学的大发展。第八章和第九章详细论述牛顿和莱布尼茨的伟大贡献。这里大量引述了牛顿和莱布尼茨的原著，将他们二人的思想、方法作了对比。这是本书的中心环节。第十章论述十八世纪微积分技巧的飞速进步（其代表作是欧拉的著述），以及由此而引起的争论。第十一章介绍十九世纪数学家对前两个世纪中提出的各种问题的回答。第十二章讨论二十世纪微积分的两大发展——勒贝格积分和非标准分析，以此来结束全书。

本书最突出的特点是包含许多习题，这些习题穿插在正文之中，同正文构成一个整体。本书作者认为：“学习数学史同学习数学本身一样，最好不要消极阅读，而要用笔来助人思考。而且，应用某一特定历史时期的数学工具来解决当时具有代表性的问题，这会使读者分享第一次发现时的乐趣，哪怕是感到遥远一点。用阿基米得或牛顿本人的方法来研究他们曾经考虑过的某些问题以洞察他们的思想，还有什么方

法比这个更好呢？”当然，作者在叙述这些习题时，力求使读者容易阅读，往往加以注释。此外还有一些没有解答的问题，以此来激发读者进一步学习的兴趣。

本书也存在一些明显的不足之处。首先，人类的社会生产实践对于任何一门科学的肇兴与发展都起着决定性的作用，但是本书并未说明微积分的发展与社会生产力、与技术和其他自然科学的发展之间的密切关系。其次，书中没有提到中国古代数学家的伟大成就。实际上，在世界数学史上，中国数学家的某些结果曾长期处于领先地位。联系本书所论述的范围，我们自然会想到那些卓越的极限思想和求积方法。例如，魏晋时数学家刘徽在《九章算术》注释（公元263年）中，提出计算圆周率的科学方法——“割圆术”。他从圆的内接正六边形算起，依次将边数加倍，算出了圆内接正12边形、24边形、48边形、96边形的边长和面积，又算出圆内接正192边形的面积，从而得到圆周率 π 的近似值 $157/50$ （ $=3.14$ ），最后又算出圆内接正3072边形的面积，从而得到 $\pi=3927/1250$ （ $=3.1416$ ）。如果设圆的半径为 r ，内接正 n 边形一边之长为 l_n ，边数加倍后 $2n$ 边形一边之长为 l_{2n} ，那么刘徽由 l_n 计算 l_{2n} 的步骤可以归纳为下列公式：

$$l_{2n} = \sqrt{\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}.$$

此外，如果设圆的面积为 S ，内接正 n 边形的面积为 S_n ， $2n$ 边形的面积为 S_{2n} ，则刘徽已经证明圆的面积 S 满足下列不等式：

$$S_{2n} < S < S_{2n} + (S_{2n} - S_n);$$

而 S_{2n} 可以由下列公式算出：

$$S_{2n} = S_n + \frac{n}{2} l_n \cdot d_n,$$

其中

$$d_n = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$$

为立于内接正 n 边形一边上的圆弓形之高。刘徽认为如此增加圆内接正多边形的边数，“割之弥细，所失弥少。割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。”这里，他把极限的概念应用于近似值的计算。刘徽的割圆术只需要计算内接多边形而不需要计算外切多边形，这与阿基米得的方法相比，可以说是事半功倍。

南北朝时的数学家祖冲之（429—500），又把刘徽的结果推进了一步。他算出圆周率 π 满足

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927,$$

以及 π 的两个分数近似值：

$$\text{约率} = \frac{22}{7}, \text{密率} = \frac{355}{113}.$$

祖冲之的纪录保持了一千年，直到十五世纪才被西方数学家所打破。

还应当提到的是祖冲之的儿子祖暅。他在计算球体的体积时，应用了这样一个公理：“两个立体，如果等高处的截面积相等，则体积相等”（幂势既同则积不容异）。过去一般认为这个公理是意大利数学家卡瓦列利（1598—1647）首先引用的，但实际上祖暅早此一千多年就曾用它来进行球体体积的计算。

中国古代数学家所取得的成就的确是惊人的，但是毕竟

未能由此而发展成为近代数学，创建微积分，这是为什么呢？还有待于中国数学史学家深入研究。如果能够对其内因（中国数学本身）和外因（中国社会状况）作出明确的、具体的、科学的分析，那么我们必将会得到许多有益的启示。本人翻译此书的目的之一，就是期望对此项工作的开展起到一点促进的作用。

在本书的翻译过程中曾得到许多同志的帮助。特别是沈永欢同志仔细地校阅全书的译稿，提出了很多宝贵的意见。本人曾向张理京先生请教，并与鲍建成、王鸣阳等同志进行过有益的讨论。在此，谨向他们表示衷心的感谢！

限于本人水平，译文中必定存在许多缺点和错误，欢迎读者批评、指正。

张鸿林

1985.2.

目 录

第一章 古代的面积、数和极限的概念.....	(1)
埃及和巴比伦的几何学.....	(1)
早期的希腊几何学.....	(6)
不可公度量和几何代数学.....	(13)
欧多克斯和几何比例.....	(17)
面积和穷竭法.....	(22)
圆锥和棱锥的体积.....	(27)
球的体积.....	(33)
第二章 阿基米得.....	(39)
引言.....	(39)
圆的度量.....	(41)
抛物线的求积.....	(48)
椭圆的面积.....	(54)
球的体积和表面积.....	(58)
括约法.....	(72)
阿基米得螺线.....	(73)
旋成体.....	(83)
发现之法.....	(91)
阿基米得和微积分.....	(100)
第三章 薄暮、黑夜、黎明.....	(102)

引言.....	(102)
希腊数学的衰落.....	(103)
黑暗时代的数学.....	(106)
阿拉伯的联系作用.....	(108)
中世纪的关于运动和变化的考察.....	(115)
中世纪的无穷级数求和.....	(122)
韦达的分析术.....	(126)
笛卡儿和费马的解析几何.....	(128)
第四章 早期的不可分量和无穷小方法.....	(132)
引言.....	(132)
J. 开普勒 (1571—1630)	(134)
卡瓦列利的不可分量.....	(139)
算术求积法.....	(147)
分数幂的积分.....	(154)
最早的曲线求长法.....	(159)
小结.....	(163)
第五章 早期的切线构造法.....	(164)
引言.....	(164)
费马的虚拟等式法.....	(164)
笛卡儿的圆法.....	(168)
胡德和斯卢斯法则.....	(171)
无穷小切线构造法.....	(177)
瞬时运动的合成.....	(180)
求积问题和切线问题之间的关系.....	(185)
第六章 耐普尔的奇妙的对数.....	(189)
J. 耐普尔 (1550—1617)	(189)

原始动机.....	(191)
耐普尔的奇妙的定义.....	(197)
算术序列和几何序列.....	(201)
常用对数的引入.....	(204)
对数和抛物线下的面积.....	(206)
牛顿的对数计算.....	(211)
关于对数的墨卡托级数.....	(215)
第七章 无穷算术	(221)
引言.....	(221)
沃利斯的插值格式和无穷乘积.....	(227)
蔓叶线的求积法.....	(236)
二项级数的发现.....	(238)
第八章 牛顿的微积分	(254)
微积分的发明.....	(254)
I. 牛顿 (1642—1727)	(256)
流数的引入.....	(257)
微积分基本定理.....	(261)
链式法则和代换积分法.....	(264)
无穷级数的应用.....	(270)
牛顿法.....	(271)
级数的反演.....	(274)
正弦级数和余弦级数的发现.....	(276)
级数法和流数法.....	(281)
代换积分法的应用.....	(283)
牛顿的积分表.....	(286)
弧长的计算.....	(293)

牛顿和莱布尼茨之间的通信.....	(299)
微积分和《数学原理》.....	(302)
牛顿关于微积分的最后的工作.....	(305)
第九章 莱布尼茨的微积分.....	(311)
G. W. 莱布尼茨 (1646—1716)	(311)
莱布尼茨思想的起源——和与差.....	(316)
特征三角形.....	(322)
变换法和圆的算术求积法.....	(331)
分析微积分的发明.....	(340)
微积分的首次发表.....	(349)
高阶微分.....	(352)
莱布尼茨的无穷小量的意义.....	(357)
莱布尼茨和牛顿.....	(359)
第十章 欧拉时代.....	(363)
L. 欧拉 (1707—1783)	(363)
函数的概念.....	(366)
欧拉的指数函数和对数函数.....	(368)
欧拉的三角函数及其展开式.....	(373)
欧拉的初等函数的微分.....	(376)
插值法和数值积分.....	(382)
泰勒级数.....	(391)
十八世纪的一些基本概念.....	(399)
第十一章 柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯对微积分的贡	
献.....	(409)
十九世纪初的函数和连续性概念.....	(409)
傅立叶和间断性.....	(413)

布尔查诺、柯西和连续性.....	(419)
柯西的微分学.....	(426)
柯西积分.....	(432)
黎曼积分及其改造.....	(440)
分析学的算术化.....	(450)
第十二章 结束语——二十世纪.....	(458)
勒贝格积分和微积分基本定理.....	(458)
非标准分析——对欧拉观点的证实?	(466)

第一章 古代的面积、数和极限的概念

埃及和巴比伦的几何学*

现在我们所说的涉及数、量和形状的一些数学概念，其历史根源可以追溯到中国、埃及、印度和美索不达米亚的富饶的大河流域古代文明的兴起。特别是，对于公元前两千年的头几个世纪生活在埃及尼罗河两岸和美索不达米亚的底格里斯河、幼发拉底河“肥沃新月形”的一些民族所具有的高度发展的文化，目前我们已经有了相当详细而可靠的了解。

希腊人的几何学发现为许多现代数学(包括微积分)的发展奠定了基础，而希腊人一般都认为几何学起源于埃及。例如，希腊历史学家希罗多德(Herodotus, 公元前五世纪)写道：尼罗河两岸的农田是按面积征税的，因此，当每年河水泛滥破坏了一部分土地后，土地所有者请求相应减少其税额时，收税官必须确定究竟损失了多少土地。显然，这就要求发明一些初等的几何测量技术。

* 关于埃及和巴比伦数学的更全面的论述，见 C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley, 1968.

现代发现的埃及纸草书^{*}，为我们提供了更直接的知识。关于埃及数学，其最重要的部分是兰德纸草书，这是公元前大约 1650 年由一位名叫阿梅斯(Ahmes)的王室书记官抄录的纸草书。阿梅斯说这些材料来自中王国的一份原件(公元前大约 2000—前1800 年)。兰德纸草书主要是由一系列问题及其答案组成的，其中大约有二十道题与田地面积及粮仓体积的计算有关。每一道题都是通过具体数字(而不是文字变量)叙述的，其解是以秘诀方式得出的，既没有说明所用的公式(如果有的话)，也没有说明方法的来源和推导。

在兰德纸草书中，理所当然地认为矩形的面积等于底乘高，三角形的面积等于底乘高的二分之一。在一道题中，上、下底分别为 4 和 6、高为 20 的等腰梯形的面积是这样计算的：取上下底之和的二分之一(于是化成一个矩形)，然后再乘以高，结果得到面积的正确值。从这个例子和一些类似的例子可以看出，埃及人的面积计算法则可能是由初等的划分法产生的，其基本思想是：把一个直线图形分割为一些三角形，然后再把它们重新排列起来，结果得到一个矩形。

习题 1-1 试利用图 1-1 所提示的划分，推导我们所熟悉的三角形面积公式 $S_{\Delta} = \frac{1}{2}bh$ 、平行四边形面积公式 $S_{\square} = bh$ 和梯形面积公式 $S_{\text{梯形}} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$ 。

^{*} 古埃及人把纸草(papyrus, 尼罗河下游的一种植物)的茎剖成薄片，压平后用作书写材料。把若干片粘成长幅，卷在木杆上，形成卷轴；这种“书籍”在埃及已发现很多，例如兰德纸草书，它是由英国收藏家 H. 兰德(Rhind)于 1858 年发现的，长 544 公分。——译者注

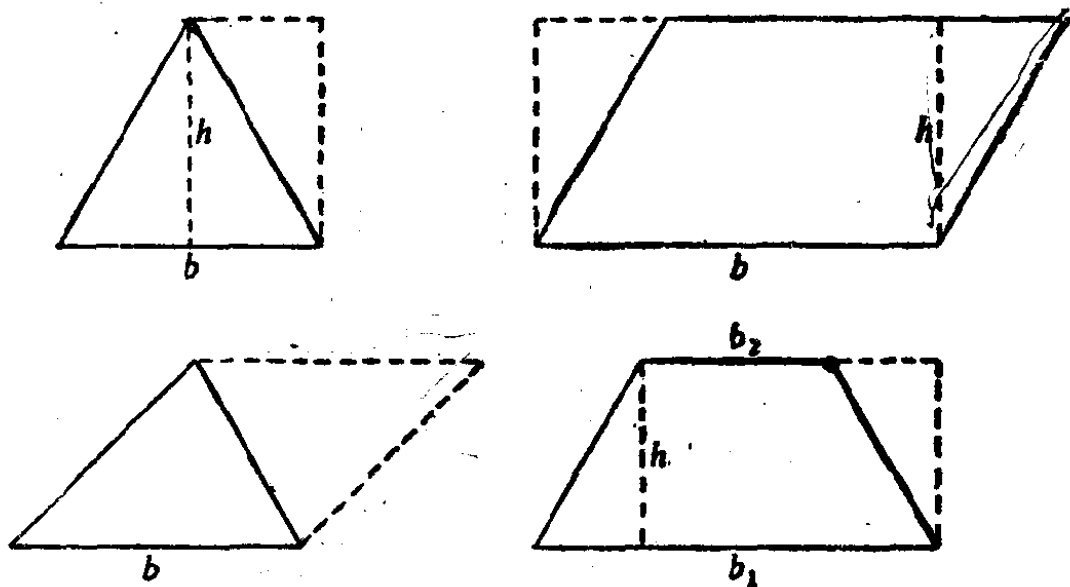


图 1-1

习题 1-2 后来的一份纸草书这样计算四边形面积：一对对边之和的二分之一乘以另一对对边之和的二分之一。试问对于不是矩形的梯形或平行四边形，这种算法能够给出正确的结果吗？

习题 1-3 (1) 在兰德纸草书的一道题中，这样计算圆的面积：取 $\frac{8}{9}$ 直径的平方。试把这种算法同面积公式 $A = \pi r^2$ 进行比较，求出埃及人的圆周率的近似值 $\pi \approx 3.16$ 。

(2) π 的这个很好的近似值可以按下述方式求出：把直径为 d 的圆的内接正方形的每个边三等分，割去四个角，如图 1-2 所示。试证明所得八边形的面积是

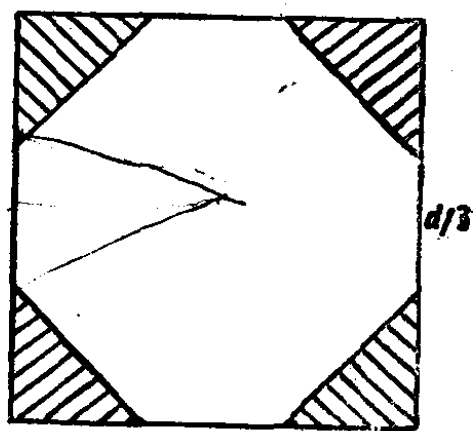


图 1-2