分支问题的数值计算方法

国家自然科学基金资助项目

朱正佑
程昌钧 著

兰州大学出版社

分支问题的数值计算方法

朱正佑　程昌钧　著

国家自然科学基金资助项目

兰 州 大 学 出 版 社

1989·兰州

目　录

第一章　非线性泛函分析基本知识

第二章　有限维分支问题的数值解

第三章　常微分方程分支解的数值计算

第四章 椭圆型方程分支解的数值方法

第一章　非线性泛函分析基本知识

设F（x，λ）是X×K→Y的光滑非线性算子，其中X，Y是Banach空间，K是有限维实的或复的参数空间。分支计算的根本任务是数值计算方程

$$F(x, \lambda) = 0 \qquad (*)$$

的全部解集合。设（x^*,λ^*）是（*）式的解。若$F_x(x^*,\lambda^*)$有有界逆，则称（x^*,λ^*）是正常解；否则就称为奇点。由于在奇点附近通常的数值方法会发生困难以及奇点附近（*）式的解集构造的复杂性，所以奇点位置的数值确定，奇点附近解支的数值计算以及有限维逼近等问题就构成了分支计算的基本内容。

本章对今后将使用的非线性泛函分析的基本知识作一简要的介绍。对该领域有一定了解的读者可直接阅读第二章。

§1.1　微　积　分

本节主要介绍Banach空间X到Banach空间Y的映射的连续性、可微性等概念。我们用L（X，Y）表示从X到Y的有界线性算子全体在算子范数下构成的Banach空间，我们假定读者已经熟悉线性泛函分析的基本内容，并且也认为读者已经了解了Banach空间中抽象函数的积分。

定义1.1：设Ω是X中的集合。F：Ω→Y。称F在x∈X连续，如果对任给∈＞0，存在δ＞0，当$\|y-x\|<\delta$，且y∈Ω时，有$\|F(x)-F(y)\|<\in$成立。若F在Ω的每一点连续，则称F在Ω上连续。如果在连续的定义中，δ和x∈Ω无关，则称F在Ω

上一致连续。

定义1.2：$\Omega\to Y$的映象F称为有界的，是指F把Ω中任一有界集映成Y中的有界集。

应该注意的是，有限维空间中的许多性质在这里并非都成立。例如有界闭集上的一致连续映射可能是无界的。但是我们可以证明如下的定理。

定理1.3：如果Ω是X中的有界凸集，F在Ω上一致连续。则F在Ω上有界。

请读者自行完成其证明。

定义1.4：设Ω在X中的开集，$F: \Omega\to Y$，$x_0\in\Omega$。如果对任意$h\in X$都存在Y中的一个元素，记为$df(x_0, h)$，使得

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t}-df(x_0, h)\right\|=0$$

则称F在x_0处是Gateaux可微的，并且把$df(x_0, h)$称为F在x_0处的Gateaux导数。

显然在有限维空间时，Gateanx导数就是方向导数。

定义1.5 设Ω是X中的开集。映射$F: \Omega\to Y$称为在$x_0\in\Omega$处是Frechet可微的，如果存在有界线性算子$Df(x_0)\in L(X, Y)$使得

$$\omega(x_0, h)=F(x_0+h)-F(x_0)-Df(x_0)h$$
$$=o(\|h\|)$$

即
$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|}=0$$

这时把算子$Df(x_0)$称为F在x_0处的导数（导算子）并记为$F'(x_0)$。

由于Banach空间中极限是唯一的，所以映射的Frechet导数和Gateaux导数是唯一的。它们两者之间有如下关系：

定理1.6：设Ω是X中的开集，$F: \Omega\to Y$。如果F在$x_0\in\Omega$处

Frechet可微，则它在x_0处Gateanx必可微，并且

$$DF(x_0)\ h = dF(x_0,\ h)\text{，对一切}h\in X$$

反之，如果F在x_0处Gateanx可微并满足如下条件：

i > 在x_0的某邻域U中，F都是Gateanx可微的

ii > 在该邻域中，F的Gateanx导数$df(x,\ h)$，作为h的函数是X到Y的有界线性算子，即$df(x,\ \cdot)\in L(X,\ Y)$

iii > $df(x,\ \cdot)$作为该邻域到$L(X,\ Y)$的映射，在U中连续。则F在x_0处是Frechet可微的，并且

$$DF\ (x_0)\ = dF\ (x_0,\ \cdot)$$

证明：Frechet可微蕴含Gateaux可微可由定义直接得出。下面证明反向命题。按假定在x_0的某邻域U中$dF(x,\ h)$是h的有界线性算子，所以我们可以把$dF(x,\ h)$写成$dF(x)\cdot h$，其中$dF(x)\in L(X,\ Y)$，并且按iii >，$dF(x)$在U中连续。于是当$h\in X$，并且$\|h\|$充分小时，有

$$\begin{aligned}\|F(x_0+h)-F(x_0)-dF(x_0)\cdot h\| &= \\ &\left\|\int_0^1\Big[dF(x_0+th)h-dF(x_0)h\Big]dt\right\| \\ &\leqslant\int_0^1\|dF(x_0+th)-dF(x_0)\|\ \|h\|\,dt \\ &= O\ (\|h\|)\end{aligned}$$

上式中的积分是抽象函数的Bochner积分。于是F在x_0处Frechet可微，并且$DF(x_0)=dF(x_0)$，证毕。

非线性映射的导数有许多类似有限维导数的性质，特别地，如下运算法则成立：

1°求导运算是线性的，即若F_1，F_2均在x处可导，α_1，α_2是常数，则$\alpha_1F_1+\alpha_2F_2$在x处可导，并且

$$D(\alpha_1F_1+\alpha_2F_2)\ (x)\ =\alpha_1DF_1(x)\ +\alpha_2DF_2(x)$$

2°若对任意$x\in X$，有$F(x)\equiv c\in Y$，则$DF(x)\ =0\in L$

(X, Y)。

3°若$F(x)=Ax$，其中$A\in L(X, Y)$，则

$$DF(x)\equiv A。$$

4°若$F: X\to Y$，$G: Y\to Z$，F在x处可导，G在$y=F(x)$处可导，则复合映射$G\circ F$在x处也可导，并且有

$$D(G\circ F)(x)=DG(y)DF(x)。$$

5°若F在某线段$L=\left\{x_0+th \mid 0\leqslant t\leqslant 1;\ x_0, h\in X\right\}$上Gateanx可微，则存在$0\leqslant\tau\leqslant 1$使得

$$\|F(x_0+h)-F(x_0)\|\leqslant\|dF(x_0+\tau h; h)\|$$

如果$dF(x, h)$在L上连续，则有

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_0^1 dF(x_0+th, h)\,dt$$

为了定义高阶导数，我们引进n线性算子的概念。令$X_n=\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n}$，其中$X$是Banach空间.乘积空间$X_n$也是一个Banach空间。记$X_n$中的元素为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$其中$x_i\in X$，该元素的范数定义为$\max\limits_i\|x_i\|$。

定义1.7. $F: X_n\to Y$称为是n线性的，如果$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$对每一个变元x_i都是线性的$(i=1, 2, \cdots, n)$。如果再进一步要求任意对换x_i和x_j的位置时，$F(x_1, \cdots x_i, \cdots x_j\cdots x_n)$的值不变，则称$F$是对称n线性算子。

应该注意到，F是$X_n\to Y$的n线性映射$(n>1)$，则F本身不是线性的，事实上对任意的$x\in X_n$,我们有

$$F(\alpha x)=\alpha^n F(x)。$$

定理1.8：设F是$X_n \to Y$的n线性映射，则下述命题等价。

i＞F在任一点$x \in X_n$都是连续的；

ii＞F在$\theta \in X_n$处连续（θ是X_n中的零元素）；

iii＞F是有界的，并存在常数K＞0，使得.

$\| F(x_1, \cdots, x_n) \| \leqslant K \| x_1 \| \| x_2 \| \cdots \| x_n \|$； (1.9)

iv＞F是Frechet可微的。

证明：显然，iv蕴含i；i蕴含ii；现证ii蕴含iii

因为F在$\theta \in X_n$处连续，所以必存在δ＞0，当$\| x \| \leqslant \delta$时，有

$$\| F(x) \| \leqslant 1。$$

注意到$x=(x_1,\cdots,x_n)$的范数的定义，于是对任意$x \in X_n$有

$$\| F(x_1,\cdots,x_n) \| = \delta^{-n} \| x_1 \| \cdots \| x_n \|$$

$$\| F(\delta \frac{x_1}{\| x_1 \|}, \cdots, \delta \frac{x_n}{\| x_n \|}) \|$$

$$\leqslant K \| x_1 \| \cdots \| x_n \|$$

其中$K=\delta^{-n}$，这表示（1.9）成立。由（1.9）知F是有界的。

现在证明iii＞蕴含iv＞，注意到

$$F(x_1+th_1,\cdots,x_n+th_n)-F(x_1,\cdots,x_n)$$
$$=t\{F(h_1,x_2,\cdots x_n)+\cdots+F(x_1,\cdots,x_{n-1},h_n)\}+t^2\{\cdots\}$$
$$+\cdots+t^n F(h_1,\cdots,h_n)$$

所以F是Gateaux可微的，并且$dF(x,h)=\sum_{i-1}^{n} F(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},h_i,x_{i+1},\cdots,x_n)$

其中$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$，显然$dF(x,h)$关于h是线性的，并且由(1.9)知 $\| dF(x,h) \| \leqslant nK \| x \|^{n-1} \| h \|$，即$dF(x,\cdot) \in L$

$(X \underset{n}{\to} Y)$。最后，不难由（1.9）得到

$$\|F(x+h)-F(x)-dF(x,h)\| =$$

$$\|\sum_{i_1<i_2}F(\cdots,h_{i_1},\cdots h_{i_2}\cdots)+\sum_{i_1<i_2<i_3}F(\cdots,h_{i_1}\cdots,h_{i_2}\cdots,h_{i_3}\cdots)$$

$$\cdots+F(h_1,\cdots,h_n)\|$$

其中$F(\cdots,h_{i_1},\cdots,h_{i_2}\cdots)$表示$F(x)$中第$i_1$和第$i_2$个x的分量改成$h_{i_1}$和$h_{i_2}$。由（1.9）及$\|h_i\|\leqslant\|h\|$知

$$\|F(x+h)-F(x)-dF(x,h)\|\leqslant K(C_n^2\|h\|^2\|x\|^{n-2}$$

$$+\cdots+C_n^{n-1}\|h\|^{n-1}\|x\|+\|h\|^n)=o(\|h\|)$$

从而F在x处是Frechet可微的，并且

$$DF(x)h=dF(x,h)=\sum_{i=1}^{n}F(x_1,\cdots,x_{i-1},h_i,x_{i+1}\cdots,x_n)$$

证毕。

设F是$X\underset{n}{\to}Y$的n线性算子，并且有界。我们把满足（1.9）的常数K的下确界定义成F的范数。则所有$X\underset{n}{\to}Y$的有界n线性算子的全体，在通常的加法和数乘规则下，按上述范数构成一个Banach空间，记为$L^n(X,Y)$。

对任一$F\in L^n(X,Y)$，在$F(x_1\cdots,x_n)$中固定$x_1,\cdots,x_k$($k<n$)，则$F(x_1,\cdots,x_k,\cdots x_n)$将是$x_{k+1},\cdots,x_n$的一个有界n－k线性算子，即$F(x_1,\cdots,x_k;\cdots)\in L^{n-k}(X,Y)$。不同的$(x_1,\cdots,x_k)\in \underset{k}{X}$将对应不同的元素$F(x_1,\cdots x_k;\cdots)$记这一对应关系为$A_F$。则$A_F$是$\underset{k}{X}$到$L^{n-k}(X,Y)$中的一个算子，不难看出它是一个有界的k线性算子，即$A_F\in L^k(X,L^{n-k}(X,Y))$，并且

$$\|F\|=\|A_F\|$$

把$F\in L^n(X,Y)$和$A_F\in L^k(X,L^{n-k}(X,Y))$之间的这种对应关系记为$T$：$L^n(X,Y)\to L^k(X,L^{n-k}(X,Y))$则容易看出$T$是一个线性算子，并且由$\|TF\|=\|A_F\|=\|F\|$知$T$是一个保范算子。然而对任一$A\in L^k(X,L^{n-k}(X,Y))$我们可以令

$$F(x_1,\cdots,x_n)=(A(x_1\cdots,x_k)(x_{k+1},\cdots,x_n)$$

显然这样的F是属于$L^n(X,Y)$，并且$TF=A$。这就表示T是$L^n(X,Y)$和$L^k(X,L^{n-k}(X,Y))$之间的一个等距同构映照，我们把$L^n(X,Y)$和$L^k(X,L^{n-k}(X,Y))$的这种等距同构称为自然的等距同构。在这种意义下，我们可以认为有

$$L^n(X,Y)=L^k(X,L^{n-k}(X,Y)) \qquad (k<n)$$

如果Ω是X中的开集，F：$\Omega\to Y$，设F在Ω的每一点都Frechet可微，则导算子$F'(x)$将是$\Omega\to L(X,Y)$的一个映射，如果$F'(x)$在$x_0\in\Omega$处是Frechet可微的，我们就称F在x_0处有二阶Frechet导数，并记$D^2F(x_0)=DF'(x_0)$或$F''(x_0)=(F')'(x_0)$显然$F''(x_0)$是$L(X,L(X,Y))$的一个元素，由$L(X,L(X,Y))=L^2(X,Y)$所以$F''(x_0)$是一个有界的2线性算子。可以证明这个有界2线性算子还是对称的，即$F''(x_0)(h_1,h_2)=F''(x_0)(h_2,h_1)$。用归纳法，我们可以定义各阶Frechet导数，并且F的n阶Frechet导数$F^{(n)}(x_0)$是一个对称的有界n线性算子，$F^{(n)}(x_0)\in L^n(X,Y)$。

对n阶连续可微的算子，有如下的展式（Taylor）

定理1.10：设Ω是X中的开集；$F^{(n)}(x)$在Ω中有意义，并且在Ω中连续；$x\in\Omega$；$x+th\in\Omega(0\leqslant t\leqslant 1)$。则

$$F(x+h)=F(x)+F'(x)h+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(x)h^{(n-1)}+Rn(x,h) \qquad (1.11)$$

其中$h^k=(\underbrace{h,\cdots,h}_{k})$，$Rn(x,h)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}F^{(n)}$

$(x+th)\ h^n dt$

此外，我们还有

$$F(x+h)=F(x)+F'(x)h+\cdots+\frac{F^{(n)}(x)}{n!}h^n+\omega_n(x,h)$$

(1.12)

其中$\omega_n(x,h)=o(\|h\|^n)$ （当$\|h\|\to o$）

证明：因为$F^{(n)}(x)$连续，所以$(1-t)^{n-1}F^{(n)}(x+th)\ h^n$是$(0,1)\to Y$的连续抽象函数，从而$Rn(x,h)$是有意义的。对任意Y上的有界线性泛函$y^*$，令$g(t)=y^*F(x+th)$。$g(t)$是$[0,1]$上定义的n次连续可微的标量函数，并且$g^{(k)}(t)=y^*F^{(k)}(x+th)h^k$ $(k\leqslant n)$。于是由$g(1)=g(0)+g'(0)+\cdots+g^{(n-1)}(0)/(n-1)+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}g^{(n)}(t)dt$ 知

$$y^*F(x+h)=y^*\left\{F(x)+F'(x)h+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(x)\right.$$

$$\left.h^{n-1}+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}F^{(n)}(x+th)h^n dt\right\}$$ 因为对任一Y上的有界线性泛函y^*，上式成立，所以（1.11）成立。

由（1.11）知

$$\|\omega_n(x,h)\|=\|Rn(x,h)-\frac{1}{n!}F^{(n)}(x)h\|$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_0^1(1-t)^{n-1}(F^{(n)}(x+th)-F^{(n)}(x))h^n dt\right\|$$

$$\leqslant\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}\|F^{(n)}(x+th)-F^{(n)}(x)\|dt\|h\|^n$$

由$F^{(n)}(x)$的连续性知$\omega_n(x,h)=o(\|h\|^n)$，证毕。

§1.2 算子方程求解和隐函数定理

众所周知，在完备的距离空间中有如下的压缩映像原理：

引理1.13：设E是完备的距离空间，$\rho(\cdot,\cdot)$是E上的距离。E→E的映射T如果满足：

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\theta\rho(x,y)\text{对一切}x,y\in E \qquad (1.14)$$

其中θ是$0<\theta<1$的常数，则在E中存在唯一元素x^*使得$x^*=Tx^*$

并且对任意的$x_0\in E$，令$x_k=Tx_{k-1}(k=1,2,\cdots)$则有

$$\rho(x_k,x^*)\leqslant\theta^k\rho(x_0,x^*) \qquad (1.15a)$$

$$\rho(x_k,x^*)\leqslant\frac{\theta}{1-\theta}\rho(x_k,x_{k-1}) \qquad (1.15b)$$

注1：满足（1.14）的映射称为压缩映射，若T是E上的压缩映射$x_n\in E$且$x_n\to x$，则$Tx_n\to Tx$，所以压缩映射总是一个连续映射。

注2：满足$x^*=Tx^*$的元素，称为T的不动点。

证明：由$x_k=T^kx_0$知

$$\rho(x_{k+1},x_k)=\rho(T^{k+1}x_0,T^kx_0)\leqslant\theta\rho(T^kx_0,T^{k-1}x_0)\leqslant\cdots\leqslant\theta^k\rho(x_1,x_0)$$

于是对任意的$m>n$，我们有

$$\rho(x_m,x_n)\leqslant\rho(x_m,x_{m-1})+\rho(x_{m-1},x_{m-2})+\cdots+\rho(x_{n+1},x_n)$$

$$\leqslant(\theta^{m-1}+\theta^{m-2}+\cdots+\theta^n)\rho(x_1,x_0)$$

$$\leqslant\frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_1,x_0)$$

所以$\{x_n\}$是E中的Cauchy序列。由E的完备性，必存在x^*，

使得$x_n \to x^*$，在$Tx_k = x_{k+1}$两边令$k \to \infty$，并利用T的连续性得$Tx^* = x^*$即x^*是T的不动点，现设$\bar{x} \in E$，使$T\bar{x} = \bar{x}$，则由

$$\rho(\bar{x}, x^*) = \rho(T\bar{x}, Tx^*) \leqslant \theta \rho(\bar{x}, x^*)$$

知，$\rho(\bar{x}, x^*) = 0$，即$\bar{x} = x^*$，唯一性证毕，最后，我们有：

$$\rho(x_k, x^*) = \rho(Tx_{k-1}, Tx^*) \leqslant \theta \rho(x_{k-1}, x^*)$$
$$\leqslant \cdots \leqslant \theta^k \rho(x_0, x^*)$$
$$\rho(x_k, x^*) = \lim \rho(x_k, x_m)$$
$$\leqslant \lim(\theta^{m-k} + \theta^{m-k-1} + \cdots + \theta)\ \rho(x_k, x_{k-1})$$
$$= \frac{\theta}{1-\theta} \rho(x_k, x_{k-1}) \qquad \text{证毕。}$$

引理1.13的证明是构造性的，由（1.15a）知从任意的$x_0 \in E$出发，只要k充分大，则x_k就和不动点x^*很接近。由（1.15b）知，只要相邻的两个x_{k-1}和x_k的距离小于$\in$，则x_k和x^*的距离就小于$\frac{\theta}{1-\theta}\in$。从计算的观点看，（1.15b）给出了$x_k$作为$x^*$的近似解的“后天估计”。

利用这个引理，我们能容易地证明解非线性算子方程的弦方法和牛顿法的收敛性，设Ω是X中的开集，$F: \Omega \to Y$，考察方程

$$F(x) = 0 \tag{1.16}$$

求解（1.16）的弦方法是指从某一$x_0 \in \Omega$出发，构造迭代序列

$$x_{k+1} = x_k - A^{-1}F(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.17}$$

其中A是X到Y的具有有界逆A^{-1}的线性连续算子。在一定条件下我们能证明（1.17）是完全有意义的，并且收敛到（1.16）的解。

求解（1.16）的牛顿法是指从某一$x_0\in\Omega$出发，构造迭代序列

$$x_{k+1}=x_k-F'(x_k)^{-1}F(x_k) \qquad (1.18)$$

在一定条件下，我们也能证明（1.18）是有意义的并收敛到（1.16）的解

关于弦方法我们有如下收敛定理

定理1.19 设F在Ω上连续可微，$\bar{x}\in\Omega$，若下列条件成立：

i）$\|F(\bar{x})\|\leqslant\eta$；

ii）存在有有界逆的线性算子$A\in L(X,Y)$，及闭球$B=\{x \mid \|x-\bar{x}\|\leqslant r\}\subset\Omega$，使得当$x\in B$时有$\|I-A^{-1}F'(x)\|<\frac{1}{2}$；

iii）$\eta\leqslant r/(2\|A^{-1}\|)$

则（1.16）在$U=\{x \mid \|x-\bar{x}\|<r\}$中存在唯一解$x_*$；$x^*$是（1.17）的极限，其中$x_0$是B中任意取定的点。

证明：令$G(x)=x-A^{-1}F(x)$。于是（1.16）的解等价于G的不动点，对任意的$x\in B$，我们有

$$\|G(x)-\bar{x}\|\leqslant\|G(x)-G(\bar{x})\|+\|G(\bar{x})-\bar{x}\|\leqslant$$

$$\sup_{x'\in B}\|G'(x')\|\,\|x-\bar{x}\|+\|A^{-1}F(\bar{x})\|<\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}r=r$$

这表明$G(B)\subset U\subset B$。另外，对任意x_1，$x_2\in B$，有

$$\|G(x_1)-G(x_2)\|\leqslant\sup_{x\in B}\|G'(x)\|\,\|x_1-x_2\|\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|$$

由引理1.13知G在B中有唯一不动点x^*，但$G(B)\subset U$，所以$x^*\in U$，证毕。

关于牛顿法我们有如下收敛定理

定理1.20：设F在开集$\Omega\subset X$上定义，在Y中取值的非线性算子。$\Omega_0=\{x|\,\|x-x_0\|\leqslant r\}\subset\Omega$，F在$\Omega_0$上二次连续可微，若下列条件满足：

i）$A=F'(x_0)$有有界逆；

ii）$\|A^{-1}F(x_0)\|\leqslant\eta$；

iii）$\|A^{-1}F''(x)\|\leqslant K$，$x\in\Omega_0$；

iv）$h=k\eta\leqslant\dfrac{1}{2}$ 并且 $r\geqslant r_0=\dfrac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta$

则（1.17）收敛到$F=0$的根x^*，并且$\|x^*-x_0\|\leqslant r$。

此外如果

当$h<\dfrac{1}{2}$时有 $r<r_1=\dfrac{1+\sqrt{1-2h}}{h}\eta$

或者当$h=\dfrac{1}{2}$时有 $r\leqslant r_1$

则在Ω_0中$F=0$的解是唯一的。

定理的证明可参看[1，第18章]，在[1]中还叙述了牛顿迭代法收敛的一些其他条件。应该指出在$F'(x^*)$有有界逆的情况下，牛顿法如果收敛则收敛速度将是二阶的，即$\|x_{k+1}-x^*\|=O(\|x_k-x^*\|^2)$。此外，当$F'(x^*)$不存在有界逆时，在一定情况下，牛顿法仍可能收敛，有关这方面的结果，可参看[2—4]。

下面我们来讨论Banach空间中算子的隐函数定理。

定理1.21（局部隐函数定理）设X，Y，Z是Banach空间，Ω_1，Ω_2分别是X和Y中的开集。F：$\Omega_1\times\Omega_2\to Z$是连续可微的；$F(x_0,y_0)=0$，其中$(x_0,y_0)\in\Omega_1\times\Omega_2$。如果$D_xF(x_0,y_0)=A$有有界逆$A^{-1}\in L(Z,X)$，则存在$(x_0,y_0)$的一个邻域$U\times V\subset\Omega_1\times\Omega_2$使得对任一$y\in V$，$F(x,y)=0$在U中存在唯一解$f(y)$。此外$f(y)$是$V\to U$的连续可微函数。

证明：由$I-A^{-1}D_xF(x_0,y_0)=0$，及$I-A^{-1}D_xF(x,y)$

的连续性知，存在$B=\{x\in X \mid \|x-x_0\|\leqslant r\}\subset\Omega_1$，$V=\{y\in Y \mid \|y-y_0\|<\delta\}\subset\Omega_2$，当$(x,y)\in B\times V$时有$\|I-A^{-1}D_xF(x,y)\|<\frac{1}{2}$。另外由$F(x_0,y_0)=0$，及$F(x_0,y)$的连续性，可认为当$y\in V$时（必要时可缩小$\delta$的值），有$\|F(x_0,y)\|\leqslant r/(2\|A^{-1}\|)$。令$U=\{x\in X \mid \|x-x_0\|<r\}$。则对任意$y\in V$，$F(x,y)=0$作为$x$的算子方程来讲，定理1.19的条件满足。因而$F(x,y)=0$在$U$中存在唯一解$f(y)$。

注意到当$(x,y)\in U\times V$时有$\|I-A^{-1}D_xF(x,y)\|<\frac{1}{2}$，由著名的Banach定理知$D_xF(x,y)$有有界逆，并且$D_xF(x,y)$的连续性蕴含$[D_xF(x,y)]^{-1}$的连续性。这表明对每一个点（$f(y)$，$y$），$y\in V$，局部隐函数定理的条件成立。为证$f(y)$在$V$上的连续可微性，只要证明在$y=y_0$处$f(y)$是连续的，并且$f'(y_0)=-[D_xF(x_0,y_0)]^{-1}D_yF(x_0,y_0)$就足够了。先证$f(y)$在$y_0$处连续。令$G(x,y)=x-A^{-1}F(x,y)$，于是对任意$y\in V$，有$G(x,y)=x$，其中$x=f(y)$。从而我们有

$$
\begin{aligned}
\|f(y)-f(y_0)\| &= \|x-x_0\| = \|G(x,y)-G(x_0,y_0)\| \\
&\leqslant \|G(x,y)-G(x_0,y)\| + \|G(x_0,y)-G(x_0,y_0)\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|x-x_0\| + \|G(x_0,y)-G(x_0,y_0)\|
\end{aligned}
$$

这样，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|f(y)-f(y_0)\| &\leqslant 2\|G(x_0,y)-G(x_0,y_0)\| \\
&= 2\|A^{-1}(F(x_0,y)-F(x_0y_0))\| \\
&\leqslant 2\|A^{-1}\|\,\|F(x_0,y)-F(x_0,y_0)\| \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

由F的连续性，根据上式立刻可知$f(y)$在y_0处是连续的。此外因为$F_y(x,y)$是连续的，所以当x属某x_0为心r_1为半径的球U_1和y属以y_0为心，r_2为半径的球V_1时，$\|F_y(x,y)\|\leqslant K$，于是