状态变量分析导论

P. F. 布莱克曼 著

科学出版社

状态变量分析导论

P.F. 布莱克曼 著

华南工学院自动控制教研组 译

科学出版社

1982

内 容 简 介

本书是状态变量分析法的导论．书中从几何学和 s 平面的观点对状态变量分析法作了直观的解释，使基本概念形象化．全书共七章，分别阐述了状态变量分析法的基本原理、特征值、特征向量和轨迹、传递函数、状态变量反馈、能控性和能观测性、离散系统等有关内容．每章均附有习题及答案．附录介绍有关的基础知识．

本书可供科技人员和高等学校师生学习状态变量分析法时参考．

P. F. Blackman

INTRODUCTION TO STATE-VARIABLE ANALYSIS

Macmillan Press L. T. D., 1977

状态变量分析导论

P. F. 布莱克曼 著

华南工学院自动控制教研组 译

责任编辑 李淑兰

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1982年 3 月第一次印刷 印张：8 7/8

印数：0001—4,850 字数：231,000

统一书号：15031·390

本社书号：2513·15—8

定价：1.65 元

译 者 的 话

六十年代发展起来的现代控制理论是以状态变量分析法为基础的．英国学者 P．F．布莱克曼所著《状态变量分析导论》是一本较好的入门教材．这本书详细地介绍了状态变量分析法的基本内容．本书的特点是着重通过几何图形和联系 s 平面的概念来阐述基本原理，这对于熟悉经典控制理论的读者来说是比较容易接受的．原书中有不少印刷错误，译文已作了订正．但由于译者水平有限，译文中难免有错误和欠妥之处，欢迎读者批评指正．

华南工学院自动控制教研组许多同志参加过这本书的翻译工作，最后由周其节、李伯天两位同志整理定稿．

华南工学院冯秉铨教授生前对本书的翻译工作十分关怀，并在百忙中认真地审阅了译稿，提出很多宝贵的意见．不幸本书尚未出版，冯秉铨教授已与世长辞．冯秉铨教授的逝世是我国科技界的重大损失．译者痛失良师，在此对冯秉铨教授表示深切的悼念．

译 者

前　　言

许多教科书起源于课程的讲义. 这本书本来是为电气工程系和计算与控制系学习控制的学生所开设课程的讲义. 最初讲义包括复频分析、s 平面技术和根轨迹方法,在后来的若干年内逐渐发展成为以这些技术为起点来介绍状态变量分析法. 另一个背景是实验室技术的进展，能够使用简单的模拟计算机来阐明状态变量的许多基本原理. 所显示的计算结果很自然地引出了几何上的解释.这两个主要的背景因素就产生了状态变量分析的一种方法,它具有很强的几何的和图解的特色，同时采用了 s 平面的概念来解释状态变量现象. 本书的主要意图是采用这种方法对所涉及的概念建立一种感性知识,然后将基本概念的基础材料加以发展,而不着眼于包容更多的高深题目——它们已在许多课本中作了充分的论述.

虽然本书是按控制系统的线索来编写的，但许多基础材料的处理——一般概念(第一章)、特征值、特征向量与轨迹(第二章)、传递函数(第三章的开头部分)——并不仅仅与控制概念有关. 在第三章末尾讲述单输入单输出控制系统的状态变量表述法，则是因为据作者的初步体验，把这类系统的传递函数形式和状态变量形式相互联系起来是不容易的. 状态变量反馈与通常的校正技术及品质特性之间的关系在第四章中讲述. 第五章的开头部分论述能控性和能观测性,其中特别强调了对这些概念的评价,以及从几何学和 s 平面的观点所作的解释. 这一章的后面部分介绍了观测器原理. 最后两章(第六和第七章)论述了离散时间系统以及最小时间响应系统和无波动系统的设计. 在设计中同时采用了状态变量法和 z 平面技术,并对两种方法进行了比较.

写作本书时假定读者具有初步的控制理论和拉普拉斯变换的

知识，并且熟悉矩阵代数．至于拉普拉斯变换的某些特殊知识，诸如用脉冲信号和 s 平面上的零点表示初始条件，留数的图解法计算等则列入附录1．附录2讲述矩阵的秩．附录3简述 z 变换，作为第六章的补充．

总之，本书采用比较直观的方法而不拘泥于纯数学的方法来叙述初步的原理．不管是哪一方面的问题，总的指导思想可归结为下面三句话：

它具有什么样子的方块图？

它能用几何语言解释吗？

如果我能使它形象化，我就能够理解它．事实上，上述三句话体现了本书的典型形式．

我深深地感谢电气工程系和计算与控制系的同事们，尤其是电气工程系的 J. M. 豪尔先生和计算与控制系的 H. H. 约翰逊先生，感谢他们很有益的建议．最后，玛格达·比克内尔夫人孜孜不倦并一丝不苟地打印了本书手稿，在此一并致谢．

P. F. 布莱克曼

目　　录

第一章　状态变量分析原理

一般用微分方程来描述物理系统或抽象系统，而常常用某一单个变量——例如力学系统中的位置——对于初始条件或输入信号的响应来研究任意一个系统的行为. 虽然单个变量的响应可能是我们直接感兴趣的唯一结果，但是系统中还有其他的变量；例如位置的改变意味着系统中有速度和加速度变量. 同样，电气系统中某一点电压的变化可能意味着系统中其他点电压的变化. 如果这些其他的变量是独立的，例如在图 1.2 (a) 的系统中，对于某个位移 y，速度 $\frac{dy}{dt}$ 可以具有任何数值而与位移的数值无关；则完整地描述这个系统的**状态**既需要知道 y 又需要知道 $\frac{dy}{dt}$. 一般说来，要完整地描述任意一个系统都需要知道其全部独立变量.

在状态变量分析中，将系统的所有状态都作为响应，这就可能更充分地了解系统的行为和特性. 然而，这种分析方法需要联立求解为数众多的一阶微分方程；这通常用矩阵代数来运算，把系统的状态看成是一个向量，而系统的各个独立变量便是这个向量的各个分量. 这就导致了用一个向量微分方程来描述一个系统. 本章介绍系统方程的矩阵表示法和向量微分方程的求解法. 由于把系统的状态看成是一个向量，我们便能够在一空间中用几何术语

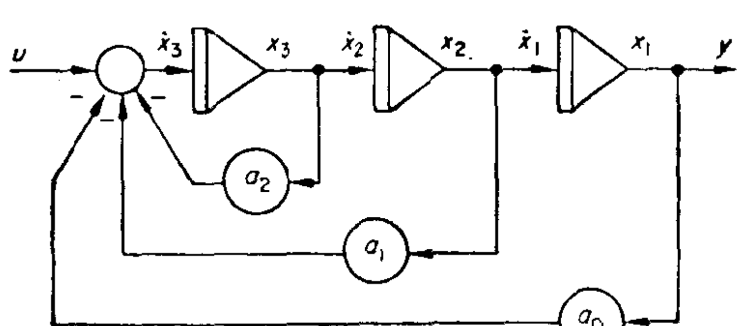

图 1.1　三阶微分方程的示意图

来解释很多状态变量分析的问题（参阅 1.2 节末）. 因此人们常常使用**状态空间**分析这个词.

1.1 微分方程的矩阵表示法

对许多问题的研究往往得出一个关于输入 u 与输出 y 的线性常系数微分方程，在三阶情况下，其一般形式为

$$\frac{d^3y}{dt^3}+a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=u \tag{1.1}$$

并可画出示意图如图 1.1 所示. 各积分器的输出分别为

$$x_1=y,\ x_2=\dot{y},\ x_3=\ddot{y}$$

这些导数不一定代表该系统中实际存在的变量. 各积分器的输入分别为 $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, 并可写出一阶方程组:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=x_3\\ \dot{x}_3&=-a_0x_1-a_1x_2-a_2x_3+u\end{aligned} \tag{1.2}$$

写成矩阵形式就是

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\ 0&0&1\\ -a_0&-a_1&-a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \tag{1.3}$$

主对角线的上方数值为 1 的元素表示了积分器的直接串联联接，而所有的反馈系数都出现在第 3 行. 式(1.3)的一般形式体现了形如式（1.1）且对应方块图如图 1.1 这样一类方程的特征. 在本例中，式（1.2）中头两个方程的表达式是最简单的，更为一般的情况是在方程的右边还有其他项，表示积分器还有其他输入信号.

作为一个简单的例子，图 1.2 (a) 的弹簧-质量-阻尼器系统的方程为

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+F\frac{dy}{dt}+Ky=Ku \tag{1.4}$$

并可以画出方块图，如图 1.2 (b) 所示. 对应的矩阵关系为

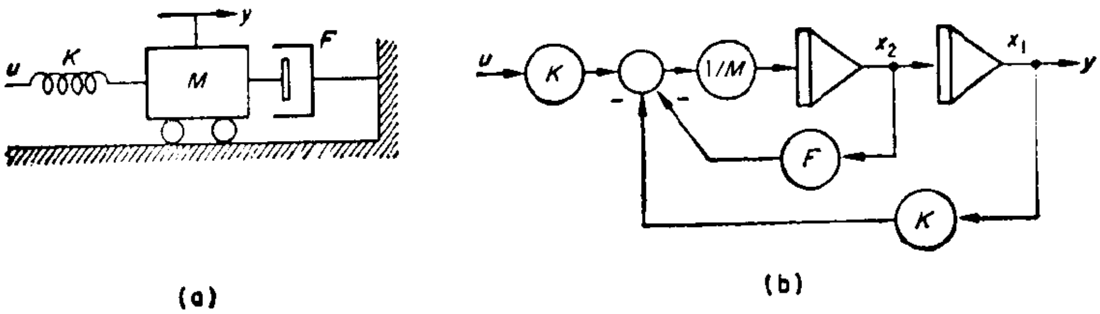

图 1.2 力学系统和方程的示意图

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -F/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K/M \end{bmatrix} u \tag{1.5}$$

对于图 1.3 (a) 的 RC 电路，可写出两个节点方程式

$$\begin{aligned} \frac{v_1 - v_2}{R_3} + \frac{v_1 - u_1}{R_1} + C_1 \frac{dv_1}{dt} = 0 \\ \frac{v_2 - v_1}{R_3} + \frac{v_2 - u_2}{R_2} + C_2 \frac{dv_2}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

并可画出方块图，如图 1.3 (b) 所示，于是求得矩阵表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) & \frac{1}{C_1 R_3} \\ \frac{1}{C_2 R_3} & -\frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

这里积分器之间的联系不再是简单的直接相连的通道了.

如前所述，积分器的输出所代表的变量不一定可解释为系统中直接存在的某些量. 图 1.2 中各状态变量直接与系统变量有关，也就是位移 (x_1) 和速度 (x_2). 而图 1.3 (a) 中的节点电压也直接出现在图 1.3 (b) 中. 然而，如果仅仅需要了解 RC 电路中 u_2 和 v_1 的关系，则可以从式 (1.6) 中消去 v_2，变成一个方程式

$$a_2 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + a_1 \frac{dv_1}{dt} + a_0 v_1 = b_0 u_2 \tag{1.8}$$

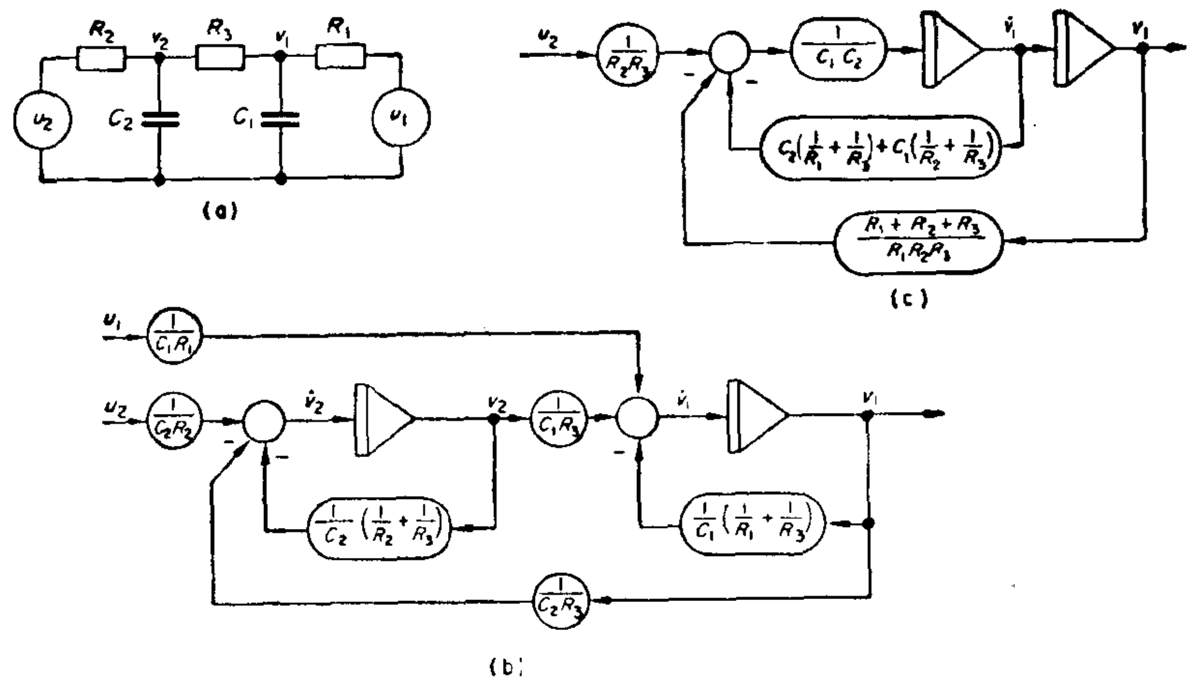

图 1.3 (a) *RC* 电路； (b) 微分方程的示意图； (c) u_2 和 v_1 之间的输入输出关系修改后的示意图

它具有图 1.3(c) 那样的方块图，其积分器简单地直接相连；两个变量现在是 v_1 和 $\dot{v}_1$，而 $\dot{v}_1$ 并不是在电路中能直接测量的变量.

1.2 状态向量微分方程

任何系统如能用一组一阶微分方程描述，我们就可以用向量形式把这些方程式表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{1.9}$$

这里各个变量（积分器的输出）是状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量，而状态向量给出了系统状况或状态的全部信息，因此

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

分别是状态向量、状态向量的导数和输入向量，而

$\boldsymbol{A}$是系统矩阵，表示系统的内在联系.

$\boldsymbol{B}$是输入矩阵，表示输入信号在系统内的分布.

在积分器直接串联时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有式(1.3)那样的特殊形式，这时矩阵 A 叫做**同伴**形矩阵. x_1 及其各次导数叫做**相**变量.

对于单输入 $\boldsymbol{u}$ 的情况，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 退化为一个向量 $\boldsymbol{b}$，这时状态方程式是

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \tag{1.10}$$

观测到的输出量 y 可能是单个状态变量，如图 1.1 和图 1.2 所示，也可能是若干个状态变量的组合，并且可能含有直接从输入信号来的分量，即

$$y = [c_1 \cdots c_n]\boldsymbol{x} + du = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + du \tag{1.11a}$$

另外，输出量也可能是多变量的并且又含有输入信号的分量，这时可把输出量写成

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{1.11b}$$

因此，我们把一般的多变量系统表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{1.12a}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \tag{1.12b}$$

而把单输入单输出系统表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \tag{1.13a}$$

$$y = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + du \tag{1.13b}$$

一般关系式(1.12)和(1.13)可以用如图 1.4(a)和 1.4(b)所示的方块图来表示，图中双线表示多变量信号通道，复式积分器包括每个状态变量各自的积分器 $I_1, \cdots, I_n$. 一般的二阶系统（这里略去了 $\boldsymbol{D}$）的方程式是

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{1.14a}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1.14b}$$

在图 1.4(c)中已把它表示出来. 图中每个积分器都有一个自反馈项，对应于在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 主对角线上的一个元素. 一般来说，每个积分器的输出端通过矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的一个元素接到其他积分器的输入端. 由状态变量的组合构成输出量这种做法——在列写式

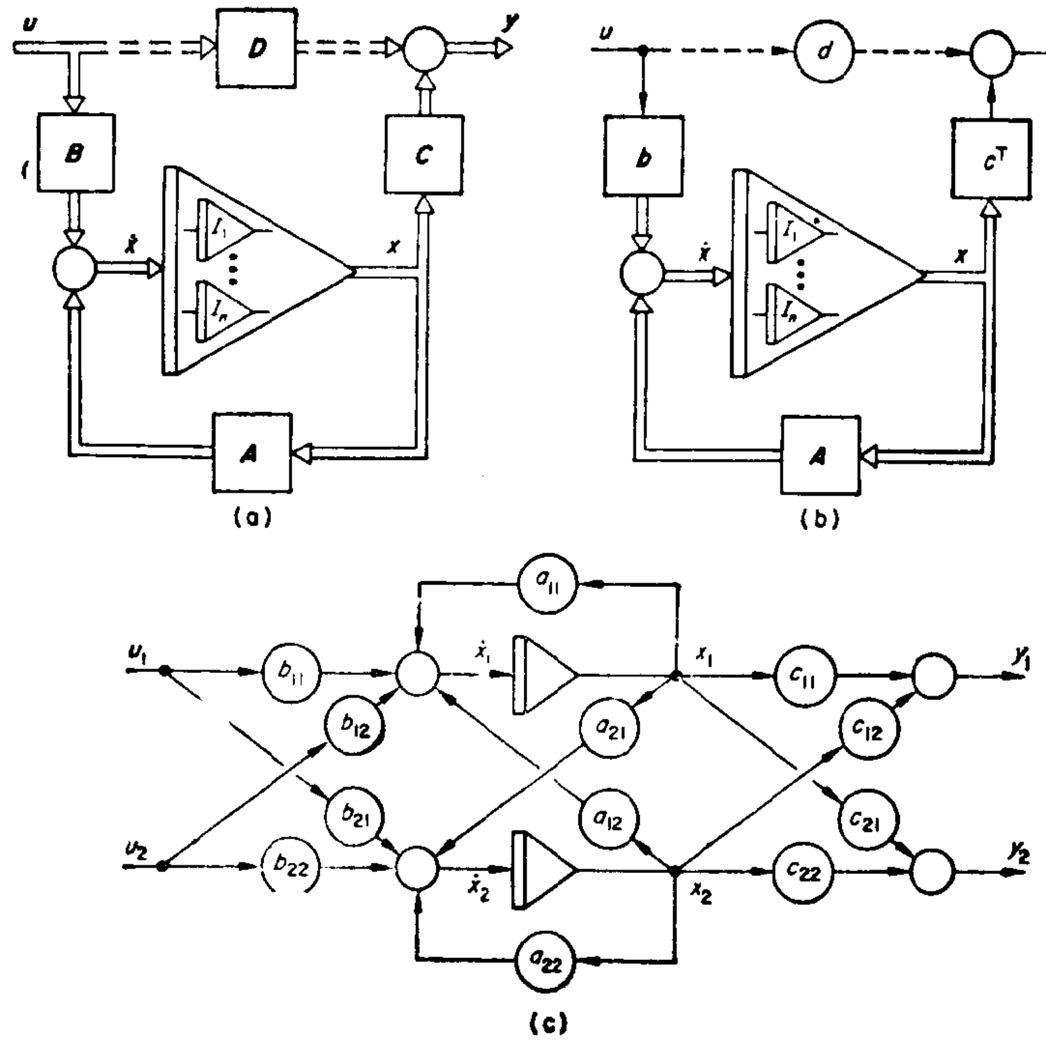

图 1.4 向量微分方程：(a) 多输入多输出；(b) 单输入单输出；(c) 从输入到输出没有直接通道的一般二阶系统

(1.11) 时曾提及——能够用来求得某个状态变量，而这个状态变量在特定的分析中是不能直接得到的．就图 1.5(a) 的系统而言，状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.5 & 1\\ 0.25 & -1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \tag{1.15}$$

而如果仅仅需要得到 x_1 和 u 之间的关系，则可以从式 (1.15) 中消去 x_2，得

$$\ddot{x}_1+3\dot{x}_1+2x_1=u \tag{1.16}$$

式中 x_1 和 $\dot{x}_1$ 是相应系统的状态变量 (图 1.5 b).

假使现在必须从图 1.5 (b) 得到原来的状态变量 x_2. 式 (1.15) 的第一行是

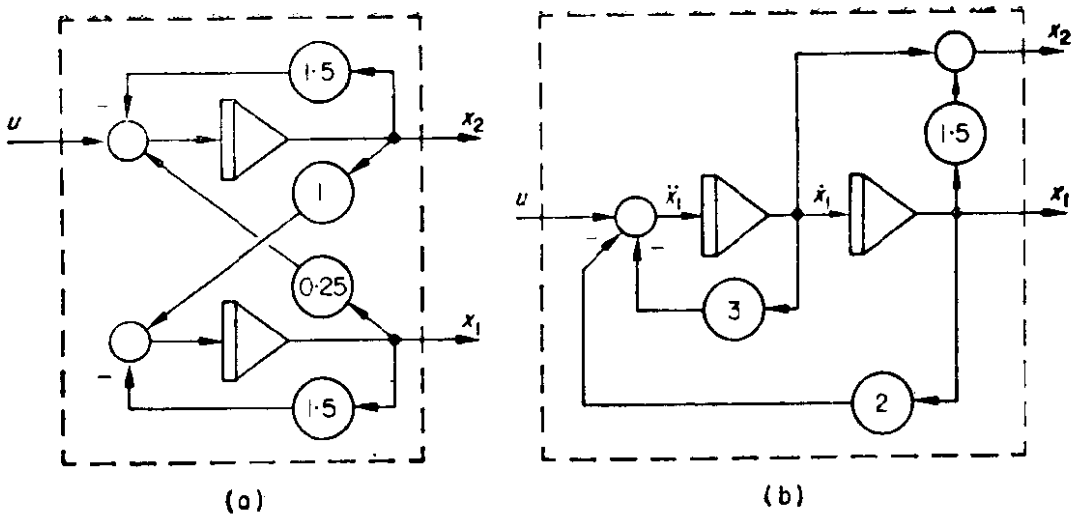

图 1.5 同一个系统的两种表示法

$$\dot{x}_1 = -1.5x_1 + x_2 \tag{1.17a}$$

由此得

$$x_2 = \dot{x}_1 + 1.5x_1 \tag{1.17b}$$

于是 x_2 可以如图 1.5 (b) 所示那样重现. 实际上，尽管图 1.5 (a) 和 1.5 (b) 虚线框内的系统结构不同，但是两者的 u 和 x_1, x_2 间的关系却是相同的. 这就说明了状态变量分析中的一个重要概念：分析一个系统时，先分析一个与之关联的系统，然后再把这个关联系统的输出量进行转换，这样可能会容易些.

几 何 解 释

在 1.2 节的分析中，状态向量的分量 $x_1, \cdots, x_n$ 可看成是状态向量在一组坐标轴上的投影. 对于二维和三维系统来说，这是很直观的. 对于图 1.2 和图 1.3 的系统，状态向量仅仅是二维的，其分量是速度和位置，或者两个节点的电压. 如果系统在 $t = 0$ 时刻有一初始状态 $\boldsymbol{x}(0) \neq \boldsymbol{0}$，则由于系统的动力学性质，在没有任何输入 $\boldsymbol{u}$ 的情况下，系统状态 $\boldsymbol{x}$ 一般也要发生变化. 例如图 1.2，假设系统有一个初速度，则位置必将随着时间而变化，状态向量将描绘出一条轨迹，类似于通常的相平面分析法得到的结果. 在任意瞬间，变化的方向由下式给出：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

这就确定了经过某个状态点的自由运动轨迹的方向；参看图 1.6(a)．如果有单个输入，则

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$$

附加的分量 $\boldsymbol{b}u$ 使得系统状态偏离其自由运动轨迹，参看图 1.6(b)．

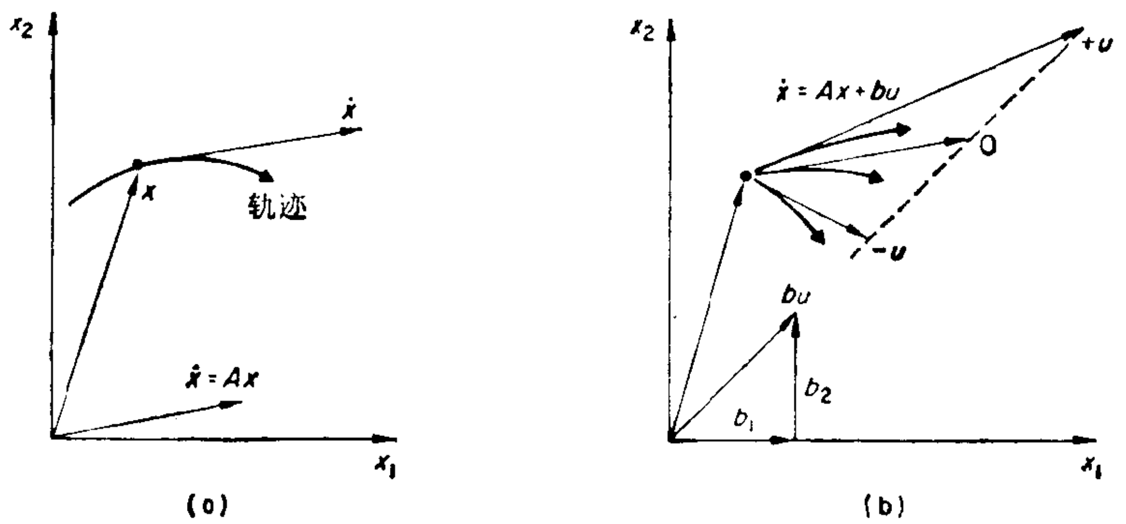

图 1.6 系统轨迹：(a) 自由运动轨迹；(b) 有输入信号时的轨迹

对于单个输入，$\boldsymbol{b}u$ 的方向由系数 b_1 和 b_2 确定，向量 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 的端点必定在图 1.6b 中的虚线上．然而，如果有二维的输入，它确定一个输入分量 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，则从原理上讲，适当选择 u_1 和 u_2，可以使 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 处于任何方向，并且只要使 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$，则状态可以静止不变，即

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad 或 \quad \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{1.18}$$

作为一个例子，研究图 1.3(a) 的系统，它有两个输入，因此适当选择 u_1 和 u_2，可以使系统保持在任何状态．令 $R_1 = 1$，$R_2 = 4$，$R_3 = 2$，这时状态方程为

$$\begin{bmatrix} C_1\dot{v}_1 \\ C_2\dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

如果必须使系统保持在状态

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

则 $\boldsymbol{u}$ 的相应数值应为

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

给出

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2.5\\-1\end{bmatrix} \tag{1.22}$$

若施加这样大小的 $\boldsymbol{u}$，采用式(1.19)中的电阻数值，则可以很容易地算出对应的电压 v_1 和 v_2，这就是式(1.20)所表示的数值；此时电容器既不充电也不放电，电路状态保持不变.

1.3 状态向量微分方程的变换

为了获得向量微分方程在 s 域的表达式，有必要扼要地讲一下一阶微分方程的变换，因为两者是很相似的.

一 阶 方 程

一阶微分方程式

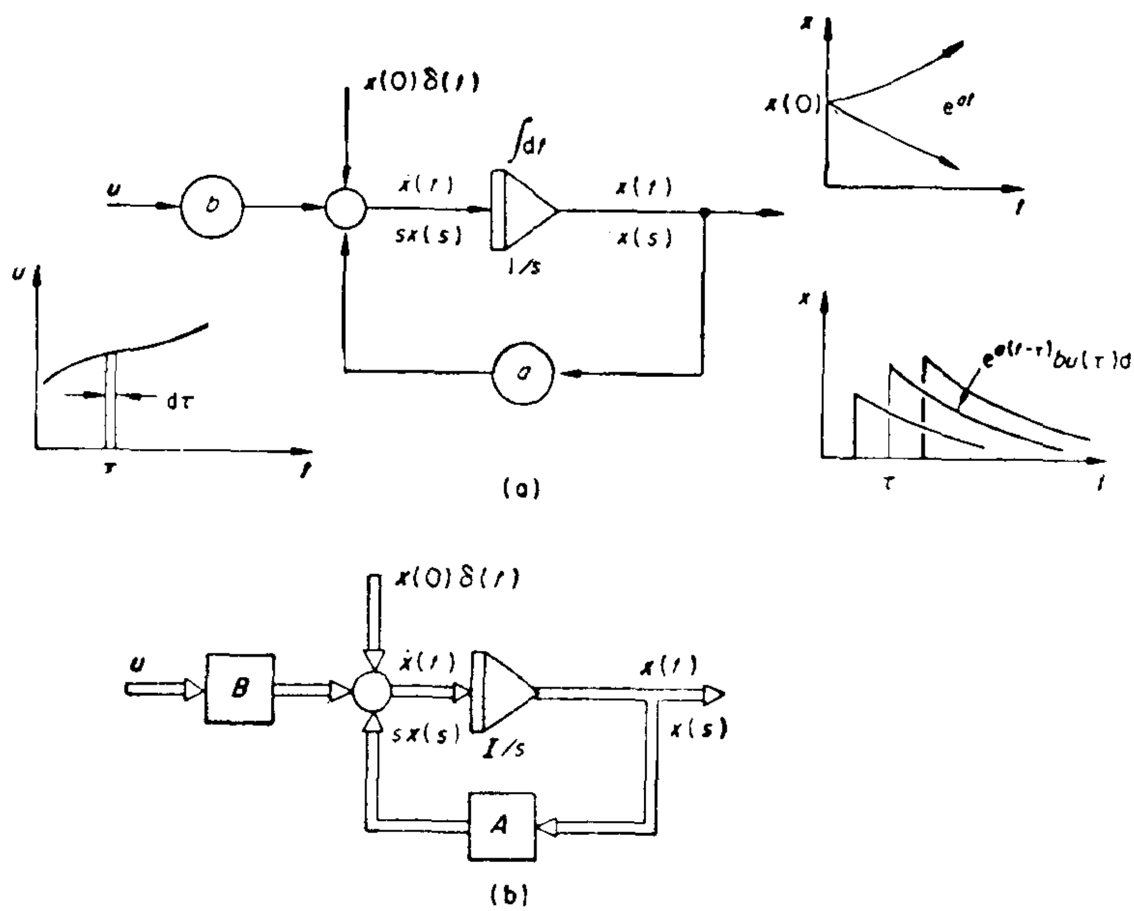

图 1.7　微分方程：(a) 一阶方程；(b) 向量方程