高等学校试用教材

运筹学教程

卢向华　侯定丕　魏权龄　编著

高等教育出版社

高等学校试用教材

运筹学教程

卢向华　侯定丕　魏权龄　编著

高等教育出版社

（京）112 号

本书是根据全国运筹学会教育委员会拟订的"全国管理、系统工程及财经专业本科生、研究生适用的运筹学教学大纲"编写的．全书共十章，每章配有习题．总学时为 110—140 学时，必学部分 为110 学时，打 * 部分为选学内容．

高等学校试用教材
运筹学教程
卢向华　侯定丕　魏权龄　编著
*
高等教育出版社出版
新华书店北京科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
*
开本 787×1092　1/16　印张 31　字数 710 000
1991年 7 月第 1 版　1992年 5 月第 1 次印刷
印数 0.001—2 460
ISBN 7-04-003691-6/O·1097
定价 9.20 元

前　　言

运筹学是近四、五十年才发展起来的新学科，在我国也只有三十多年的历史．近些年来的实践表明，运筹学是实现管理现代化的有力工具．目前，许多高等院校相继设立了管理工程、系统工程、运筹学、经济应用数学等系或专业，运筹学已成为这些系或专业的骨干课程之一；在财经院校中，也普遍地开设了运筹学或线性规划的课程．鉴于这种形势，运筹学界的同仁们深感高等院校的管理、系统工程、财经类有关专业急需编写一本较通用的运筹学的本科生教材．在中国数学会运筹学会教育委员会的组织和领导下，自 1985 年以来相继在成都、西安、大连等地召开了关于运筹学课程的教学讨论会，制订和多次修改了管理、系统工程及财经类专业用的《运筹学》教学大纲，并组织编写有关的教材．《运筹学》大纲要求学生通过本课程的学习，掌握运筹学主要分支的基本概念、理论和方法，重点是对各种方法的运用；要求教师重视对学生实际应用能力的培养．注意“数学模型”的建立与“案例分析”．本书就是在此大纲的基础上，听取了各方面的意见，并结合我们自己多年的教学与科研工作体验编写而成．

全书分为十章．各章内容基本上保持相对独立，各院校有关专业可按专业性质与学时多少来选取．讲述全书大约需要 140 学时，其中带“*”的章节表示选学内容．

本书由卢向华(第一、三、四、六、十章)、侯定丕(第七、八、九、十章)和魏权龄(第二、三、五章)编写．在编写过程中曾得到中国数学会运筹学会、运筹学会教育委员会以及众多运筹学界和系统工程界同志们的帮助和指导，我们在此深表谢意．这里，我们特别要提出，邵济煦教授审阅了我们的全稿，并对全书及各个章节提出了非常宝贵的修改意见，在此我们特向邵济煦教授表示衷心的感谢．

鉴于我们水平有限，书中不足乃至错误之处在所难免．恳切希望批评指正．

编者

1989 年 10 月于北京

目 录

第一章 绪 论

运筹学是近四五十年才发展起来的一个新学科，现在它已经是经济计划、系统工程、现代管理等各个领域的强有力的工具．

运筹学是英语中 Operational Research 和Openations Research 两词的译名，Operational Research 一词最早出现在二次大战期间英国军事作战研究中．为了搞好英伦三岛的空防、英国的军事科学家发明了雷达，同时对伦敦周围地区如何最有效地运用雷达布防进行了研究，即所谓运用的研究，这就是英语中的 Operational Research．当时主要是以物理学家Blackett 为首进行这项研究的，用的是数量分析的方法．稍后一点，美国也有不少人用数量分析方法研究如何最有效地发挥现有技术装备的作用，他们称这项研究为 Operations Research，有运用经营研究的意思．在 40 年代末及 50 年代初，这一类的数量分析研究工作还有很多，1951 年美国数学家 Kimball 编著了 Methods of Operations Research 一书，较系统地整理了这些方法，同时也就奠定了 Operations Research 作为一个应用学科的地位．从此以后，人们就把研究运用、经营、管理这类的数量分析理论、模型与方法的成果都归入 Operations Research，并用 OR 作为这一应用学科的简称．

OR 的中文译名运筹学则是出自《史记》卷八的“高祖本记”中刘邦的一句话：“夫运筹于帷幄之中，决胜于千里之外，吾不如子房”．借用了其中“运筹”二字作为 OR 的中文译名倒也十分恰当，说明运筹学不只是数学，还含有决策、规划的意思．

在西方，有人认为运筹学就是管理科学．在我国，人们虽不这么看，但是，毋庸讳言，运筹学是管理科学极为重要的工具，这无疑是运筹学工作者和管理科学工作者共同的看法．然而遗憾的是，运筹学在管理科学中的重要作用，在我国，至今尚未被各级管理的职能部门所认识，尚未发挥出它在四个现代化建设中应有的巨大作用．

运筹学发展到现在虽只有四五十年的历史，但是内容之丰富，涉及面之广，应用范围之广泛，已是应用数学中一个十分庞大的分支．运筹学的主要内容一般包含

1．线性规划
2．整数规划
3．非线性规划与最优化方法
4．动态规划
5．多目标规划
6．网络分析与统筹法
7．排队论
8．决策论
9．存储论

10. 对策论

11. 可靠性理论

12. 模型论

13. 投入产出分析

它们中的每一个部分都可独立成册，都有丰富的内容.

前面的1,2,3,4,5五个部分合起来统称为规划论，它们主要是解决两个方面的问题，一个方面的问题是对于给定的人力和物力，怎样才能发挥最大的效益(经济的或社会的)，另一个方面的问题是对于给定的任务，怎样才能用最少的人力和物力去完成它.

例如，有 m 种原料，其数量分别为 $b_1,b_2\cdots,b_m$，可用来生产 n 种产品，已知每单位第 j 种产品需消耗第 i 种原料的数量为 a_{ij}，可获利 c_j 元，问 n 种产品各生产多少方能获利最多？

设第 j 种产品计划生产 x_j 个单位，则根据题意有

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leqslant b_i \quad i=1,2,\cdots,m \\ \quad x_j \geqslant 0 \quad j=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

这是一个线性规划问题.

又如，要生产一种容积为 V_0 的圆柱形敞口杯，为使用料最省，问圆柱形的半径和高应是怎样的尺寸？

设杯子的半径为 r，高为 h，则根据题意有

$$\begin{cases} \min(\pi r^2 + 2\,\pi r h) \\ \text{s.t.} \quad \pi r^2 h = V_0. \end{cases}$$

这是一个非线性规划问题.

网络分析与统筹法主要是解决生产组织，计划管理与工程施工中的一些问题. 例如某施工队承建某项大厦工程，首先可将整个工程分解为若干道工序并估算出各道工序所需要的时间，这些工序有些必须先后有别，有些可以平行作业，据此画出施工工序网络图. 然后从网络图上找出一条影响工程进度的从开工到完工所需时间最长的路线，称为关键路线. 如果对关键路线上的某些工序经过挖潜革新，缩短了工期，则整个工程可提前完工. 如果关键路线上的某些工序延误工期，则整个工程亦必延误工期.

机器之等待修理，船舶之等待装卸，顾客之等待服务，凡此种种的排队现象，在日常生活和工作中是屡见不鲜的. 等待时间长了，会影响生产任务的完成，或者顾客会自动离去而影响经济效益. 如果增加修理工，装卸码头和服务台，固然能解决等待时间过长的问题，但又会蒙受修理工，码头和服务台空闲之损失. 这类问题的妥善解决是排队论的任务.

决策问题是普遍存在的，凡属“举棋不定”的事情都必须作出决策. 人们之所以举棋不定，是因为人们为实现某个预期目标时，面前出现了多种情况，又有多种行动方案可供选择，决策者如何从中选择一个最优方案，才能达到他的预订目标，这是决策论的研究任务.

人们在生产或消费过程中，都必须储备一定数量的原材料，半成品或商品. 存储少了会发生停工待料或失去销售机会而遭受损失；存储多了又会造成资金积压，原料及商品的损耗. 因此，如何确定合理的存储量，购货批量与购货周期至为重要，这便是存储论要解决的问题.

对策论是研究具有利害冲突的各方，如何制订出于自己有利从而战胜其他对手的斗争策略. 例如战国时代田忌赛马的故事，便是对策论的一个绝妙的例子.

对于一台复杂的系统或设备，往往是由成千上万个工作单元或零件组成的，这些单元或零件的质量如何，将直接影响到系统或设备的工作性能是否稳定可靠. 研究如何保证系统或设备的工作可靠性，这便是可靠性理论的任务.

人们在生产实践和社会实践中遇到的事物(或问题)往往是很复杂的，要想了解这些事物的变化规律，首先必须对这些事物的变化过程进行适当的描述，即所谓建立模型. 一个事物的模型是这个事物的某些主要特征的综合表述，它近乎事物实际而非事物本身，它能反映事物的变化规律而远比事物本身简单，这样就可通过对模型的研究来了解事物的变化规律. 因此，如何建立模型就成为研究事物变化规律的相当重要的一环，模型论就是从理论上和方法上来研究建立模型的基本技能.

投入产出分析是通过研究多个(乃至所有)部门的投入和产出所必须遵守的综合平衡原则来制订各个部门的发展计划，借以从宏观上控制、调整国民经济，以求得国民经济的协调合理的发展.

纵览运筹学的各个分支，可以认为运筹学所解决的问题，都必须先建立问题的模型. 一般说来，模型分两大类：一是形象模型或称几何模型；一是抽象模型. 抽象模型又分模拟模型(或称仿真模型)和数学模型. 从上面所介绍的各个分支来看，运筹学所研究解决的问题，其模型大都是数学模型，而且这些模型具有以下两个共同特征：

1. 都有一个明确的目标，这个目标就是从众多的可行方案中挑选出一个最优方案，所以有人给运筹学下了这样一个定义："运筹学是为决策者提供最优决策的一种数学方法". 这种说法是有一定道理的.

2. 用来表达目标的变量(称为决策变量)都要受一组条件的约束(称为约束条件)，它反映了问题本身所受到的客观条件的限制.

因此，运筹学模型大都表示为求一组决策变量，在一组约束条件下，使某一(或某些)目标达到最优.

运筹学虽然只有四五十年的历史，但发展如此之快，运筹学工作者如此之众，应用的广泛性是其中一个重要的原因. 在工业发达国家，运筹学得到普遍的应用，成效也很显著，节省了投资，降低了能耗，节约了原材料，加速了新产品的开发与研制. 总之，在生产、运输、经营、计划、管理等各个领域中都有运筹学的用武之地.

高速计算机的问世，是运筹学获得迅猛发展的又一重要原因. 实际中的运筹学问题，计算量一般都是很大的，只是有了高速计算机，才使得运筹学的应用成为可能，并反过来推动了运筹学的发展.

在我国，从事运筹学工作的人员为数不少，但大多从事理论研究与教学工作，从事应用研

究的较少，其主要原因是各级管理人员对运筹学这门学科还不甚了解，对运筹学的应用能带来经济效益持怀疑态度，从而使运筹学一直未能得到普遍的应用. 为了使运筹学在我国的四化建设中发挥巨大作用，我国运筹学工作者责任重大，尚须进行不懈的努力.

这里，我们衷心希望我国各类工科院校、经济院校能够普遍设立运筹学课程，就像高等数学那样，使之成为各个工科专业的必修课. 在不远的将来，使得我国的各种专业技术人材，人人都懂运筹学，人人都用运筹学，那时候，我国的经济定将出现一个突飞猛进的飞跃.

第二章 线性规划

在这一章中，我们来讨论线性规划的理论与解法，其中也包括线性规划的对偶理论．线性规划是运筹学的最主要的分支之一．早在1939年，苏联数学家和经济学家坎托罗维奇(Л.В. Канторовиг)就提出了生产组织与计划中的线性规划模型．四十年代末丹齐格(G. B. Dantzig)、查恩斯(A. Charnes)等人关于线性规划的论著，都是线性规划的最卓著的开创性工作．线性规划模型比较简单，理论与方法都比较成熟，又有可供计算大型线性规划的计算机软件，因而，线性规划在相当广泛的领域和部门有着重要的应用．

§ 1 线性规划的基本概念

§ 1.1 线性规划的数学模型

线性规划是研究在线性不等式以及等式约束条件下，使得某一线性目标函数取得最大(或最小)的极值问题．下面我们通过一些具体例子来介绍线性规划的数学模型．

例 1 某木器加工厂只生产两种产品：桌子和椅子，售出一张桌子的利润为30元，售出一把椅子的利润为40元．又知桌子和椅子需经过两个加工工段：装配工段和精整工段，其中每个桌子和椅子所需工时，以及各工段的生产能力由下表给出，问如何安排生产可使总利润最大．

表 2.1

工段 \ 工时 \ 项目	桌子	椅子	生产能力（工时/天）
装配	4	3	30
精整	1	3	12

解 设 x_1 为桌子的计划生产数量，x_2 为椅子的计划生产数量，不难看出，装配工段生产能力的限制条件为

$$4x_1+3x_2\leqslant 30,$$

精整工段生产能力限制条件为

$$x_1+3x_2\leqslant 12,$$

又由于桌椅数不能为负数，故有非负限制条件

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0.$$

此时目标函数(总的利润)为

$$f=30x_1+40x_2.$$

这样，问题化为

$$\begin{cases}\max f=30x_1+40x_2\\ \text{s.t.}\\ \quad 4x_1+3x_2\leqslant 30\\ \quad x_1+3x_2\leqslant 12\\ \quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(注意,在此问题中,如果要求一天中生产桌子与椅子数量必需是整数,则需加上对变量 x_1，x_2 的整数限制,这时问题除了目标及限制条件都为线性函数之外,还要求变量为整数. 这样的问题称为整数规划. 详见第三章§2. 然而,如果生产是连续不断进行时，整数的限制常常可以忽略不计).

例 2 生产安排问题

设用 m 种原料生产 n 种产品,各种原料的现有数量分别为 $b_1,b_2,\cdots,b_m$,各种产品的价格分别为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,并且已知生产一个单位第 j 种产品所需第 i 种原料的数量为

$$a_{ij},\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n.$$

问如何安排该 n 种产品的生产计划，以使总的产值最大.

解 设 x_j 为生产第 j 种产品的数量,$j=1,\ 2,\cdots,n$、由于第 i 种原料的消耗不得超过它的现有量b_i，因此可得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,m,$$

考虑到产品的数量应是非负的，所以还应附加限制条件

$$x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n.$$

这时，我们可以得到的总产值为

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

因此,问题可写为如下的形式:求变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值,使它满足

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geqslant 0 & j=1,2,\cdots,n,\end{cases}$$

并使目标函数 $f=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$达到最大值. 我们的问题可以简写为

$$
\begin{cases}
\max f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s. t.} \\
\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad i=1,2,\cdots,m \\
\qquad x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,n
\end{cases}
$$

例 3 运输问题

设某种货物有 m 个产地：$A_1, A_2, \cdots, A_m$，联合供应 n 个销地：$B_1, B_2, \cdots, B_n$，其中各产地产量(单位：吨)，各销地销量(单位：吨)、各产地至各销地的运价(单位：元/吨)如下表所示（这里总产出与总销量需满足平衡条件 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$）

表 2.2

单位运价 销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产 量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销 量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

其中

a_i 为产地 A_i 的产量，$i=1,2,\cdots,m$，

b_j 为销地 B_j 的销量，$j=1,2,\cdots,n$.

c_{ij} 为由产地 A_i 到销地 B_j 的单位运价，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$. 问如何组织合理的调运，才能使总运费最小.

解 设 x_{ij} 表示由产地 A_i 计划运往销地 B_j 的该物资的数量(单位：吨). 那么第 i 个产地 A_i 运往所有销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 的总数量为 $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$，它应该是产地 A_i 的产量 a_i，即满足条件

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1,2,\cdots,m.$$

第 j 个销地由各个产地 A_1、A_2，$\cdots$，A_m 运到的物资的总数量为 $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$，它应该是销地 B_j 的销量 b_j，即满足条件

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\cdots,n.$$

又由于 x_{ij}不能为负数，即满足条件

$$x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n.$$

此时总的运费为

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

于是我们的问题化为

$$\begin{cases} \min f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \quad i=1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad j=1,2,\cdots,n \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

(注意，运输问题是特殊形式的线性规划问题，一般来说不使用本章介绍的方法求解．详见第三章§1)

例 4 营养配方问题

设用 n 种原料 $B_1,B_2,\cdots,B_n$配制成具有 m 种营养成份 $A_1,A_2,\cdots,A_m$的食品，每单位食品中各种营养成份的含量分别不得少于 $a_1,a_2,\cdots,a_m$个国际单位，又原料 B_j的单价是 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$且每单位原料 B_j含营养成份 A_i 的数量是 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n)$个国际单位．问应如何配方，才能使食品既满足营养要求，而又成本最低？

解 设选用原料 B_j的数量为 x_j，目的是希望食品的成本

$$S=\sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

最低，但食品中含营养成份 A_i 的总量又不得少于 a_i，即应有

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\geqslant a_i \quad i=1,2,\cdots,m,$$

于是食品的营养配方问题化为求解

$$\begin{cases} \min S=\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\geqslant a_i \quad i=1,2,\cdots,m \\ x_j\geqslant 0 \quad j=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

例 5 合理下料问题

设要在某种规格的原材料(条材或板材)上,裁出m种不同的零件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$,它们的需要量分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$. 根据以往经验,在一件原材料上共有 n 种不同的下料方式 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,且对每种下料方式 B_j可裁得零件 A_i为 c_{ij}个($i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$), 问应怎样安排下料方式使得既满足需要,所用原材料又最少?

解 用 x_j表示按下料方式 B_j下料的原材料的数量,于是所用原材料的总数为

$$S=\sum_{j=1}^{n}x_j$$

目的是希望所用原材料总数 S 达到最小,但 x_j必须是整数并满足 如下的要求

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\ x_j\geqslant a_i\quad i=1,2,\cdots,m$$

于是合理下料问题便归结为求解如下的问题

$$\begin{cases}\min S=\sum_{j=1}^{n}x_j\\ \text{s.t.}\\ \sum_{j=1}^{n}c_{ij}\ x_j\geqslant a_i\quad i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geqslant 0\ \text{且为整数},\ j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

由以上几个例子可以看出,尽管它们所表述的问题千差万别,但它们的数学表达式却是相同的,即求一组决策变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,在一组线性不等式或线性 等式的限制条件 (通常称为**约束条件**)

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ x_j\leqslant(\geqslant\text{或}=)b_i,i=1,2,\cdots,m$$

以及所有决策变量(或某些决策变量)x_j为非负条件下,使得线性目标函数

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

达到最大(或最小)值. 我们把这一类数学表达形式的问题称为**线性规划**问题. 因此线性规划问题的一般数学模型可表述为

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\max(\min)f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\ \text{s.t.}\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ x_j\leqslant(\geqslant\text{或}=)b_i\quad i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geqslant 0\quad j=1,2,\cdots,n(\text{或某些}j),\end{cases}$$

其中 a_{ij},c_j,b_i都是知(给定)数,约束的个数为 m,变量的个数为n.

如果一组变量 $x_1,x_2,\quad,x_n$的值满足限制条件(约束条件),我们称其为**可行解**,有时也称

其为可行方案；如果一组变量值 $\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n$ 不但是可行解，而且使得目标函数达到它的最大值(或最小值)，则称其为最优解．对应于最优解的目标函数值，称为规划问题(P)的最优值．线性规划所讨论的问题是：可行解与最优解的性质，以及寻求最优解的方法．应该指出的是，将实际问题归结为线性规划模型进行求解，不但能给出问题本身的最优方案，还能通过对模型的进一步分析，给出该企业或部门今后"活动"的具体参考意见(详见本章§ 4.2)

§ 1.2 两个变量的图解法

当变量的个数 $n=2$ 时，我们可以用图解法很快的求解．研究两个变量时的图解方法，通过几何直观可以发现和理解线性规划的很多特性．我们用例子说明图解法的求解过程．

例 1 用图解法求下面的线性规划的最优解：

$$\begin{cases}\max\ f=3x_1+4x_2\\ \text{s.t.}\\ \quad 4x_1+3x_2\leqslant 30\\ \quad x_1+3x_2\leqslant 12\\ \quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

解 对于上述具有两个变量的线性规划问题，我们可以在以 x_1,x_2 为坐标轴的直角坐标系中，将满足约束条件的区域画出来（这样的区域称为约束集合或可行域）．先考虑约束条件

$$4x_1+3x_2\leqslant 30.$$

在直角坐标系中，等式

$$4x_1+3x_2=30$$

表示一条直线 L_1．而严格不等式

$$4x_1+3x_2<30$$

表示以直线 L_1 为边界的左半平面(见右图)．于是约束条件

$$4x_1+3x_2\leqslant 30$$

表示由直线 L_1 分割的坐标平面的左半平面(包括直线 L_1 在内)．类似地，在坐标平面上先确定直线 L_2：

$$x_1+3x_2=12,$$

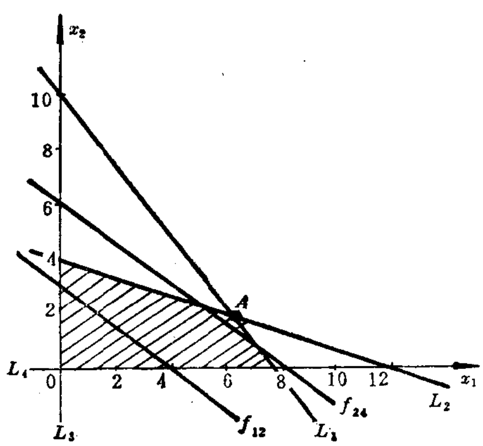

图 2.1

再确定由严格不等式

$$x_1+3x_2<12$$

所限定的半平面(实际上，将 $x_1=0,x_2=0$ 代入 x_1+3x_2-12，知 $x_1+3x_2-12<0$，故此约束条件确定的半平面为：由直线 L_2 确定的下半平面)．于是，第二个约束条件

$$x_1+3x_2\leqslant 12$$

表示由直线 L_2 分割的坐标平面的下半平面(包括直线 L_2)．最后，关于变量 $x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$ 限定

的是正象限(即第Ⅰ象限)．可以看出，同时满足上面限制条件的区域(可行解集合) 如图 2.1 的阴影部分所示．

现在的问题是要求在可行解集合中求得使目标函数 $f=3x_1+4x_2$ 达到最大值的点．为此，我们来考虑以常数 d 为参数的直线

$$f_d:\ 3x_1+4x_2=d$$

对于不同的 d 值，在坐标平面上可以描绘出一族平行的直线．实际上，我们只需取 d 的两个不同的值，就可以观察到目标函数值的变化趋势．例如，取 $d_1=12, d_2=24$，得到两条直线

$$f_{12}:\quad 3x_1+4x_2=12,$$

$$f_{24}:\quad 3x_1+4x_2=24.$$

由图 2.1 可见平行的直线族向右上方移动时目标函数值增大．因此，由图可知在可行域的点 A 处，目标函数值最大，即点 A 是问题的唯一最优解．为了精确地确定出 A 点的坐标 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$，只需求解下面的联立方程组(即直线 L_1 与直线 L_2 的交点)

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2=30 \\ x_1+3x_2=12 \end{cases}$$

解之可得 $\bar{x}_1=6, \bar{x}_2=2$．相应的最优值为

$$\bar{f}=3\bar{x}_1+4\bar{x}_2=26$$

例 2 求解线性规划问题

$$\begin{cases} \max f=x_1+x_2 \\ \text{s.t.} \\ \quad x_1+x_2\leqslant 2 \\ \quad -x_1+x_2\leqslant 1 \\ \quad x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, \end{cases}$$

解 在直角坐标系中，画出由线性方程式

$$x_1+x_2=2$$

所对应的直线 L_1，由此进一步确定由不等式

$$x_1+x_2<2$$

所对应的半平面为：由直线 L_1 确定的左下半平面(因为 $x_1=0, x_2=0$ 使得 $x_1+x_2-2<0$)，类似地可确定出第二个限制条件

$$-x_1+x_2\leqslant 1$$

为由直线 L_2 确定的右下半平面 (见图2.2)．由于对变量 x_1 和 x_2 的非负限制，即变量限制在第Ⅰ象限．于是问题的可行解集合为图 2.2 的阴影部分．

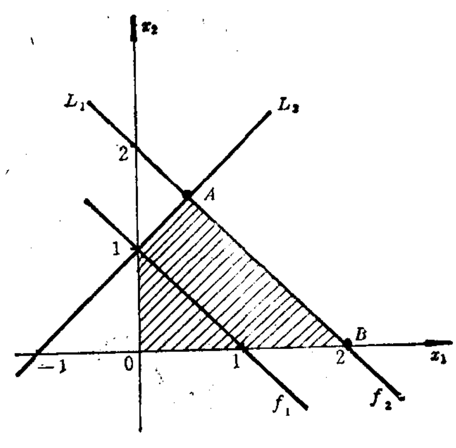

图 2.2

对于目标函数对应的平行直线族

f_d: $x_1+x_2=d$,