数学应用

解题思路

马庆忠 主编

海洋

数学应用解题思路

主编：马庆忠

编者：马维璋

王海陆

李瑞福

夏兆扬

康东升

焦国杰

审阅：张世魁

海洋出版社

1991年·北京

内 容 简 介

本书把初等数学分成20个专题，系统地论述各专题在各方面的广泛应用，对读者运用数学知识提高解决综合应用问题的实际能力，很有裨益。各章均有若干例题、习题和答案。

本书的特点是既适合在校学生阅读，同时兼顾在职工作人员的需求。内容讲的精，既有灵活性，又具启发性。特点之二是内容丰富，结合实际应用，在职人员需要解决与数学有关的实际问题时翻开此书，会得到答案。特点之三是具科学性、系统性、逻辑性。

本书作者系富有经验的数学教师，曾多年撰文著书。本书系适合于工农商学兵各界读者需要的有益读物。

（京）新登字087号

数学应用解题思路

马庆忠　主编

*

海洋出版社出版（北京市复兴门外大街1号）

新华书店北京发行所发行　海洋出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：20.5625　字数：460千字

1991年12月第一版　1991年12月第一次印刷

印数：1—5600

*

ISBN 7-5027-1269-0/G·406　　定价：9.50元

前　言

华罗庚教授曾说过：在论及数学的应用时，宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。大哉数学之为用。

因为数学的应用是这样的广泛，所以现代科学工作者把数学称为基础科学。

中学里，为了强调数学的重要，把数学定为主科之一。无论是评价一个学生学习成绩的优劣，还是衡量一个学校教学质量的高低，都把数学成绩的好坏作为主要的标志之一。

怎样才能提高数学的教学质量呢?我们认为，关键在于提高学生应用数学知识解决各种问题的能力。

中学数学课本中的不少应用题，可以培养学生应用数学知识解决问题的能力。但是限于教学的阶段性，一般只提供一些应用本节或本章知识的简单问题，学生比较容易掌握。对于应用不同阶段的数学知识，综合起来解决问题的应用题，课本上较少。编写本书的目的之一，就是想帮助青少年多见识一些综合应用数学知识解决问题的例子，以便打开思路，提高数学解题的能力。

在中学课程中，应用数学知识的科目很多，其中物理、化学和数学几乎分不开。但是，有人却认为它们不相干，以至学数学时，不考虑他的物理意义；学物理时，不联想数学方法。学得十分枯燥，十分困难。如果能把数理化之间的鸿沟填

平，人们不就会自由一些了吗?编写本书的目的之二，就是想帮助青少年了解数学在各学科中的应用，以便更自觉地应用数学知识去解决各种问题

我们很想把这本书编得更好一些。由于各方面的原因，其中最主要的是水平不高，很难如愿。我们愿意以此奉献给青年朋友，以及有志于此的同行们，作为研讨的素材，希望能在以后有所提高。热切地盼望得到读者的指正。恳请同仁们不吝赐教。

编者

1990.7

目　录

第一章 近似计算

数学有着广泛的应用。应用数学的一个显著特点就是近似计算。也许有人会说，数学的特点不是精确吗，怎么会是近似呢？是的。精确是数学的特点。但是，数学的精确是与近似分不开的。根据不同的需要，使用不同精确度的近似数，正是数学的精确之所在。近似计算就是有关近似数的计算。一方面要给出确定近似数计算结果的法则，另一方面要明确计算结果近似的程度。

（一）近似计算的基础知识

1. 准确数和近似数

表示客观存在的量的数有两种：一种是与客观量完全一致的数，叫准确数；一种是与客观存在的量有一定差别的数，叫近似数。

都用准确数不是更好吗？其实未必。如我国的人口总数，尽管可以统计出某个时刻的准确数字，但因数字很长，不便于说，不便于记而且随着时间的推移会不断变化，反而不如用近似数。通常说我国有11亿人口就可以了。

使用近似数还有一个原因，那就是有时求不出准确数。我国的领土约960万平方公里。能不能测出它的准确值呢？

不能。无论使用多么精密的仪器，也不能测出它的准确值。

从应用的角度来看，有些准确数还不如近似数便于使用。例如，顾客买了1元钱3斤的苹果5斤，应该付多少钱呢？若按准确数来付，则应付$\frac{5}{3}$元，但人民币是没有这样的面值的。而用近似数，付1.67元，那是十分方便的。又如，用铁丝围一个直径为1米的圆环，该用多少铁丝呢？若用准确数，则为π米。但用尺是量不出这种长度的。而用近似数，取3.14米或者3.1416米都不难。

2. 近似数的截取

在计算的过程中，常常只保留若干数位而把其余的数位删去，这就是近似数的截取。有三种近似数截取的方法。

第一种，保留某个数位及其前面数位的数字，把其后各数位的数字删去。这种方法叫去尾法。所得近似数小于原数，叫做原数的不足近似值。

第二种，保留某个数位前面的数位上的数字，删去这个数位后面的数位上的数字，在这个数位的数字上加1。这种方法叫收尾法。所得近似数大于原数，叫做原数的过剩近似值。

第三种，保留某个数位前面的数位上的数字，删去这个数位后面的数位上的数字。当这个数位后面第一位的数字小于5时，这个数位的数不变；当这个数位后面第一位的数字不小于5时，这个数位的数加1，这种方法叫四舍五入法。

例如 把$\frac{5}{3}$化为小数，保留百分位及前面各数位。用去

尾法得1.66；用收尾法得1.67；用四舍五入法也得1.67。

在没有特殊要求的情况下，近似数截取的方法是四舍五入法。

3. 测量所得近似数

具体的量，是按照一定的单位测量出来的。尽管量具的单位可以很小，但总有些量比最小单位还小，要读出这些量的准确值是做不到的。实际上，考虑到测量时的种种因素，所得数据都是近似数。

在日常生活中，人们测量时所得数字，到量具的最小单位为止。如普通尺上长度的最小单位是毫米，就读到多少毫米为止。在物理中规定，为了得出尽可能精确的数字，还应该估计出最小单位的下一数位的数字。那时，最小单位为毫米的尺子，测出的数字应该保留到1/10毫米的数位上。

4. 科学记数法

如果用四舍五入法把5603保留到十位，得5600，保留到百位，也得5600。那么近似数5600究竟是保留到哪个数位的近似数呢？

为了使人们能够看出近似数的数位上，哪些是经过四舍五入后应该保留的数位上的0，哪些是经过四舍五入后应该删去的数位上的0，人们采用科学记数法表示近似数。

用带有一位非0整数的小数和10的整数幂的积的形式表示近似数的方法叫科学记数法。不论是整数还是小数都能用科学记数法表示。例如1234可以写成1.234×10^{3}，0.05678可以写成5.678×10^{-2}。使用科学记数法表示近似数时，属于

保留数位上的0应该写出，属于删去的数位上的0应该略去不写。例如，保留到十位的近似数5600，用科学记数法写作5.60×10^3，保留到百位的近似数5600，用科学记数法写成5.6×10^3。

5. 精确度和有效数字

近似数和它所代表的准确数的差，一般不超过近似数的最末位数位的一个单位，人们就把近似数的最末位数位的一个单位叫做近似数的精确度。显然，精确度小的近似数与它所代表的准确数的差也就小些，精确度大的近似数与它所代表的准确数的差则会大些。

近似数用科学记数法表示时，它的小数部分的每个数字都是有效数字。前面的5.60×10^3的5，6，0都是有效数字。近似数不用科学记数法表示时，把近似数中从左边第一个非零数字起的所有数字都看作有效数字。例如，0.0120的有效数字是1，2，0。

6. 绝对误差和相对误差

近似数和它所表示的准确数的差的绝对值叫做近似数的绝对误差。绝对误差的大小反映了近似数接近准确数的不同程度。由于准确数不一定能求出，近似数的绝对误差的值也未必能求出，但是，我们可以估计出绝对误差的范围。例如，用去尾法或收尾法截取所得近似数，绝对误差不会超过最末位数位的一个单位，而用四舍五入法截取所得近似数，绝对误差不会超过最末位数位的半个单位。后者与前者相比，显然更好些。这就是截取近似数时常用四舍五入法的原因。

近似数的绝对误差与近似数所代表的准确数的比叫近似数的相对误差。由于近似数和它所代表的准确数很接近，通常用近似数的绝对误差与这个近似数的比来计算相对误差，以避免使用未必能求出的准确数。相对误差习惯用百分数的形式表示，因此也叫百分误差。因绝对误差的值难求，所以相对误差的值也不容易求出，常常也只求出其范围。只要根据绝对误差的范围与近似数相比即可求出。例如，近似数3.14的绝对误差不超过0.01，其相对误差不超过

$$0.01\div3.14\approx0.003=0.3\%。$$

7. 近似计算的法则

近似数作加减运算时，如果原始数据的精确度不同，那么运算结果的精确度应与原始数据中最大的精确度相同。为了简化计算且保证一定的精确性，把那些精确度小的近似数四舍五入，保留比结果多一位数字。在计算到最后结果时再做一次四舍五入。例如，求近似数36.3与3.2765的和，计算过程为

$36.3+3.2765\approx36.3+3.28$　　第一次近似

$36.3+3.28=39.58\approx39.6$　　第二次近似

近似数作乘除运算时，如果原始数据的有效数字的个数不同，那么运算结果的有效数字的个数应与原始数据中有效数字的个数最少者相同。对其余有较多有效数字的原始数据作一次四舍五入，使其有效数字的个数仅比结果多一个。当计算到最后结果时，再按结果的有效数字的个数截取。例如，求近似数2.4与35.719积的计算过程是这样的

$2.4\times35.719\approx2.4\times35.7$　　第一次近似

$2.4\times35.7=85.68\approx86$　　　　第二次近似

作近似数的乘方和开方时，计算结果应与底数或被开方数的有效数字的个数相同。

8. 准确数的近似计算原则

如果准确数和近似数一起作近似计算，那么准确数看作最精确的近似数，需要取多少位数或多少个有效数字就取多少个，计算结果根据其余近似数确定精确度或有效数字的个数即可。

（二）近似计算的应用

近似计算的应用十分广泛，有的也较复杂。由于计算中既有近似数，又有准确数，既有加减法，又有乘除法，既要考虑精确度，又要考虑有效数字。因此，保持清醒的头脑是非常重要的。

（1）日常生活中就会用到不少近似计算，虽然都不复杂，但往往有重要意义。

例1　顾客要买每公斤0.304元的机米16公斤，问粮店应收顾客多少人民币？

解　$0.304\times16=4.864\approx4.86$（元）

答　粮店应收顾客4.86元。

说明　由于人民币的最小单位是分，即0.01元，所以把4.864的千分位四舍五入。这个问题中的单价与公斤数都是准确数，不能按近似数乘法法则只保留两个有效数字。这个问题中计算结果截取的方法是四舍五入法，而不能使用收尾

法或去尾法。否则会损害顾客或国家的利益。

例2 顾客要买一角钱的糖块。如果小贩只有一角三分10块的糖块，那么应该给顾客几块糖？

解 $0.1\div(0.13\div10)=0.1\div0.013$

$\approx7.69\approx8$（块）

答 应该给顾客8块糖。

说明 按理这种问题也应该用四舍五入法，而不能用收尾法或去尾法。小贩这样处理，他就吃亏了。为了避免这种吃亏，小贩也可以建议顾客再交3分钱，然后付给10块糖。

例3 工会会员交纳会费的计算方法有两个原则：会费是工资的千分之五，工资中不足10元的部分不交会费。某人工资89元，应交多少会费？

解 $89\approx80$

$\therefore$ $80\times0.005=0.4$（元）

答 应交会费0.4元。

例4 某公司决定给所有工作人员增加工资13%，并规定工资中不足10元的部分按10元计算。某职员工资146元，增加工资后他的工资是多少？

解 $146\approx150$，

$\therefore$ $150\times(1+13\%)=169.5$（元）

答 增加工资后他的工资为169.5元。

说明 这两个例题中分别用到去尾法与收尾法截取近似数，其目的是照顾群众个人的利益。

例5 某学生有2元钱，要去商店买练习本，如果一个练习本0.26元，那么他能买几个练习本？

解 $2\div0.26\approx7.69\approx7$（个）

答 他能买7个练习本。

例6 某学生使用每页400字的作文纸抄2500字的一篇文章，问需要几页作文纸？

解 $2500\div 400=6.25\approx 7$（页）

答 需要7页作文纸。

说明 这两个例中分别使用去尾法和收尾法的原因是和问题的实际意义分不开的，不能使用四舍五入法。

例7 据报载新闻，我国人口年平均自然增长率为12/1000，如果某市去年人口为950万，那么一年后增加了多少？达到多少？

解 950万×12/1000≈11万

950万＋11万≈960万

答 一年后增加了11万人，达到960万人。

说明 统计数字是近似数。这里的950万只能算两个有效数字，增加人数也取两个有效数字。在求一年后人口总数时，要考虑精确度。这时的950万只能看做精确度为10万的近似数，人口总数也只能保留到10万位。

（2）日常生活中的计算，既有近似数计算也有准确数计算。值得注意的是，若无特殊要求，一般计算都是准确数计算，如作分数加法，$\frac{1}{3}+\frac{2}{7}$只能通分后相加得$\frac{13}{21}$，而不能求出近似小数相加。

在一些实际问题中，往往要做近似计算，这时，题中会指出对计算结果的精确度要求。计算时，不仅要按近似计算法则处理近似数，还要根据要求，妥善地处理准确数（多数情况下是无理数）的截取。

例1 要做一个容积为1000立方厘米的圆桶，如果要求圆桶直径和高相等，那么这个圆桶的直径应为多少厘米（精确到0.1厘米）。

解 设圆桶直径为x厘米，则圆桶高也是x厘米，由圆柱的体积公式

$$V=\frac{1}{4}\pi d^2h$$

$$1000=\frac{1}{4}\times3.14\times x^3$$

$$x^3\approx12560$$

$$x\approx23.2\text{（厘米）}$$

答 圆桶的直径应为23.2厘米。

说明 由于结果应该精确到0.1厘米，而计算是除法和开方运算，需要考虑有效数字的个数，所以要先估计出结果的有效数字的个数是多少个时，才能精确到0.1厘米，根据x^3的值容易看出结果有两位整数，因此结果有三个有效数字，这时把π的近似值取做3.14，就可以达到预定的要求。

例2 要使一个单位的产值5年后成为现在的5倍，那么这个单位产值的年平均增长率应该是多少？（精确到1%）

解 设年平均增长率为x，则

$$(1+x)^5=5$$

$$\lg(1+x)^5=0.6990$$

$$\lg(1+x)=0.1398$$

$$1+x=1.380$$

$$x=0.38=38\%$$

答 这个单位产值的年平均增长率应该是38%。