

ICP1/20
高等学校教学参考书

岩石力学性质与构造应力场

长春地质学院
陈子光 编

地质出版社

内 容 提 要

本书首先介绍了不同物理环境下岩石的变形、破坏与强度问题,然后抽象为弹性、塑性、粘性及流变体模型,采用解析法与有限单元法分析地学中有关构造形迹、体系(形变场)、构造应力场,以及全球应力场等问题。全书共分三篇十六章。

第一篇 概括地阐述了应力、应变的基本概念,在不同因素影响下岩石的变形特性(包括流变性质),以及岩石强度、破坏的特征及其准则。

第二篇 将地质体抽象为弹性、塑性、粘性与流变体模型,从而建立地壳运动的有关基本方程,为理论分析奠定基础。

第三篇 介绍了用解析法与有限单元法对断裂、褶皱的力学机制和构造应力场、形变场、全球应力场等问题的研究,及其在地震地质、工程地质、构造地质、地质力学等学科中的应用。

本书可供高等院校构造地质、地质力学、地震地质及工程地质等专业高年级学生、研究生参考和使用,也可供有关地质工作者及教师参考。

※ ※ ※

本书由北京大学王仁教授主审,经地质矿产部地质力学教材编审委员会主持召集的审议小组于1983年11月审稿,同意作为高等学校教学参考书出版。

※ ※ ※

高等学校教学参考书
岩石力学性质与构造应力场
长春地质学院 陈子光 编

责任编辑 张荣昌 孙荀英

地质出版社出版

(北京西四)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本: $787 \times 1092^{1/16}$ 印张: $26^{1/8}$ 字数: 613,500
1986年6月北京第一版·1986年6月北京第一次印刷
印数: 1—2,160册 定价: 4.10元
统一书号: 13038·教246

目 录

绪言	1
----	---

第一篇 岩石力学性质

第一章 应力	5
§ 1—1 应力的基本概念	5
§ 1—2 应力状态	8
§ 1—3 三向应力状态的应力圆	15
§ 1—4 球应力张量、偏应力张量、八面体应力及应力强度	19
§ 1—5 岩体的连续性及平衡微分方程	24
第二章 应变	30
§ 2—1 位移、应变及几何方程	30
§ 2—2 应变状态	37
§ 2—3 球应变张量、偏应变张量、八面体应变及应变强度	42
§ 2—4 变形协调方程	45
§ 2—5 有限应变表达式	46
第三章 岩石变形特性	49
§ 3—1 常温、常压下的岩石力学性质	49
§ 3—2 围压及中间主应力对岩石力学性质的影响	53
§ 3—3 温度对岩石力学性质的影响	58
§ 3—4 孔隙、孔隙液压对岩石力学性质的影响	62
§ 3—5 应变率对岩石力学性质的影响	68
第四章 岩石流变性质	76
§ 4—1 基本概念	76
§ 4—2 矿物、岩石的蠕变经验公式	77
§ 4—3 应力对岩石蠕变性态的影响	81
§ 4—4 围压、温度对岩石蠕变性态的影响	85
§ 4—5 岩石结构及湿度对岩石蠕变性态的影响	86
第五章 岩石的破坏与强度	90
§ 5—1 岩石的破坏与破坏类型	90
§ 5—2 岩石抗压强度及其影响因素	92
§ 5—3 岩石抗拉强度及其影响因素	96
§ 5—4 岩石抗剪强度及其影响因素	98
§ 5—5 不连续结构面的强度及其影响因素	101
第六章 岩石破坏准则	108

§ 6—1	库伦-纳维叶破坏准则	108
§ 6—2	摩尔破坏准则	111
§ 6—3	软弱面或各向异性岩层的破坏准则及稳定条件	115
§ 6—4	裂隙岩体强度判据	120
§ 6—5	两个常用的屈服准则	123
§ 6—6	平面格里菲斯准则	129
§ 6—7	平面格里菲斯修正理论	133
§ 6—8	裂隙的扩展	134

第二篇 地质体的力学模型

第七章	弹性、粘性、塑性体的模型	138
§ 7—1	理想弹性体模型	138
§ 7—2	各向异性弹性体模型	142
§ 7—3	粘性体模型	145
§ 7—4	塑性、弹塑性、理想塑性模型	147
§ 7—5	塑性模型——全量理论	149
§ 7—6	塑性模型——增量理论	153
§ 7—7	非线性体模型	155
第八章	流变体模型	161
§ 8—1	引言	161
§ 8—2	马克斯韦尔模型	162
§ 8—3	开尔文（伏埃特）模型	166
§ 8—4	粘弹性组合模型	167
§ 8—5	弹塑性、粘塑性及粘弹塑性模型	172
§ 8—6	三维问题的粘弹性体	175
§ 8—7	岩石本构方程的模拟	177
§ 8—8	宏观流变规律的积分方程简介	180
第九章	构造运动中力学问题的建立	184
§ 9—1	边界条件的建立	184
§ 9—2	弹性体基本方程及解法	186
§ 9—3	弹性体温度应力基本方程的建立	191
§ 9—4	非线性平面弹性体基本方程	193
§ 9—5	准静态粘性体基本方程及基本解法	198
§ 9—6	塑性体基本方程	200
§ 9—7	粘弹性体基本方程及对应原理	202
§ 9—8	弹性薄板弯曲基本方程的建立	204
§ 9—9	弹性薄板稳定理论基本方程的建立	208
§ 9—10	粘弹性薄板弯曲与稳态理论基本方程的建立	212

第三篇 构造应力场及形变场理论

第十章 构造形迹的应力场——断裂.....	215
§ 10—1 构造应力场及形变场概念	215
§ 10—2 断层与地应力关系	217
§ 10—3 逆掩断层及低角度重力滑动断层的力学机制	220
§ 10—4 断层产状与地应力之关系	226
§ 10—5 底部位移与断层产状关系	234
第十一章 构造形迹的形变场——褶皱.....	243
§ 11—1 在周围介质约束下弹性岩层褶皱的力学机制	243
§ 11—2 初始挠曲对弹性岩层褶皱的影响	250
§ 11—3 软硬互层弹性岩层褶皱的力学机制	253
§ 11—4 弹性岩层肠状褶皱的力学机制——大挠度问题	261
§ 11—5 褶皱非线性弹性理论的线性化	266
§ 11—6 粘性及粘弹性岩层褶皱的力学机制	273
§ 11—7 介质重力对褶皱的影响	280
§ 11—8 塑性岩层褶皱的力学机制	282
§ 11—9 岩盖形成的力学机制	284
第十二章 构造型式的应力场及形变场.....	290
§ 12—1 纬向构造的刚体力学分析	290
§ 12—2 典型山字型构造应力场	292
§ 12—3 旋卷构造型式应力场	296
§ 12—4 棋盘格式构造的力学分析	298
§ 12—5 雁行褶皱构造形变场	301
§ 12—6 具有流变性能岩体的自重应力场	308
§ 12—7 应用构造主曲率研究油气藏裂缝问题	311
第十三章 全球应力场.....	314
§ 13—1 地球自转角速度变化的部分资料	314
§ 13—2 均匀弹性球体由离心惯性力引起的全球应力场	315
§ 13—3 地球(快速模型)在自转变速作用下的全球应力场	323
§ 13—4 地球(缓变模型)在自转变速作用下的全球应力场	332
§ 13—5 日、月引潮力对地震的触发作用	335
第十四章 有限单元法简介.....	339
§ 14—1 概述	339
§ 14—2 单元划分及划分原则	340
§ 14—3 用结点位移表示单元内位移——位移模式	341
§ 14—4 用结点位移表示单元内的应变、应力	344
§ 14—5 最小势能原理、结点力及单元刚度矩阵	349
§ 14—6 等效结点载荷	352

§ 14—7	有限单元基本方程与总刚矩阵	355
§ 14—8	节理单元的处理	359
§ 14—9	物理非线性问题的分析	363
§ 14—10	几何非线性问题的分析	367
§ 14—11	塑性 (全量理论) 的有限单元法	369
§ 14—12	粘弹性蠕变问题的有限单元法	372
§ 14—13	构造应力场的反演	375
第十五章	有限单元法在地学中的应用	378
§ 15—1	典型山字型构造应力场有限单元法	378
§ 15—2	断层周围应力场及变化特征	380
§ 15—3	地震迁移模式	385
§ 15—4	金川矿区巷道周围应力场	388
§ 15—5	玲珑矿区矿产预测的探索	391
§ 15—6	侏罗推复体的力学机制	399
§ 15—7	粘性盐丘与褶皱	403

绪 言

本书是利用地质历史时期中在地应力场及各种自然环境影响下岩石发生的各种反应(表象),去研究、探索构造形迹、构造型式的演化过程及其有关的地应力活动及分布规律。这是当代构造地质学及地质力学研究中的一个重要课题。

地壳中的各种构造形迹、构造型式是地块在不同物理环境下遭受构造应力作用的结果。其表现形态、性质、强弱及其组合关系,不仅取决于地质体边界的几何形状、载荷作用的大小、方向、性质以及作用时间的长短等因素,而且与地质体所处的物理环境及在这种环境下地质体的力学性质有着密切关系。上述因素直接影响着地质体的变形与破坏等规律。它们相辅相成,互相影响、互相制约共同塑造了今日的各种构造形态和型式。李四光曾指出:“各种不同性质的岩石或岩体,也和其他不同力学性质的物质一样,在同样边界条件下,它们的各部分对同样应力作用的反应不同,也就是说,运动形式不同,产生的构造形迹不同。因此,我们必须把动力作用的方式和方向与被作用的岩层和岩块的力学性质结合起来加以考虑,才能正确地理解构造现象的力学意义”。可见要深入地对各种构造类型的起源提出合理的解释,必须同时研究岩石的力学性质及构造应力场。

岩石力学形成一门独立的学科,其历史还很短暂。由于采矿及工程建筑业迅速发展,引起人们对岩石力学性质研究的重视。在工程界侧重于现今构造力、重力作用下岩体内应力、变形及稳定性问题的研究。他们大多围绕着保证工程建筑安全、经济及正常使用的原则,合理地给工程设计提供依据。从地学角度研究岩石的力学性质,特别是从构造形迹、构造型式的发生和发展等问题进行研究时,与工程问题有一定差别,有它的独特的特点和意义。例如研究古构造型式。由于构造形迹从发生、发展到形成,大部经历了很长的历史时期,其中时间因素的影响是一个十分突出的问题,这与以百年计的工程问题有着很大差别。在地质历史时期中,岩石埋置深度、温度、围压、孔隙、应变率等因素,也与现今岩石力学性质实验中所给与的条件有很大差异,这无疑地给岩石力学性质的深入研究带来了许多困难。

地学中对岩石力学性质的研究,一般从观察自然界岩石的力学表象着手,结合现场和室内的测试,从而提高到理论分析探索。

观察自然界岩石的力学表象,一方面要考察形成构造形迹时地块所处的物理环境;另一方面要调查自然界岩石在一定物理环境下,产生粘、弹、塑性变形及流变的表象。一般从定性角度根据岩层中遗留的构造形迹,追索、推测其形成时这个地区所处的物理环境。例如在褶皱山带中坚固的岩石里见到的许多构造现象,如巨大的冲断层、褶皱系甚至板状劈理等,它们可能是在岩石处于未固结或半固结状态中形成的。因而可以大致推断当时岩石处于粘性或塑性状态,孔隙度较大,孔隙内含有水分,原始形成的沉积岩大都处于连续完整状态(也可能有原生裂隙、节理),产状近于水平等等^[3]。又如大片层状的倒伏褶皱、盘桓褶皱和在背斜构造核部的错综复杂的扭褶,都证明岩石当时是具有高度塑性的。有人把岩石的这种高度塑性表象,归根于岩石过去一度被埋设较深,受到高温、高压作用的影

响。在第四纪冰川沉积物中往往出现各式各样的弯曲砾石,形状颇为离奇,其中较为常见的马鞍石、熨斗石、灯盏石等等。虽然冰川温度不高,而且应力作用也较小,这种现象说明只要有充分长的时间,岩石中粘性占有重要地位^[2]。因此需要考虑岩石在时间因素的作用下,可转化为粘性、粘弹性或粘塑性。岩石中有时可发现各种颗粒、包裹体、化石等被拉长的现象;也可见到角闪石、长石、云母等板状矿物被调整为平行流线方向的定向排列等现象。这些现象表示当时岩石(矿物)可能处于一定温度和围压的作用下(如变质岩地区,通常温度为 $300\sim 800^{\circ}\text{C}$ 和几百MPa的围压),这种温度和压力使岩石处于弹塑性或粘塑性状态。

近十几年根据矿物及岩石的显微构造(如晶体内部的位错、重结晶颗粒大小以及亚颗粒大小^{[5]-[10]})与古构造应力值存在一定关系,推算古构造应力的大小。利用矿物及岩石中包体内含有流离气体及液体,用加温爆破法可以测得岩石形成时的古温度值。利用流动定律估算应变率大小^[11]。这些无疑给地学中研究岩石的力学性质提供了半定量及定量的物理环境。

在室内进行温度、围压、应变率等岩石力学实验,其目的试图了解地块在这些物理环境下岩石弹性、非弹性变形的表象及破坏方式,以便建立起某种物理环境下的本构关系、破坏准则。从而抽象为各种力学模型进行理论研究,从理论分析所得的结果,再与各种地质现象联系、验证,经过反复修正、验证,使其逐步逼近各种构造形迹、构造型式。

但必须指出,室内小块岩石试件与地壳中岩层、岩体在同样物理环境下,所表现的力学性质是否一致,还存在一定问题,但结合野外观测、理论分析及微观机制的研究,可以逐步使实验结果逼近野外地质现象。

由于自然界影响岩石变形的因素十分复杂,要想将这些复杂因素完全反映出来,抽象为一个力学模型来充分表达,目前还存在一定困难。尤其是地质时期中形成的地质体,除各种影响因素外,还可能经受过反复地加载、卸载,使岩石组构更加复杂,建立统一的模型则更加困难和复杂。目前所观察到的构造形迹大多经受过几次强裂地壳运动叠加后的产物。前期构造运动在地块中残留一部分应力与变形。后期运动又在这个基础上产生新的附加应力与变形。就其地质构造变形而言,多具有缓变—突变—缓变的反复过程,既有继承性,又有发展性。这些复杂因素直到目前还没有彻底搞清,因此,目前只能抓住一些主要因素,忽略一些次要、不影响本质的因素,将岩石抽象为一个较理想的力学模型。

构造应力场理论分析是指采用数学力学手段的一种模拟方法。众所周知,某一介质边界上受到载荷作用,介质内部将产生相对变形,各点都有确定的应力大小、性质与方向。介质内应力分布的空间,在力学中称为应力场。在地学中将地块中与变形构造单元对应的应力分布空间称为构造应力场^①。地质力学将地壳表面错综复杂而实际上却有成因联系的各种构造现象,归纳为统一构造应力场的产物——构造型式。然而地壳上的各种构造型式都并非一蹴而就的,它们在漫长的地质历史时期中,经历了一个从发生、发展到形成的过程,实质上是一个随时间逐渐演变的非稳定构造应力场。但有时在研究某一具体的、发展到一定成熟阶段的构造型式时,暂时不研究其演化过程及演变规律,也可暂时忽略时间因素,只研究成型后的构造应力场,因而,也可将其视为稳定构造应力场。

① 构造应力场定义与内容参阅 §10-1。

地质力学中研究构造应力场的手段与方法,一般采用野外观测、室内物理模拟及理论分析相结合来进行的。

野外观测(包括野外地质调查、地应力、地形变测量等等)是研究构造应力场的基础。一般从研究地块中的构造形迹入手,通过鉴定结构面的力学性质,展布规律及其相互之间的组合关系,综合起来就可以得到某地区的一幅构造形变图象。然后,再根据各点的构造形迹特征和岩石力学性质,大致可判断主应力方向与性质,综合该地区各点主应力方向,就可画出一幅构造应力迹线图象。

室内物理模拟是指模拟实验。它采用某些特殊材料,用人工方法模拟自然界所反映的几何与物理现象。在地质力学中往往用来模拟构造应力场(如光弹性模拟实验等)及构造形变场(如泥巴模拟实验等)。前者主要用于说明形成某种构造型式时的应力分布规律。后者试图模拟出各种形变图象(即自然界地壳中出现的各种构造形态及其组合型式)从而估推出自然界形成某种构造型式的成因与力学机制。模拟实验是地质力学工作的一个重要手段。由于组成各种构造型式的岩石在一定的物理环境及长期地应力作用下的力学性质尚未彻底清楚,其在地质历史时期的几何边界及边界上载荷方向与大小也无法进行测定,因此,还不能采用相似理论,对应力、应变与位移分量进行换算,所以直到目前为止,地学中的模拟实验还处于定性阶段。

构造应力场理论分析,有解析法和数值分析法。前者只能解决介质力学性质、边界几何形状及作用载荷较简单的情况。若介质为非线性、非均质或边界几何形状与载荷较复杂时,用解析法往往困难很大,甚至无能为力;这种情况下可采用后者,即用有限单元法求解。

一般理论分析是以野外观测为基础,通过室内岩石力学实验,将形成构造型式的岩石力学性质抽象为某一种力学模型(如弹、粘、塑性或流变体模型),采用不同几何边界及边界载荷,用数学力学理论进行试算,画出主应力迹线网络及应力等值线图象,与野外构造型式相比较,并进行修正,直到大体吻合为止。由于古构造形迹是由多次地壳运动在地块中遗留下的永久变形(如断裂、褶皱等)所组成,要想恢复其构造应力场,追溯造成这种构造形迹的岩石力学性质及边界条件,是一个很困难的反演问题,理论上具有多解性。实际研究工作中,只能用尽量多的事实拟合,用实际资料给予所求的解愈来愈多的限制。同时由于地壳内物质的组成、力学性质、推动力源、残余应力状态等不很清楚,就更增加了困难。近年来,由于观测技术的提高,资料的迅速积累,加上大型高速计算机的应用,以及有限单元计算方法的发展,应力场反演工作有了很大进展^[4]。

由于自然界地质现象十分复杂,直到目前尚有不少问题待解决。中国力学学会地球动力学组根据国内外现状,考虑国民经济急需和构造动力学的发展,提出下列有关课题,现摘录部分内容如下:

1. 地壳、上地幔岩石基本力学性质的理论和实验研究

(1) 地壳岩石的蠕变、断裂(脆性、塑性)、压磁、电导性质、断裂面的摩擦和声发射等的研究;

(2) 地幔岩石在高温、高压下的流变、强度和相变等特性的实验和理论研究。

2. 地壳构造运动力学模型的研究 在考虑地质构造和物质不均匀性、不连续性和时间等因素的影响下,建立地质体本构关系。

3. 地震的孕育、发生和震后效应的力学过程

(1) 地质体断裂力学与震源机制 (包括水库地震)、地震能量及引起前震、主震的条件和各自特征;

(2) 地震区高弹性能的来源, 积累和时、空转移过程、地震前后应力场变化;

(3) 在地震前兆测量的基础上, 通过力学分析提出地震预报和控制的理论基础。

4. 地壳构造运动动力过程的研究

(1) 典型构造形迹——褶皱和断裂的形成、转化和复合 (叠加) 理论与实验研究;

(2) 我国构造体系的数学模拟和实验研究, 如典型构造体系的发展和它们的复合的研究, 探索构造应力场与矿产分布的关系, 应力状态对矿物元素迁移和富集的关系等。

5. 全球构造应力场 (包括各种力源、天文因素) 的理论分析

6. 关于“反演”类型的力学问题, 在数学理论上的研究

7. 有关实测结果解释工作的研究

岩石力学之用于构造应力场分析, 是一门还处于雏形而且在地学中正在不断发展的重要课题。从国民经济意义上来说, 研究探索岩石变形与破坏规律以及构造应力场的发生、发展与形成, 对探索矿产分布规律和找矿工作, 提供了一种新的途径。根据现今构造应力场的活动, 进行地震预报, 以及评价工程建筑 (如水利、采矿、道路、国防工程) 地基的稳定性, 均具有十分重要的意义。

近十几年来, 我国地学与力学科学工作者进行了有关岩石力学及构造应力场的研究, 并取得了可喜的进展, 促进了该课题从定性逐步向半定量、定量方面的过渡, 尤其是电子计算机及有限单元法等科学技术的发展, 使岩石力学与构造应力场的理论分析和实验研究进一步得到提高, 这势必将促进该课题的发展。

参 考 文 献

- [1] 王仁、黄杰藩 (1981), 地学中的岩石力学研究 (陶振宇主编: 岩石力学理论与实践), 水利出版社
- [2] 李四光 (1973), 地质力学概论, 科学出版社
- [3] 斯宾塞, E.W. (1977), 地球构造导论, 朱志澄等译 (1981), 地质出版社
- [4] 王仁 (1982), 构造应力场的反演, 地质研究文集 (北京大学地质系), 北京大学出版社
- [5] 何永年 (1983), 显微构造古应力计及其应用, 地质科学研究, 第2期、3期, 地震出版社
- [6] 王小凤、王治顺、李继忠 (1982), 郯庐断裂带南段构造岩基本特征, 地质力学文集第6集, 地质出版社
- [7] Donald, L. Turcotte and Gerald Schubert (1982), Geodynamics, Applications of continuum physics to geological problems.
- [8] Briegel, U., Geotze, C. (1978), Estimates of differential stress recorded in the dislocation structure of hochzeiten limestone (switzerland), Tectonophysics v. 48.
- [9] Tullis, J. A., Christie, J. M., Griggs, D. T. (1973), Microstructures and preferred orientation of experimentally deformed quartzites, Geol. Soc. Amer. Bull. V. 84.
- [10] Durham, W. B., Geotze, C., Blake, B. (1977), Plastic flow of oriented single crystals of Olivine, Part II, observations and interpretation of the dislocation structures, J. Geophys. Res. V. 82(36).
- [11] Walter, H. M., Ueli, B. (1980), Mechanical aspects of Jura overthrust, Eclogae geol. Helv. Vol. 73/1.

第一篇 岩石力学性质

第一章 应 力

§ 1—1 应力的基本概念

在研究岩石力学性质及构造应力场之前，首先应建立应力、应变等有关基本概念。

岩石在未受力作用时，其内部晶粒间就有互相作用的内力存在，当受到载荷作用时，由于质点间位置的改变，必将引起质点间相互作用力的改变。岩石力学及构造应力场中研究的内力，就是这种力的改变量。由于载荷作用引起岩石内部内力的改变量称为附加内力或简称内力。

图1—1(a)为一受到若干外力作用而保持平衡状态的物体，为了显示和确定该物体某一截面（例如m—n截面）的内力，可采用截面法。假想沿此截面，将该物体分成I与II两部分，取I部分为分离体，显然欲使I部分维持平衡，则截面m—n上必然有连续分布的力存在（此力是II部分对I部分作用的力）。这些连续分布力的合力（包括力与力偶）称为截面m—n的内力，该内力可由平衡条件求得。

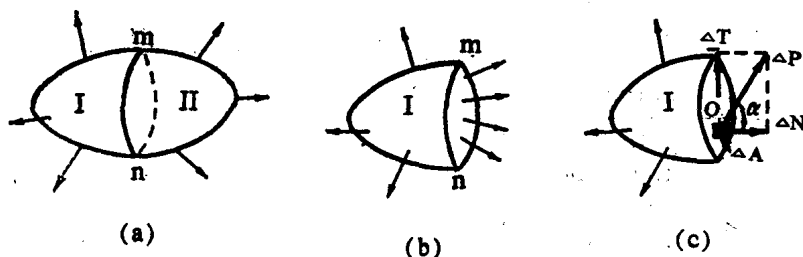


图 1—1 用截面法求内力示意图

截面法只能求出某一截面上的内力，而不能确定该截面上内力的分布规律。一般情况下，不同截面，其内力大小及分布规律是不相同的；即使同一截面上，各点内力的分布也有大小与方向之别。因此，为了确定任一截面上某一点的分布力，将引进应力概念。

若物体是均匀、连续的，则内力应当连续分布在截面上。现考察位于某一截面上任一点的应力。在该点附近取一微小面积 ΔA ，在 ΔA 面积中显然仍有一束内力，其合力为 $\Delta \bar{P}$ 。在这微小面积 ΔA 上的平均应力为：

$$\bar{p}_m = \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta A} \quad (1-1)$$

平均应力 $\bar{p}_m$ 与所取面积大小有关，为了消除面积的影响，以获得该点的应力，采用极限概念将 ΔA 无限缩小逼近于该点，即：

$$\bar{P} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta A} = \frac{d\bar{P}}{dA}$$

(1-2)

称为截面m—n上O点的全应力，它是一个矢量。

通常将 $\Delta \bar{P}$ 分解为垂直于截面、沿法线方面的分力 ΔN 及平行于截面的切线方面分力 ΔT ，如图1—1(c)所示，则：

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}$$

(1-3)

$$\tau_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A}$$

分别称为截面m—n上点O的正应力和剪应力（后者在地质力学中称为扭应力），它的量纲为〔力〕〔长度〕⁻²，国际单位为Pa即N/m²，现将有关应力单位的换算列表如下。

常用应力单位换算表

表 1—1

名 称	巴 (b)	千 巴 (kb)	达因—厘米 ⁻² (dyn/cm ²)	大 气 压
巴	1.0	10 ⁻³	10 ⁶	0.9869
千 巴	10 ³	1.0	10 ⁹	0.9869×10 ³
达因—厘米 ⁻²	10 ⁻⁶	10 ⁻⁹	1.0	0.9869×10 ⁻⁶
大 气 压	1.0133	1.0133×10 ⁻³	1.0133×10 ⁶	1.0
公斤—厘米 ⁻²	0.9807	0.9807×10 ⁻³	0.9807×10 ⁶	0.9678
帕斯卡(Pa), 牛顿—米 ⁻²	10 ⁻⁵	10 ⁻⁸	10	0.9869×10 ⁻⁵
千兆帕斯卡 (GPa)	10 ⁴	10	10 ¹⁰	0.9869×10 ⁴
磅—吋 ⁻² (RSi)	6.895×10 ⁻²	6.895×10 ⁻⁵	6.895×10 ⁴	6.805×10 ⁻²

名 称	公斤—厘米 ⁻² (kgf/cm ²)	帕斯卡 (Pa) 牛顿—米 ⁻² (N/m ²)	千兆帕斯卡 (GPa)	磅—英吋 ⁻² lbf/in ²
巴	1.0197	10 ⁵	10 ⁻⁴	14.503
千 巴	1.0197×10 ³	10 ⁸	10 ⁻¹	14.503×10 ³
达因—厘米 ⁻²	1.0197×10 ⁻⁶	10 ⁻¹	10 ⁻¹⁰	14.503×10 ⁻⁶
大 气 压	1.0333	1.0133×10 ⁵	1.0133×10 ⁻⁴	14.695
公斤—厘米 ⁻²	1.0	0.9807×10 ⁵	0.9807×10 ⁻⁴	14.223
帕斯卡(Pa), 牛顿—米 ⁻²	1.0197×10 ⁻⁵	1.0	10 ⁻⁹	14.503×10 ⁻⁵
千兆帕斯卡 (GPa)	1.0197×10 ⁴	10 ⁹	1.0	14.503×10 ⁴
磅—吋 ⁻² (PSi)	7.031×10 ⁻²	6.895×10 ³	6.895×10 ⁻⁶	1.0

据 米恩斯, 1982
(按国务院关于在我国统一实行法定计量单位的命令, 本书采用法定计量单位)

岩体受到载荷作用，一般情况下其内部各点应力是不相同的，即使在同一点上，通过该点的截面方位不同，其应力分量也各不相同。所以，应力不仅与所考察点的位置有关，而且与该点所取截面方位有关。过该点所有截面上应力的总体称为该点的应力状态。为了研究方便，通常将物体任一点沿x、y、z坐标轴方向取一边长分别为dx、dy、dz的微小正六面体（称为单元微分体）来研究，如图1—2所示，每一截面上都存在正应力及剪应力。一般又将剪应力分解成沿坐标轴的两个分量。例如：某一截面的外法线与x轴平行，则把作用于该截面上的正应力记为 σ_x ；把该截面上两个剪应力分量分别记为 τ_{xy} 、 τ_{xz} 。其中

第一个脚标表示剪应力所在截面，第二脚标表示剪应力的指向。如 τ_{xy} 表示剪应力作用在法线与 x 轴平行截面上，指向 y 轴方向，如图1—2所示。这样单元微分体六个截面有九个应力分量，其中三个正应力 σ_x 、 σ_y 、 σ_z ；六个剪应力分量 τ_{xy} 、 τ_{xz} 、 τ_{yx} 、 τ_{zx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zy} 。如图

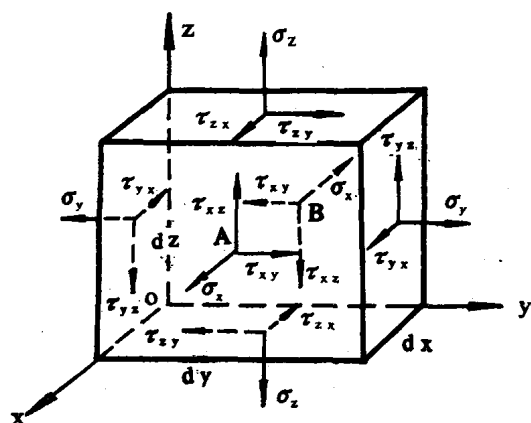


图 1—2 单元微分体各截面应力分量示意图

1—2 所示，六个剪应力分量并非是互不相关的，而是两两相等的。例如，取连接前后两个截面中心的 AB 为力矩轴，则由平衡条件知对该轴取矩：

$$\sum m_x(\bar{F}) = 0$$

即

$$2\tau_{yz} \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} - 2\tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2} = 0$$

得出：

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

由此可见，单元微分体上的九个应力分量只有六个应力分量是独立的，即 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、及 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 。若这六个应力分量为已知时，则过该点任一方位截面上的应力分量都可以求得。所以，该点附近单元微分体上的应力分量即可代表该点的应力状态。

为了表达某点的应力状态，可将应力分量按一定规则排列，使其每一行代表单元微分体上的一个截面的应力分量，即

$$S = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

S 称为应力张量，它是二阶对称张量，或用 σ_{ij} 表示，其中 $i, j = x, y, z$ 时，便可得到相应截面上的应力分量，而 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 简写为 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 。而 σ_{xy} 、 σ_{yz} 、 σ_{zx} 即为 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 。

应力分量的正负号规定，一直没有得到统一，例如岩石力学、土力学中规定以压应力为正，拉应力为负。但一般固体力学或地质力学往往采取相反的规定。本书为了研究构造应力场，仍采用弹性力学或地质力学中的规定（以拉应力为正，压应力为负）。但引用岩石力学的某些资料时，采用岩石力学的规定，或在有关部分加以注释说明。

剪应力正负号规定，亦采用弹性力学或地质力学的规定。即某一截面的外法线与坐标轴方向一致时（该截面称为正面），该面上的剪应力指向其它坐标轴的正方向时，则该剪应力为正；在正面上剪应力指向坐标轴负向者则为负。若某一截面上外法线与坐标轴负方向一致时（称为负面），该面上剪应力指向其它坐标轴负方向时，则该剪应力为正；在负面上剪应力指向坐标轴正方向者则为负。如图1—2所示的正应力及剪应力分量全部均为正值。这也恰恰与岩石力学的规定相反。

为了使读者便于阅读其它文献，现将有关应力分量通用记号及正负号规定列表如下：

应力分量通用记号

表 1—2

第一种记号	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$
第二种记号	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$
第三种记号	$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}$
第四种记号	$X_x, Y_y, Z_z, Y_x, Z_x, X_y$

应力分量正负号规定

表 1—3

	正 应 力		剪 应 力	
	+	-	+	-
固体力学	拉应力	压应力	正面上指向坐标正轴	正面上指向坐标负轴
地质力学			负面上指向坐标负轴	负面上指向坐标正轴
岩石力学	压应力	拉应力	正面上指向坐标负轴	正面上指向坐标正轴
			负面上指向坐标正轴	负面上指向坐标负轴
材料力学	拉应力	压应力	顺 时 针 转	逆 时 针 转

§1—2 应 力 状 态

在地壳运动时，地块内各点的应力分量各不相同，即使在同一点各方位截面上正应力与剪应力也不相同。本节将研究沿坐标面的应力分量与任一截面上应力分量之间关系。

(一) 求单元微分体内任一斜截面应力

假定单元微分体上六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}=\tau_{yx}, \tau_{yz}=\tau_{zy}, \tau_{zx}=\tau_{xz}$ 为已知，如图 1—2 所示，则通过该点任一斜截面上的应力即可确定。为此，在单元微分体中假想截取任一斜截面 ABC，其中斜截面外法线 N 与坐标轴 x、y、z 之间的夹角余弦分别为 $l=\cos(N,x)$ ， $m=\cos(N,y)$ ， $n=\cos(N,z)$ 。如图 1—3 所示，设斜截面 ABC 的面积为 dA，则 OBC、OAC、OAB 面积分别为 ldA、mdA、ndA。假设斜截面 ABC 的全应力为 $\bar{p}$ ，其在 x、y、z 轴上的投影分别为 p_x, p_y, p_z 。

根据平衡条件 $\Sigma F_x=0, \Sigma F_y=0, \Sigma F_z=0$ 可以得出：

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ p_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ p_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

或采用矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (b)$$

只要将 p_x, p_y, p_z 投影到该截面外法线 N 轴上，即可得斜截面 ABC 上的正应力 σ_N 。

$$\sigma_N = p_x l + p_y m + p_z n \quad (c)$$

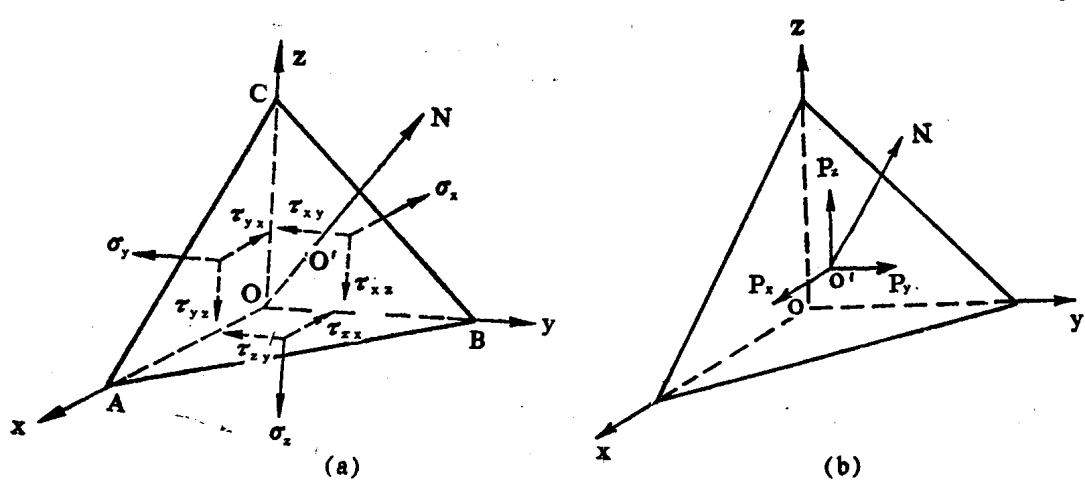


图 1-3 三维空间单元微分体各截面之间应力的关系

将 (a) 式代入 (c) 式即得斜截面上正应力为:

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl \quad (1-6)$$

由于斜截面上全应力为:

$$P = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

所以斜截面上剪应力为:

$$\tau_N = \sqrt{P^2 - \sigma_N^2} \quad (1-7)$$

若已知单元微分体的六个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 。则按式 (1-6) 及式 (1-7) 即可求出任一斜截面上的正应力 σ_N 及剪应力 τ_N ，由此可见，若已知六个应力分量，则可以完全确定该点的应力状态。

(二) 应力转轴公式

有时为了求得任意斜截面上的正应力和剪应力，我们还可以选取一个新坐标系 x' 、 y' 、 z' 。令 x' 轴与斜截面外法线 N 重合， y' 、 z' 轴取在斜截面上，且与 N 轴垂直，如图 1-4 所示。这时新坐标系与原坐标系之间的方向余弦如表 1-4 所示。

则该斜截面法线方向的正应力 $\sigma_{x'} = \sigma_N$ ，只要将式 (1-6) 中 lmn 改写成 $l_1 m_1 n_1$ 即得:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1 + 2\tau_{zx} n_1 l_1 \quad (d)$$

而在斜截面上沿 y' 轴指向的剪应力 $\tau_{x'y'}$ ，只需将式 (a) 中 p_x 、 p_y 、 p_z 中的 l 、 m 、 n 用 l_1 、 m_1 、 n_1 代替，然后再在 y' 轴分解，即得:

$$\tau_{x'y'} = p_x l_2 + p_y m_2 + p_z n_2$$

或

$$\tau_{x'y'} = \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \tau_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \tau_{zx} (n_1 l_2 + n_2 l_1) \quad (e)$$

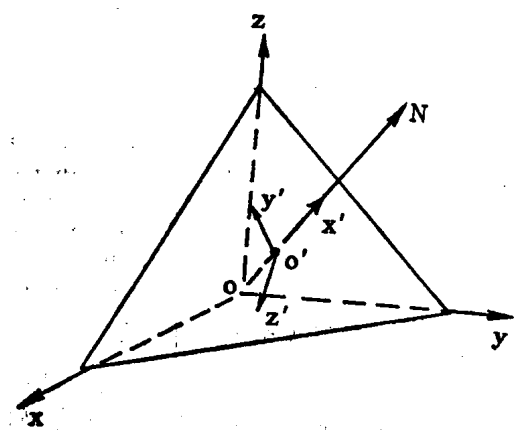


图 1-4 新坐标 x' 、 y' 、 z' 与原坐标 x 、 y 、 z 的关系

新坐标与原坐标的方向余弦

表 1—4

新坐标 \ 原坐标	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

同理将 p_x, p_y, p_z 在 z' 轴上分解得到

$$\begin{aligned} \tau_{x'z'} = & \sigma_x l_1 l_3 + \sigma_y m_1 m_3 + \sigma_z n_1 n_3 + \tau_{xy} (l_3 m_1 + l_1 m_3) + \\ & + \tau_{yz} (m_3 n_1 + m_1 n_3) + \tau_{zx} (n_3 l_1 + n_1 l_3) \end{aligned} \quad (f)$$

式 (d)、(e)、(f) 为斜截面上的应力分量，实际上也是新坐标中与 x' 轴相垂直的截面上的三个应力分量。

按此类推可以求出新坐标系 x', y', z' 的六个应力分量，其结果写成矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1m_1 & 2m_1n_1 & 2n_1l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2m_2 & 2m_2n_2 & 2n_2l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3m_3 & 2m_3n_3 & 2n_3l_3 \\ l_1l_2 & m_1m_2 & n_1n_2 & (l_1m_2 + l_2m_1) & (m_1n_2 + m_2n_1) & (n_1l_2 + n_2l_1) \\ l_2l_3 & m_2m_3 & n_2n_3 & (l_2m_3 + l_3m_2) & (m_2n_3 + m_3n_2) & (n_2l_3 + n_3l_2) \\ l_3l_1 & m_3m_1 & n_3n_1 & (l_3m_1 + l_1m_3) & (m_3n_1 + m_1n_3) & (n_3l_1 + n_1l_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

上式实质上就是应力分量的坐标变换式。根据方向余弦的关系：

(1—8)

$$\left. \begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1 \\ \dots\dots\dots \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \\ \dots\dots\dots \\ l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 &= 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

将式 (1—8) 前三式相加，即可得出：

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{常量}$$

由此可见三个正应力之和，并不受正交坐标系变换的影响，仍保持常量。

(三) 主应力及主方向

已知某一点的六个应力分量，可按式 (1—8) 求出过该点任意斜截面上的应力分量。可以证明，通过该点总存在着三个互相垂直其剪应力为零的特殊截面，该截面称为主面，其外法线方向称为该点的主方向，作用在主面上的正应力称为主应力。现在我们来分析该面上的主应力大小及其主方向。

若已知单元微分体的六个应力分量，并假设 ABC 斜截面为一主面，由于主面上剪应力为零，所以其全应力必为主应力 σ ，它与主方向 N 重合，如图 1—5。若将主应力 σ 在 x, y, z 轴上投影分别为：

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma l \\ p_y &= \sigma m \\ p_z &= \sigma n \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

其中 l 、 m 、 n 分别为主向与 x 、 y 、 z 轴的方向余弦。将上式代入式 (a) 得:

$$\left. \begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \sigma m &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ \sigma n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

即:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0 \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{zy} n &= 0 \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

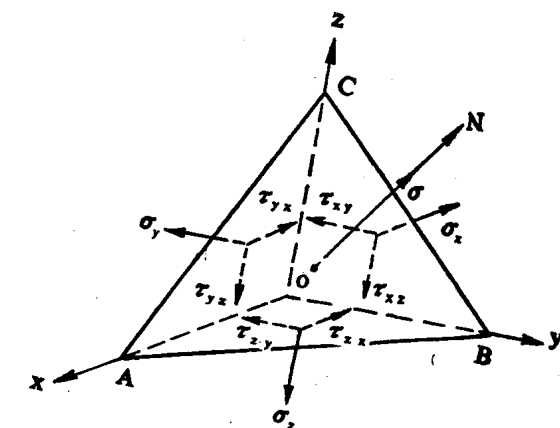


图 1-5 三维空间单元微分体与主面之间的应力关系

$$\text{且} \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (k)$$

若能求得上面四个代数方程中的 σ 、 l 、 m 、 n 即可得到主应力及其主方向, 由于式 (j) 中 l 、 m 、 n 不能同时为零, 所以这方程组的系数行列式必为零。

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

展开此行列式, 并经过适当整理, 得到一个 σ 的三次幂方程, 即

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \quad (1-9)$$

上式可写成下面的形式:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (1-10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} \\ &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

由式 (1-9) 或 (1-10) 即可求得 σ 的三个根 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 且可以证明均为实根^①。这说明一个点的应力状态中确实存在着三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 且 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。这三个主应力分别称为最大、中间及最小主应力。将求得的主应力分别代入式 (j) 的任意两方程中, 即可分别求得与主应力对应的三组方向余弦, 则三个主应力的方向即可确定。可以证明这三个主方向彼此垂直。

① 参阅三次幂代数方程根的性质。