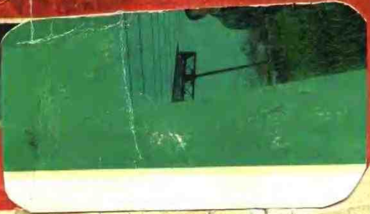
近世代数

陆少华 编著

JINSHI DAISHU



海交通大学出版

近 世 代 数

陆少华 编著

上海交通大学出版社

沪新登字 205 号

内 容 提 要

本书以群、环、域、模为核心，引进了有关基本概念，证明了有关基本定理，导出了基本结论和基本方法。本书共分六章，第一章介绍了集合、映射、关系的基本概念；第二章引进了群的基本概念；第三章导出了有关环的基本概念和定理；第四章从素域出发描述了域扩张的一般概念和方法；第五章介绍了西洛定理和伽罗华理论；第六章探讨了模的基本概念。本书每章配备合适的习题，并对部分习题进行解法提示，以供读者加深理解。

本书的特点是观点高，推理严密，方法简便。

本书可作为高等院校数学系高年级本科生和研究生的教材或参考书，也可作为有关人员参考书。

近世代数

出 版：上海交通大学出版社
（淮海中路 1984 弄 19 号）
发 行：新华书店上海发行所
印 刷：常 熟 市 印 刷 二 厂
开 本：850×1168（毫米）1/32
印 张：6.25
字 数：160000
版 次：1992 年 8 月 第 1 版
印 次：1992 年 10 月 第 1 次
印 数：1—1750
科 目：278—299
ISBN 7—313—01087—7/O·15
定价：2.05 元

TP311175/123

目　录

第一章　集合，映射，关系

第一节　集　　合

一、集合

在数学中，经常讨论的不是孤立的个体，也不是包罗万象的宇宙，而往往是对具有某些特性的个体的联合体进行研讨。这样，就产生了集合的概念。集合指“在一定范围内具有某些特性的个体组成的联合体”。组成一个集合的各个个体，称为这个集合的元素。

通常用大写英文字母 $A, B, C\cdots$ 来表示集合。用小写英文字母 $a, b, c\cdots$ 来表示集合的元素。当 a 是集合 A 的元素时，就说“a 属于 A”，或记“$a\in A$”。当 a 不是集合 A 的元素时，记成“$a\overline{\in} A$”。

设有两个集合 A, B，若对一切 $a\in A$ 均有 $a\in B$，则称 A 是 B 的子集，记成 $A\subseteq B$。

若 A 是 B 的子集，B 也是 A 的子集，则称集合 A 和 B 相等，记成 $A=B$。

若 A 是 B 的子集，B 不是 A 的子集，则称 A 是 B 的真子集，记成 $A\subsetneqq B$。

为了方便，称不含任何元素的“客体”为空集合，记成 ϕ，并把空集合看成任何集合的子集。

二、常用数集

数集是经常讨论的对象，为方便起见，今后用 $\underset{N}{P}$, Z, Q, R, C 分别表示自然数，整数，有理数，实数，和复数的集合。即

$$P=\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\},$$

$$Z=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots\},$$

$$Q=\left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0\right\},$$

$$C=\{a+b\mathrm{i} \mid a, b \in R\}。$$

三、集合的表示

在“二”中，已采用了集合的两种表示法，即列举法和特性法。列举法是用列举集合的元素来表示集合的方法，如“二”中对集合 P 和 Z 的表示。特性法是用限制元素范围，规定元素适合的条件来给出集合的方法，如“二”中对集合 Q 和 C 的表示。特性法的通常格式是 $B=\{x \mid x \in A, P(x)$ 成立$\}$，即集合 B 是集合 A 中使命题 P 得以成立的元素 x 全体所成的集合。

四、集合的运算及其性质

设 A, B 是集合 U 的子集，定义 A 和 B 的交集为一切既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，记成 $A \cap B$；定义 A 和 B 的并集为一切属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，记成 $A \cup B$；A 和 B 的差集为一切属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，记成 $A-B$。即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或者 } x \in B\},$$

$$A-B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \overline{\in} B\}。$$

集合的上述运算满足如下常用规律。

(1) 交换律　$A \cap B=B \cap A, A \cup B=B \cup A$。

(2) 结合律　$A \cap(B \cap C)=(A \cap B) \cap C$,

$A \cup(B \cup C)=(A \cup B) \cup C$。

(3) 分配律　$A \cap(B \cup C)=(A \cap B) \cup(A \cap C)$,

$A \cup(B \cap C)=(A \cup B) \cap(A \cup C)$。

(4) 对偶律　$A-(B \cup C)=(A-B) \cap(A-C)$,

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)。$$

集合的交与并的概念可推广到任意多个集合上去，设

$$A_i(i\in I)$$

是集合 U 的子集，定义集合族 $\{A_i|i\in I\}$ 的交集为

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x|x\in U,\forall i\in I,x\in A_i\}。$$

这里 I 叫集合族 $\{A_i\}$ 的标集。

集合族 $\{A_i|i\in I\}$ 的并集为

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x|x\in U,\text{存在一个 } i\in I \text{ 使 } x\in A_i\}。$$

特别当标集 $I=\phi$ 时，规定

$$\bigcap_{i\in I}A_i=U;\qquad \bigcup_{i\in I}A_i=\phi。$$

对多个集合的交，并运算，分配律，对偶律依然成立：

$$A\cup(\bigcap_{i\in I}B_i)=\bigcap_{i\in I}(A\cup B_i),$$

$$A\cap(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}(A\cap B_i),$$

$$A-(\bigcap_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}(A-B_i),$$

$$A-(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcap_{i\in I}(A-B_i)。$$

在此只证明最后一式，其余作为练习留给读者。

证 此题须证两点：(1)左边集合$\subseteq$右边集合，即左边集合的元素必属于右边集合；(2)右边集合$\subseteq$左边集合，即右边集合的元素必属于左边。

(1) $\forall x\in$ 左边集合，则 $x\in A$，且 $\forall i\in I,x\bar{\in}B_i$，即 $x\in A-B_i$，故 $x\in$ 右边集合。

(2) $\forall x\in$ 右边集合，$\forall i\in I$，$x\in A-B_i$，即 $x\in A$，$x\bar{\in}B_i$ $(\forall i\in I)$，则 $x\in A$ 且 $x\bar{\in}\bigcup_{i\in I}B_i$，故 $x\in$ 左边集合。（证毕）

五、幂集合

定义1.1 设 A 是给定的一个集合，则 A 的所有子集所组成

的集合称为 A 的幂集合，用 2^A 来表示。即

$$2^A=\{B|B\subseteq A\}。$$

例如，$A=\{1,2,3\}$，则

$$2^A=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}。$$

一般若 A 含有 n 个不同的元素，则 2^A 含有 2^n 个不同元素。理由是：2^A 的元素全是 A 的子集，而 A 的不含元素的子集有 $1(C_n^0)$ 个 (ϕ)，A 的含 1 个元素子集有 C_n^1 个；含 2 个元素的子集有 C_n^2 个，…，含 n 个元素的子集有 $C_n^n(=1)$ 个 (A本身)；故 2^A 的元素个数，即 A 的子集总数为

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n。$$

第二节 映 射

一、映射的概念

定义1.2 设 A 和B为二个非空集合，f 为一规律，若根据 f，A 中任意一个元素 x 都有 B 中唯一确定的元素 y（记成 $f(x)$）与之对应，则称确定了集合 A 到 B 的一个映射 f，记成$A \xmapsto{f} B$。（有时，在 A,B 确定的情形下，也简记成 f。）

A,B,f 为映射的三个要素，分别称为映射 $A\xmapsto{f}B$ 的定义域，值域和对应规律。二个映射称为相等，是指它们的三个要素对应相同。即"$A\xmapsto{f}B$"="$C\xmapsto{g}D$"意味着：

$A=C,B=D$ 且 $\forall x\in A=C$ 有 $f(x)=g(x)$。

例 1.1 (1) $A=R,B=\{x|x\in R,x>0\}$

$$f(x)=|x|,$$

不是 A 到 B 的映射。因为A 中的元素 0，根据 f 在 B 中无对应元素。

(2) $A=B=P$，f：把 A 中数对应到它的因子。

不是 A 到 B 的映射。因为 $f(12)=1,2,3,4,6,12$，不是 B 中唯一确定的元素。常记对应为 $A\xrightarrow{f}B$。

(3) $A=M_n(R)$ 即实 n 阶方阵全体，$B=R$，$f(x)=x$ 的行列式，则是 A 到 B 的映射。

(4) $A=B$，$I_A: x\longmapsto x$，是 A 到 A 的映射，称为 A 的恒等映射。

(5) $A=C[a,b]$，即区间 $[a,b]$ 上连续函数全体，$B=R$，$f(x(t))=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$ 是 A 到 B 的映射。

给了映射 $A\xmapsto{f}B$，若 $f(x)=y$，则称 y 为 x 在 f 下的像，x 为 y 的一个原像。

若 $C\subseteq A$，$D\subseteq B$，则定义 $f(C)=\{f(x)\,|\,x\in C\}$ 为 C 的像；定义 $f^{-1}(D)=\{x\,|\,x\in A, f(x)\in D\}$ 为 D 的原像。

给了映射 $A\xmapsto{f}B$，可以导出二个相关的映射 $2^A\xmapsto{f_1}2^B$，$2^B\xmapsto{f_2}2^A$，这里 $f_1(C)=f(C)$，$f_2(D)=f^{-1}(D)$。

二、映射的积

定义 1.3 给了二个映射 $A\xmapsto{f}B$，$B\xmapsto{g}C$，定义映射 $A\xmapsto{h}C$，这里 $h(x)=g(f(x))$ 为上述二个映射的积，记为 $h=gf$。

按定义，显然 $I_B\cdot f=f$，$fI_A=f$。(这里 I 为恒等映射。)

下面证明映射的积满足结合律。

定理 1.1 若给出了三个映射 $A\xmapsto{f}B\xmapsto{g}C\xmapsto{h}D$，则

$$(hg)f=h(gf)。$$

证 显然，上述二个映射的定义域都是 A，值域都是 D。而

$$[(hg)f](x)=(hg)[f(x)]=h\{g[f(x)]\}=h[(gf)(x)]$$
$$=[h(gf)](x)。\text{(证毕)}$$

三、单射，满射，双射

下面给出一些常见类型映射的定义。

定义 1.4 映射 $A \xmapsto{f} B$ 叫单射，如果 f 把 A 中不同元素对应到 B 中不同元素。即 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$，则

$$f(x_1) \neq f(x_2)。$$

判别 $A \xmapsto{f} B$ 是单射 $\Longleftrightarrow$ 若 $f(x_1) = f(x_2)$ 必 $x_1 = x_2$。

定义 1.5 映射 $A \xmapsto{f} B$ 叫满射，如果 $f(A) = B$。即对 $\forall y \in B$ 必存在 $x \in A$ 使 $f(x) = y$。

定义 1.6 若映射 $A \xmapsto{f} B$ 既是单射又是满射则称双射。

映射 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xmapsto{\sin x} (-\infty, +\infty)$ 是单射不是满射；映射 $(-\infty, +\infty) \xmapsto{\sin x} [-1, +1]$ 是满射不是单射；映射 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xmapsto{\sin x} [-1, +1]$ 是双射。

性质 单射的积仍是单射。满射的积仍是满射。双射的积仍是双射。

证明作为读者的练习。

四、可逆映射

定义 1.7 映射 $A \xmapsto{f} B$ 称为左可逆的，若存在映射 $B \xmapsto{g} A$ 使 $gf = I_A$。这里 g 称为 f 的左逆。

定义 1.8 映射 $A \xmapsto{f} B$ 称为右可逆的，若存在映射 $B \xmapsto{h} A$ 使 $fh = I_B$。这里 h 称为 f 的右逆。

性质 若映射 f 有左逆 g，右逆 h，则 $g = h$。

证 因 $(gf)h = g(fh)$，即 $h = g$。

判别 映射 $A \xrightarrow{f} B$ 是左可逆的 $\Longleftrightarrow A \xrightarrow{f} B$ 是单射。

证 $\Rightarrow$ 若 $f(x_1)=f(x_2)$，g 是 f 的左逆，则 $x_1=I_A(x_1)=gf(x_1)=gf(x_2)=I_A(x_2)=x_2$，故 f 是单射。

$\Longleftarrow$ 若 $A \xrightarrow{f} B$ 是单射，则可定义 $B \xrightarrow{g} A$。

$$g(y)=\begin{cases} x, \text{若 } y=f(x)\in f(A), \text{因 } f \text{ 是单射,故 } x \text{ 唯一}, \\ x_0, \text{若 } y \overline{\in} f(A), x_0 \text{ 是 } A \text{ 中任意一个固定元。} \end{cases}$$

显然 $gf=I_A$，故 f 左可逆。（证毕）

判别 映射 $A \xrightarrow{f} B$ 是右可逆的 $\Longleftrightarrow A \xrightarrow{f} B$ 是满射。证明留作读者练习。

定义 1.9 映射 $A \xrightarrow{f} B$ 为可逆的，如果存在映射 $B \xrightarrow{g} A$ 使 $gf=I_A$，$fg=I_B$。这里 g 称为 f 的逆映射。

判别 映射 $A \xrightarrow{f} B$ 可逆 $\Longleftrightarrow A \xrightarrow{f} B$ 是双射。

性质 (1) 若 f 可逆，则 $(f^{-1})^{-1}=f$。f^{-1} 唯一；

(2) 若 f，g 可逆，则 $f\cdot g$ 也可逆，且 $(f\cdot g)^{-1}=g^{-1}\cdot f^{-1}$。

上述性质，读者可直接按定义自行验证。

第三节 等势集合

一、集合等势的概念

定义 1.10 给了两个集合 A 和 B，若存在 A 到 B 的双射，则称集合 A 和 B 等势，记为 $A\sim B$。

因为恒等映射是双射，又双射是可逆映射，双射的积仍是双射，故有：

(1) $A\sim A$；

(2) 若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(3) 若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$。

二、有限集

若集合 A 和自然数的一个前段 $N=\{1,2,\cdots,n\}=\{x|x\in P, 1\leqslant x\leqslant n\}$ 等势（这里 n 是一固定正整数），从而集合 A 可表示为 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，则称 A 为有限集。n 即通常所说 A 的元素个数，称为 A 的阶，记为 $|A|$。有限集 A 的阶也称作为 A 的势。

命题 (1) 两个有限集 A 和 B 等势 $\Longleftrightarrow |A|=|B|$；

(2) 有限集不能和它的真子集等势。

三、可数集

定义 1.11 和自然数集 P 等势的集合称为可数集。

例 1.2 (1) $Z=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$ 是可数集。

(2) R 不是可数集。其证明如下：设 R 可数集（反证法），$R=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$。作闭区间套 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n,\cdots$，满足：① $\Delta_1\supsetneqq\Delta_2\supsetneqq\cdots\Delta_{n-1}\supsetneqq\Delta_n\supsetneqq\cdots$；② $a_1\overline{\in}\Delta_1$，$\cdots$，$a_n\overline{\in}\Delta_n$，$\cdots$。由数学分析的知识得，至少存在一点 $c\in\Delta_n, n=1,2,\cdots$。$c\in R$，则存在 k 使 $c=a_k\overline{\in}\Delta_k$，矛盾。故 R 不可数。

性质 (1) 有限个可数集的并集仍可数；

(2) 可数个可数集的并集仍可数。

性质(2)的证明　给了可数个可数集 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$。不妨设 $i\neq j$，A_i 和 A_j 无公共元素。若 $A_i=\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},\cdots\cdots\}$。则 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i=\{a_{ij}|i, j=1,2,\cdots,n,\cdots\}$。容易验证 $\varphi(a_{ij})=(2i-1)\cdot 2^{j-1}$ 是 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 到 P 的双射。（证毕）

推论 有理数集 Q 是可数集。

证 Q 可看成可数个可数集 A_n 的并集。这里 A_n 是分母为 n 的有理数全体。

四、无限集

定义 1.12 不是有限集的集合统称无限集。

性质 (1) 无限集必有可数子集；

(2) 无限集有等势的真子集。

证 性质(1)显然。在性质(1)的基础上，证明性质(2)：设 B 是无限集 A 的可数子集，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$，令 $B_1=\{b_2,b_3,\cdots\}$，则 $A_1=B_1\cup(A-B)$ 是 $A=B\cup(A-B)$ 的真子集。映射 f：

$$f(x)=\begin{cases} b_{i-1}, x=b_i\in B_1 \\ x, \quad x\bar{\in} B_1 \end{cases}$$

是 A_1 到 A 的双射。故 $A_1\sim A_0$(证毕)

命题 $A\not\sim 2^A$。

证 采用反证法。若存在着A到2^A的双射φ。记 $S=\{x|x\in A, x\bar{\in}\varphi(x)\}\in 2^A$。因 φ 是双射，故存在 c 使 $\varphi(c)=S$。

(1) $c\in S=\varphi(c)$，按 S 定义，$c\bar{\in}\varphi(c)$，不可能。

(2) $c\bar{\in}S=\varphi(c)$，按 S 定义 $c\in S$，不可能。

由(1)、(2)得，这样的 c 是不存在的。故不存在 A 到 2^A 的双射。本命题得证。

第四节 等价关系与分类

一、集合的直积

1. 有限个集合的直积

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个集合，则定义集合 $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_i\in A_i, i=1,\cdots,n\}$ 为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的直积，记为 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$。这里 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\Longleftrightarrow a_i=b_i, i=1,\cdots,n$。

若 $A_1,\cdots,A_n$ 都是有限集时，有 $|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot\cdots\cdot|A_n|$。

平面 R^2 可看成一维空间 R 的直积，$R^2=R\times R$；空间 R^3 可看成 R 的(三次)直积，$R^3=R\times R\times R$。

2. 运算与合成

把 $A\times A$ 到 A 的映射称为 A 的一个二元运算。类似定义集合的 n 元运算，把 $A_1\times\cdots\times A_n$ 到 A 的映射称为集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 到集合 A 的一个 n 元合成。

Z 是定义二个二元运算(加法和乘法)的集合。数域 K 上线性空间 V 是定义了 V 的一个二元运算(向量加法)和 K,V 到 V 的一个二元合成(数乘)的二个集合 K,V 所成的系统。

3. 任意个集合的直积

推广 1 的情形，记 $\prod\limits_{i\in I}A_i=\{I\xrightarrow{f}\bigcup\limits_{i\in I}A_i\,|\,f(i)\in A_i,\ i\in I\}$ 称为集合 $A_i(i\in I)$ 的直积。

二、集合的二元关系

称 $A\times A$ 的子集 R 为集合 A 的一个二元关系。A 的二个元素 a 和 b 称为有关系 R，当且仅当 $(a,b)\in R$ 时，$(a,b)\in R$ 记为 aRb；$(a,b)\overline{\in}R$，记为 $a\overline{R}b$。

例 1.3 $A=\{a,b,c\}$，$R=\{(a,b),(a,a),(c,c)\}$，则 R 是 A 的一个二元关系，aRb, $b\overline{R}a$, aRa, $b\overline{R}b$ 等。

例 1.4 $A=Z$。

设 $R_1=\{(a,a)\,|\,a\in Z\}$，则 R_1 是 Z 的“相等”关系。

设 $R_2=\{(a,b)\in Z\times Z\,|\,a-b\geqslant 0\}$，则 R_2 是 Z 的“大于，等于”关系。

设 $R_3=\{(a,b)\in Z\times Z\,|\,$存在 $c\in Z$ 使 $b=ac\}$，则 R_3 是 Z 的整除关系。

若 n 是一固定正整数，令 $R_4=\{(a,b)\in Z\times Z\,|\,$存在 $c\in Z$ 使 $b-a=nc\}$，则 R_4 是 Z 的(关于 n)同余关系。

三、等价关系

定义 1.13 集合 A 的一个二元关系 R 称为等价关系，如果

它满足：

(1) 反身性 $\forall a\in A$ 有 aRa；

(2) 对称性 $\forall a,b\in A$，若 aRb，则 bRa；

(3) 传递性 $\forall a,b,c\in A$，若 aRb，且 bRc，则 aRc。

等价关系"R"一般用记号"$\sim$"代替。

Z 的相等关系和同余关系是等价关系。三角形集合的相似关系是等价关系。A 是集合，2^A 中的等势关系是等价关系。

若给了集合 A 的一个等价关系"$\sim$"。$a\in A$，记

$$\bar{a}=\{x\mid x\in A, x\sim a\},$$

则 $\bar{a}$ 是 A 的非空子集，(因 $a\sim a$) 称 $\bar{a}$ 为 A 的一个等价元素类，或 a 所在的等价类。

易验证，$a\in\bar{a}$；若 $b\in\bar{a}$，则 $\bar{b}\subseteq\bar{a}$。

命题 $\forall a,\ b\in A,\ \bar{a}\cap\bar{b}=\phi$ 或 $=\bar{a}=\bar{b}$。

证 若 $\bar{a}\cap\bar{b}\neq\phi$，则存在 $x\in\bar{a}\cap\bar{b}$，故 $a\sim x\sim b$，因而 $a\in\bar{b}$，$\bar{a}\subseteq\bar{b}$，同理 $\bar{b}\subseteq\bar{a}$，所以 $\bar{a}=\bar{b}=\bar{a}\cap\bar{b}$。(证毕)

定义 1.14 A 为一集合，$A_i\in 2^A (i\in I)$。若 $i\neq j$，$A_i\cap A_j=\phi$，且 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=A$，则称 $\{A_i\mid i\in I\}$ 是 A 的一个分类。此时，A 是二二不交(无公共元素)的子集的并。

定理 1.2 若给了集合 A 的一个等价关系，(由上命题)则集合 A 是二二不交的等价类的并，从而给出了 A 的一个分类。

反之，若 $\{A_i\mid i\in I\}$ 是 A 的一个分类，在 A 中定义关系 R：$aRb\Longleftrightarrow$ 存在 $i\in I$ 使 $a,b\in A_i$。则 R 是 A 的一个等价关系。

四、商集合

给了集合 A 的一个等价关系$\sim$，记 $A/\sim=\{\bar{a}\mid a\in A\}$ 为 A 关于$\sim$的商集合。

例 1.5 在 Z 中定义同余关系$\sim$，$a\sim b\Longleftrightarrow 5\mid a-b$。则 $Z/\sim=\{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3},\ \bar{4}\}$。$Z$ 是可数集，而 $Z/\sim$ 是仅含 5 个元素的有限集。

定义 1.15　A 到 $A/\sim$ 的映射 φ: $\varphi(a)=\bar{a}$ 称为 A 到 $A/\sim$ 的自然映射。

设给了集合 A 到集合 B 的一个满射 f。在 A 中定义关系 R: $aRb \Longleftrightarrow f(a)=f(b)$。显然，$R$ 是等价关系。因 $\bar{a}=\bar{b} \Longleftrightarrow f(a)=f(b)$，则 $\varphi(\bar{a})=f(a)$ 是 $A/\sim$ 到 B 的单射。又因 f 是满射，故 φ 是 $A/\sim$ 到 B 的双射。

第五节　序

一、偏序集

定义 1.16　集合 A 的一个关系 R 为偏序关系，如果满足：

(1) 反身性　$\forall a\in A, aRa$;

(2) 反对称性　$\forall a,b\in A$，若 aRb 且 bRa，则 $a=b$;

(3) 传递性　$\forall a,b,c\in A$，若 aRb, bRc，则 aRc。

偏序关系常用"$\leqslant$"来表示。定义了偏序关系的集合为偏序集。

例 1.6　实数集 R 关于"小于或等于"关系成一偏序集。

例 1.7　P 关于"整除"关系成一偏序集。

例 1.8　A 为一集合，则 2^A 关于"$\subseteq$"关系成一偏序集。

定义 1.17　若 $(A,\leqslant)$ 为一偏序集。

(1) A 的元素 m 为最大元，如果 $\forall x\in A$ 有 $x\leqslant m$;

(2) A 的元素 l 为最小元，如果 $\forall x\in A$ 有 $l\leqslant x$;

(3) A 的元素 u 为极大元，如果 $\forall x\in A, u\leqslant x$，必 $u=x$;

(4) A 的元素 v 为极小元，如果 $\forall x\in A, x\leqslant v$，必 $v=x$;

(5) 若 $T\subseteq A, b\in A$，b 为 T 的上界，如果 $\forall x\in T$，有 $x\leqslant b$。而且如果对 $\forall T$ 的上界 c 有 $b\leqslant c$，则称 b 为最小上界;

(6) 若 $T\subseteq A, d\in A$，d 为 T 的下界，如果 $\forall x\in T$，有 $d\leqslant x$。而且若对 $\forall T$ 的下界 e 有 $e\leqslant d$，则称 d 为最大下界。

偏序集 A 不一定有最大(小)元，极大(小)元。A 的子集 T 也