测绘理论中的数学方法

党诵诗　编著

CEHUI LILUN
ZHONG DE
SHUXUE
FANGFA

测绘出版社

测绘理论中的数学方法

党诵诗　编著

测绘出版社

（京）新登字 065 号

内 容 简 介

本书连同《矩阵论及其在测绘中的应用》、《物理大地测量的数学基础》是一套测绘应用数学方面的丛书，它系统介绍了近代测绘理论发展中所需的一些数学方法。本书较多地注意到在数字信号处理中的应用。全书六章，包括傅里叶变换及其应用、沃尔什变换、插值方法、样条理论、张量与黎曼空间、有限元方法。书中的不少内容，在取材上涉及面较为深广一些，在讲法上，也有与其它书中不尽相同之处。

本书适合从事应用数学、信号处理、摄影测量与遥感以及其它有关方面的科研和工程技术人员阅读；也可作为大专院校有关专业的研究生和高年级生的参考用书。

测绘理论中的数学方法

党诵诗　编著

*

测绘出版社出版·发行

北京大兴星海印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所经销

*

开本 850×1168 1/32·印张 9.25·字数 240 千字

1992 年 10 月第一版·1992 年 10 月第一次印刷

印数 0 001—1 500 册·定价 9.00 元

ISBN 7-5030-0529-7/P·201

前　言

本书是编著者继《矩阵论及其在测绘中的应用》、《物理大地测量的数学基础》之后所写的又一本测绘应用数学丛书。这套参考书籍，比较系统地提供了为解决测绘理论问题所需的重要数学方法。

本书六章。第一章是傅里叶变换及其在图像处理中的应用，为此，并介绍了与之有关的广义函数理论的一些基本内容，其中快速变换部分，在讲法上尽量做到与后面一章的快速沃尔什变换互相呼应，例如，在计算格式方面，在用排列阵实现向量分量的编号方面，都是如此。在第二章中，着重考虑用矩阵表示序数不同的沃尔什函数之间的转换规律问题，本章所讲的关于并矢矩阵的性质，其实也都属于这方面的问题。第三、第四章，力图用较高观点讲述插值方法和样条理论的内容，对于所论及的定理，诸如函数乘积的高阶差商定理、Schoenberg-Whitney 定理等，都给出了完整的证明。在这两章中，对某些问题的处理上，与其它书相比，也有不同之点，例如，在用规范样条表示样条的高阶导数时，特别研究了系数的递推公式，这对有关几个定理的证明，带来不少方便。考虑到近代测绘理论发展的需要，最后两章介绍了张量和有限元方法的基础知识。在张量与黎曼空间的内容里，讨论了绝对微分问题，以及用张量分析阐明一些微分几何的问题。

书中的大部分内容，如同前两本书那样，也是编著者近几年来在郑州测绘学院为研究生班和本科高年级班讲授应用数学方面有关课程的讲义，现经补充修改写成此书，但由于水平所限，难免有不妥之处，恳请读者批评和指正。

编著者谨识

1990 年 3 月

目　　录

第一章　傅里叶变换及其应用

傅里叶（Fourier）变换是数学分析的一个重要内容，如所周知，在数学物理方程中，往往要由傅里叶级数给出方程的解，在概率论中，要通过傅里叶积分表示分布函数所对应的特征函数。本章主要论述傅里叶变换及其在数字图像处理中的一些应用，例如，图像的重现、图像的恢复、等等。另外，我们介绍两种数字信号处理中的变换，它和第二章中的沃尔什（Walsh）变换在应用上是一致的。鉴于离散型傅里叶变换的重要性，本章还专门讲了快速傅里叶变换，可以把它和沃尔什变换对照起来理解。

§1　三角级数　谐波

一、三角函数系的正交性

三角级数的一般形状为

$$\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx), \tag{1.1}$$

其中，系数 α_0，α_1，β_1，…，α_k，β_k，…都是与 x 无关的常数，第一项写成 $\frac{1}{2}\alpha_0$ 为的是使得各项系数公式一致。(1.1)式的前 $2n+1$ 项之和

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx), \tag{1.2}$$

叫做 n 阶三角多项式。

显然，(1.1)与(1.2)中的三角级数与三角多项式，都是以

2π 为周期的周期函数。对于一个函数 $f(x)$，今后主要考虑与它有关的一个三角级数，即所谓傅里叶级数。为了计算这个级数的系数，需要用到三角函数系的一些结果。

必须指出，在区间$[-\pi, \pi]$上，三角函数系$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right\}$是标准正交的，$k=1, 2, \cdots$. 或者说，在这函数系中，任何两个不同函数的乘积的积分之值为 0，且任何一个函数的平方的积分之值为 1. 事实上，其根据就是由于下面的等式成立：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\cos kx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin px\sin kx dx=\begin{cases}0; & p\neq k\\ \pi & p=k\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\sin kx dx=0.$$

二、傅里叶级数　复数形式

假设函数 $f(x)$在$[-\pi, \pi]$上能够表示成三角级数，即假设

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{1.3}$$

现在来求系数 a_0、a_k、b_k，在上式两端乘以 $\cos mx$，然后从 $-\pi$ 到 π 积分，注意到三角函数系的正交性，立可得到

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx dx; \tag{1.4}$$

同样，也容易得到

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\, dx. \tag{1.5}$$

$m=1, 2, \cdots$. 公式 (1.4) 也适用于 $m=0$ 的情形。

系数由(1.4)、(1.5)式确定，且出现于(1.3)式右端的三角级数，叫做 $f(x)$的傅里叶级数，一般地说，它们的关系常记为

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \qquad (1.6)$$

n 阶三角多项式

$$f_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (1.7)$$

叫做 $f(x)$ 的 n **阶傅里叶三角多项式。**

等式(1.3)表明，当 $n \to \infty$ 时，$f_n(x)$ 收敛，且收敛于 $f(x)$，或者说，$f(x)$ 可展开为它的傅里叶级数。

设 $j=\sqrt{-1}$. 下面把(1.6)式右端的级数用复数形式表示出来，我们写

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{jkx} + e^{-jkx}), \sin kx = \frac{1}{2j}(e^{jkx} - e^{-jkx}).$$

代入(1.6)式，有

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k - jb_k)e^{jkx} \\ &\qquad + (a_k + jb_k)e^{-jkx}] \\ &\triangleq C_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{jkx} + c_{-k}e^{-jkx}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx}. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

由(1.4)、(1.5)得

$$c_m = \frac{1}{2}(a_m - jb_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jmx}dx, \qquad (1.9)$$

$c_{-m} = \overline{c}_m$，$m=0, 1, 2, \cdots$. (1.8)式的最右端便是 $f(x)$ 的傅里叶级数的复数形式，其中，系数由(1.9)式给出。

在$[-\pi, \pi]$上，当 $f(x)$ 为偶函数时，它的傅里叶系数公式可以简化成

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos mx dx, \quad b_m = 0; \qquad (1.10)$$

当 $f(x)$ 为奇函数时，可以简化成

$$a_m = 0\ ,\ b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin mx dx. \tag{1.11}$$

今就(1.10)式证明如下：因为$f(x)$是偶函数，故$f(x)\cos kx$也是偶函数，即

$$f(-x)\cos m(-x) = f(x)\cos mx,$$

于是，由(1.4)式，得

$$a_m = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos mx dx + \int_0^{\pi} f(x)\cos mx dx\right], \tag{1.12}$$

把右端的第二个积分作变量置换 $x = -u$，有

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos m dx = -\int_{\pi}^{0} f(-u)\cos m(-u) du$$
$$= \int_0^{\pi} f(u)\cos mu du,$$

这就能得出(1.10)的第一式。再注意到$f(x)\sin mx$是一个奇函数，同样可证得$b_m = 0$.

(1.11) 中的两个等式，也是容易证明的。

三、函数展开

关于一个函数能够展开成它的傅里叶级数的条件，有下面的定理：

定理 如果$f(x)$是分段连续函数，且至多有有限个极值点，则$f(x)$的傅里叶级数对任何x都收敛于

$$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)). \tag{1.13}$$

这个定理的条件，又叫做**狄里克莱** (Dirichlet) **条件**，本书省去定理的证明。以下几点请读者注意：(i)所谓分段连续，就是函数$f(x)$至多有有限个第一类间断点x（在这种点处，函数虽然不连续，但存在着左极限$f(x^-)$和右极限$f(x^+)$），显然，

连续性是分段连续性的特殊情形；(ii)所谓至多有有限个极值点，就是可以把函数的定义域分成有限个使 $f(x)$ 为单调的区间，或者说，函数图像至多有有限次振荡；(iii) 如果 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，则在点 $x=\pm\pi$ 处，(1.13) 式成为 $\frac{1}{2}(f(-\pi^+)+f(\pi^-))$。

例 1 展开函数 $f(x)$ 为傅里叶级数（见图 1-1，设 $b\geqslant -a>0$），已知

$$f(x)=\begin{cases}ax; & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ b\ x & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

先计算 $f(x)$ 的傅里叶系数，由(1.4)和(1.5)得

$$a_m=\begin{cases}0; & m\text{为偶数，且不为}0\\ \dfrac{2(a-b)}{\pi m^2} & m\text{为奇数}\end{cases}$$

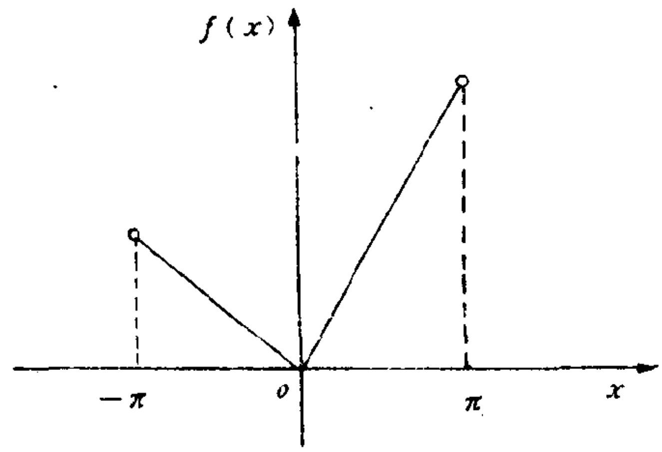

图 1-1

$$b_m=(-1)^{m+1}\frac{a+b}{m}.$$

又，因为 $f(-\pi^+)=-a\pi$，$f(\pi^-)=b\pi$，所以，由定理的结论，有

$$\frac{b-a}{4}\pi-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a+b}{2k}\sin 2kx+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2(a-b)}{\pi(2k-1)^2}\right.$$

$$\left.\cdot\cos(2k-1)x+\frac{a+b}{2k-1}\sin(2k-1)x\right]$$

$$=\begin{cases}f(x); & -\pi<x<\pi\\ \dfrac{b-a}{2}\pi & x=\pm\pi\end{cases}$$

例 2　　证明　$\mathrm{ctg}\, t=\frac{1}{t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2-k^2\pi^2}$.

证　考虑函数 $\cos zx$，把它在 $x\in(-\pi,\ \pi)$内展开为余弦级数。视 z 为参数，则显然有

$$a_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos zx\cos mx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(z+m)x$$

$$+\cos(z-m)x]dx=(-1)^m\frac{2z\sin\pi z}{\pi(z^2-m^2)},$$

$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$. 于是，

$$\cos zx=\frac{2z\sin\pi z}{\pi}\left[\frac{1}{2z^2}+\frac{\cos x}{1^2-z^2}-\frac{\cos 2x}{2^2-z^2}+\frac{\cos 3x}{3^2-z^2}-\cdots\right].$$

令两端的 $x=\pi$，并注意 $\cos m\pi=(-1)^m$，得

$$\mathrm{ctg}\,\pi z=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{k^2-z^2}\right).$$

再取 $z=\frac{t}{\pi}$，经过化简即得所证等式。

在复变函数理论中，通过留数计算的途径，也可推得这个等式。

四、谐波分解

令 $x=\frac{2\pi}{T}t\,\omega$，　$=\frac{2\pi}{T}$(**基频**)，并且记 $f(x)=f(\omega t)=g(t)$，则(1.3)式成为

$$g(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t),\qquad (1.14)$$

这时，由(1.4)、(1.5)式可知

$$\begin{Bmatrix}a_m\\ b_m\end{Bmatrix}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}g(\tau)\begin{Bmatrix}\cos m\omega\tau\\ \sin m\omega\tau\end{Bmatrix}d\tau.$$

把(1.4)写成谐波形式(图 1-2)，有

$$g(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{A_k\cos(k\omega t-\Psi_k)}_{k\text{ 次谐波}}\cdot \tag{1.15}$$

A_k为k次**谐波振幅**，Ψ_k为**初相角**，$\omega_k=k\cdot\frac{\omega}{2\pi}=k\cdot\frac{1}{T}$为**频率**。

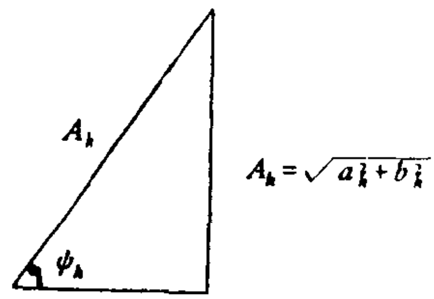

图 1-2

在(1.14)中，当$x\in[-\pi,\ \pi]$时，$t\in\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$，且容易看出，如果$f(x)$是以$2\pi$为周期的，$g(t)$就是以$T$为周期的。由(1.8)式，若把(1.14)表示成复数形式，并且记$e^x=\exp x$，则

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\exp(jk\omega t), \tag{1.16}$$

其中，系数（频谱系数）

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}g(\tau)\exp(-jk\omega\tau)d\tau. \tag{1.17}$$

例 3　设$a\leqslant\frac{T}{2}$. 试按傅里叶级数展开以T为周期的周期函数（**矩形脉冲**）

$$h(t)=\begin{cases}A; & |t|\leqslant a\\ 0 & |t|>a\end{cases}$$

解　注意到$a\leqslant\frac{T}{2}$，先求傅里叶系数，得

$$a_m=\frac{2}{T}\int_0^a A\cos m\omega\tau d\tau=\frac{2A}{Tm\omega}\sin m\omega a,$$

$a_0=\frac{2aA}{T}$，$b_m=0$. 于是，有$\left(\omega=\frac{2\pi}{T}\right)$

$$h(t)=\frac{aA}{T}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2A}{Tk\omega}\sin k\omega a\cos k\omega t. \qquad (1.18)$$

图像数据的加工处理，主要涉及到二维的傅里叶变换，这里先介绍一下二维的傅里叶级数。假设函数 $g(t_1, t_2)$在矩形区域 $D=\left\{(t_1,t_2);\ t_i\in\left[-\frac{T_i}{2},\ \frac{T_i}{2}\right]\right\}$上能够表示成傅里叶级数（二重傅里叶级数），仿照(1.16)式，就是

$$g(t_1,\ t_2)=\sum_{k_i=-\infty}^{\infty}c_{k_1k_2}\exp[j(k_1\omega_1t+k_2\omega_2t_2)]. \qquad (1.19)$$

$\omega_i=\frac{2\pi}{T_i}$，$i=1$，2. 系数

$$c_{k_1k_2}=\frac{1}{T_1T_2}\iint_D g(\tau_1,\ \tau_2)\exp[j(k_1\omega_1\tau_1 +k_2\omega_2\tau_2)]d\tau_1d\tau_2. \qquad (1.20)$$

五、均方差 Plancherel 等式

固定 n，由前面看出，对于每一组数$\{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \cdots,\alpha_n,\ \beta_n\}$，可以作一个 n 阶三角多项式

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx).$$

我们说，$\varphi_n(x)$的全体形成一个线性空间，这个空间常用

$$\mathscr{S}_n=span\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx\}$$

表示，$\mathscr{S}_n$实际上就是由基底(基)1，$\cos x$，$\sin x$，…，$\cos nx$，$\sin nx$ 张成的空间。据第一大段所述，这组基底是正交的，即 $(\cos px,\ \sin kx)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\sin kx dx=0$ 以及

$$(\cos px,\ \cos kx)=0=(\sin px,\ \sin kx),\quad p\neq k.$$

如同过去所讲的空间 $L_2=L_2[-\pi,\ \pi]$一样，(f,g)表示在$[-\pi,$