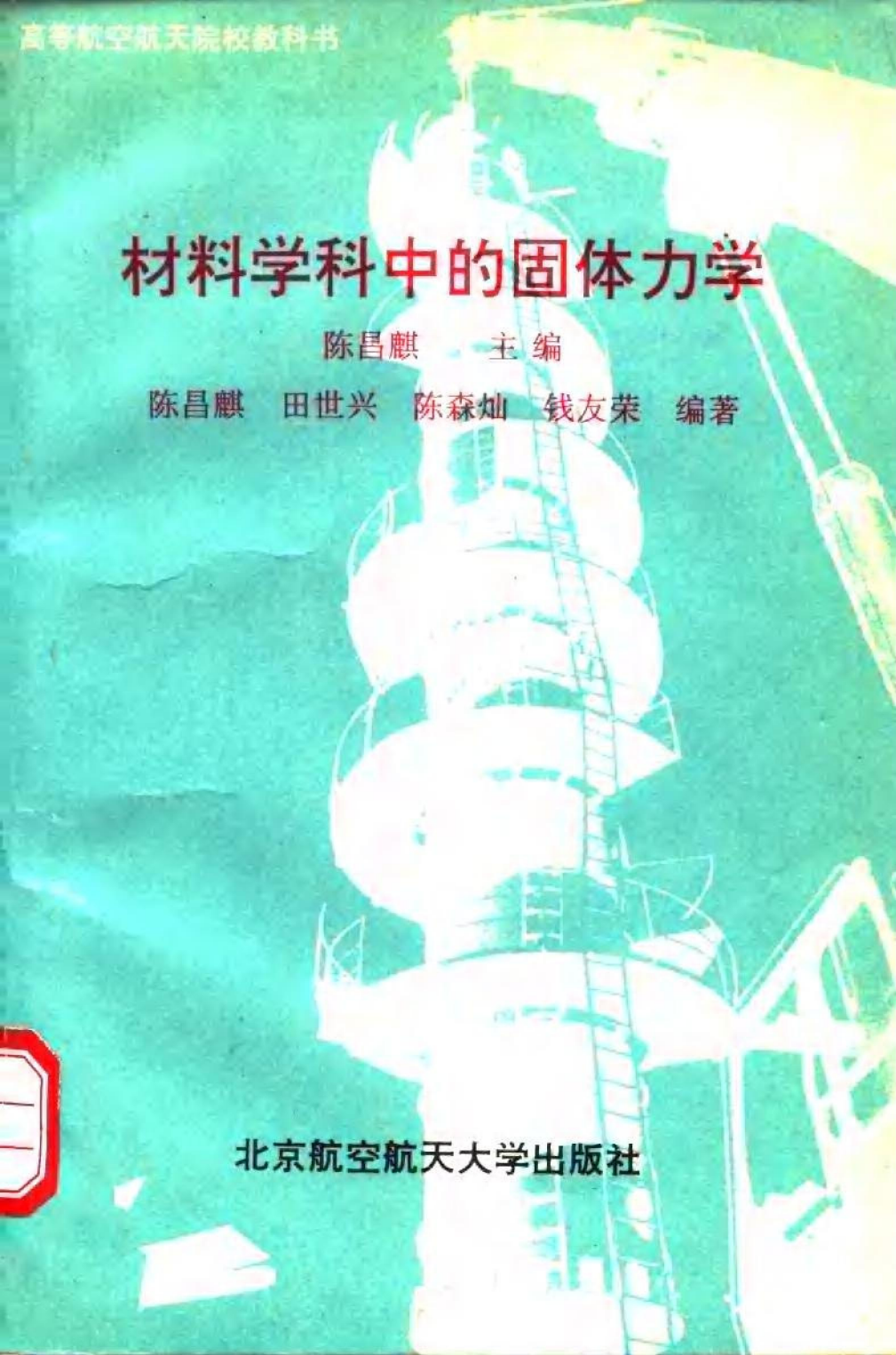




高等航空航天院校教科书

# 材料学科中的固体力学

陈昌麒 主 编

陈昌麒 田世兴 陈森灿 钱友荣 编著

北京航空航天大学出版社

TJ1172/16

# 材料学科中的固体力学

陈昌麒 主编

陈昌麒 田世兴 陈森灿 钱友荣 编著



北京航空航天大学出版社

(京)新登字 166 号

## 内 容 简 介

本书是针对材料学科的需要而编写的一本固体力学书。内容以讨论固体力学的基本原理和方法为主。

本书共十二章。第一、二章是应力和应变分析基础;第三、四章是弹性理论基础,主要讨论线弹性理论;第五、六、七章是塑性理论基础;后五章则是专门针对材料学科的需要,讲述粘弹性、线弹性断裂力学基础、热应力、残余应力及有限元法。本书的编写特点是:着重物理概念,公式推导则力求详细以适应自学;取材尽量依材料学科中的需要,举例也尽量选用材料学科中的有关问题,例如位错、相变、性能、加工等。

本书可作为材料学科以及机械类学科的研究生的固体力学教材,也可供材料学科的科技工作者及大学本科高年级学生参考。

## 材料学科中的固体力学

CAILIAO XUEKE ZHONG de GUTI LIXUE

陈昌麒 主编

陈昌麒 田世兴 陈森灿 钱友荣 编著

责任编辑 陶金福

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

朝阳科普印刷厂印刷

\*

850×1168 1/32 印张:13 字数:345 千字

1994 年 6 月第一版 1994 年 6 月第一次印刷 印数:1500 册

ISBN 7-81012-460-9/O·028 定价:7.65 元

## 序 言

本书是为从事材料学科工作的科技工作者编写的固体力学书。在弹性理论、塑性理论或一般固体力学方面,国内外已出版了很多好书。我们所以还编写这本书,是考虑到那些书都有些不太合乎从事材料学科研究的工作者的需要。为力学工作者编的书,大部分篇幅过大,理论部分过多,学科性强而应用部分较弱。为结构强度工作者编的书,主要讨论结构强度方面的内容,侧重方面不全符合材料工作者的需要。

本书可作为材料学科的研究生的固体力学教材,也可供材料学科的科技人员自学之用。内容以讨论固体力学的基本原理和方法为主。着重物理概念、公式推导则力求详细以适应自学。取材尽量依材料学科中的应用需要,举例也尽量选用材料学科中的有关问题,例如位错、相变、性能、加工等。但是,本书主要目的是讨论固体力学的基本原理和方法,没有企图去包括有关专业内容。

本书共有十二章。第一、二两章是应力和应变分析基础。这部分内容适用于任何连续体。第三、四两章是弹性理论基础,主要讨论线弹性理论。其中第四章 § 9~§ 12 各节比较专门,供选用。第五、六、七三章讨论塑性理论基础。第八至十二章均为专门问题,供选用。

作为最低限度的弹性力学课程,可用本书第一至第四章,并可略去第四章中 § 9~§ 12 各节。作为最低限度的弹塑性力学课程,可用本书第一至第七章,也可略去第四章的 § 9~§ 12 各节。选用本书第九章,可作为线弹性断裂力学基础,但必须选用本书第四章 § 9~§ 12 各节。第八章讨论了粘弹性理论的基础。第十和十一章分别讨论了材料学科中十分重要的热应力和残余应力问题。第十二章介绍了有限元法。

本书只要求读者具备一般工科大学的数学基础和材料力学知

识。在本书中并行使用工程符号和张量符号,这不仅为了使公式的形式紧凑,更重要的是为读者阅读有关文献和书刊时比较方便。但本书不用张量运算,不要求读者事先具备张量分析知识。

本书的前身是陈昌麒和田世兴在北京航空航天大学材料科学与工程系为研究生讲授有关课程而编写的教材——《材料学科中的固体力学方法》。该教材于1983年2月印刷出版后得到各方面的欢迎。后由全国金属材料及热处理专业研究生培养工作研究会选为统编教材。又经几校有关教师共同讨论教学大纲,提交全国金属材料及热处理专业研究生培养工作研究会讨论审定。本书由北京航空航天大学陈昌麒、田世兴、钱友荣和清华大学陈森灿共同编写,由陈昌麒负责主编及统一工作。书中第十二章有限元法是特请北京航空航天大学姜伟之编写的。本书的基本部分,尽量保持了原教材的风格。第九至第十二章则为新编内容。本书在编写过程中参阅过很多有关书刊,并考虑了老师和同学的各种宝贵意见。但由于编者,特别是作为主编的我,水平有限,错误或不确切之处,请读者提出,以便以后修改。

编者十分感谢全国金属材料及热处理专业研究生培养工作研究会对本书的关心和支持,特别要感谢研究会的理事长雷廷权教授和秘书长邓宗钢教授的热情支持。

编者非常感谢北京航空航天大学对本书出版给予的经济上的资助。否则,本书是不可能和读者见面的。

本书责任编辑陶金福同志为本书的编辑和文字加工付出了辛勤劳动,编者在此特表示深深谢意。

陈 昌 麒  
北京航空航天大学  
材料科学与工程系

1993年8月

# 目 录

## 序言

## 引论

## 第一章 应力状态分析

|                             |      |
|-----------------------------|------|
| § 1.1 应力和应力分量 .....         | (2)  |
| 1. 应力 .....                 | (3)  |
| 2. 应力分量 .....               | (4)  |
| § 1.2 张量符号与求和约定 .....       | (6)  |
| § 1.3 平衡微分方程和剪应力互等定律 .....  | (8)  |
| 1. 平衡微分方程 .....             | (8)  |
| 2. 剪应力互等定律 .....            | (11) |
| § 1.4 任意斜面上的应力和应力边界条件 ..... | (12) |
| 1. 任意斜面上的应力 .....           | (12) |
| 2. 应力边界条件 .....             | (15) |
| § 1.5 一点的应力状态和应力张量 .....    | (16) |
| 1. 一点的应力状态 .....            | (16) |
| 2. 应力张量 .....               | (16) |
| 3. 应力分量的坐标变换 .....          | (17) |
| § 1.6 主应力和应力张量的不变量 .....    | (20) |
| 1. 主应力和主方向 .....            | (20) |
| 2. 应力张量的不变量 .....           | (22) |
| 3. 用主应力表示任意斜面上的应力 .....     | (23) |

|                                           |      |
|-------------------------------------------|------|
| § 1.7 球形应力张量和应力偏量张量.....                  | (24) |
| 1. 球形应力张量和应力偏量张量 .....                    | (24) |
| 2. 应力偏量张量的不变量 .....                       | (26) |
| 3. 球形应力张量和应力偏量张量与变形的关系 .....              | (26) |
| § 1.8 八面体应力和有效应力.....                     | (28) |
| 1. 八面体应力 .....                            | (28) |
| 2. 有效应力 .....                             | (30) |
| § 1.9 主剪应力与最大剪应力.....                     | (31) |
| § 1.10 应力状态与应力圆 .....                     | (33) |
| 1. 平面应力状态与应力圆 .....                       | (33) |
| 2. 三维应力状态与应力圆 .....                       | (37) |
| § 1.11 柱面坐标系和球面坐标系中的应力分量<br>和平衡微分方程 ..... | (39) |
| 1. 柱面坐标系 .....                            | (39) |
| 2. 球面坐标系 .....                            | (41) |
| 习 题 .....                                 | (42) |

## 第二章 应变状态分析

|                         |      |
|-------------------------|------|
| § 2.1 位移、应变及几何方程 .....  | (45) |
| 1. 位移和应变 .....          | (45) |
| 2. 几何方程 .....           | (47) |
| § 2.2 应变协调方程.....       | (51) |
| § 2.3 一点的应变状态和应变张量..... | (54) |
| 1. 任意方向的正应变 .....       | (54) |
| 2. 任意两个方向间夹角的改变 .....   | (57) |
| 3. 一点的应变状态和应变张量 .....   | (59) |
| 4. 应变分量的坐标变换 .....      | (60) |
| § 2.4 主应变和应变张量的不变量..... | (62) |
| § 2.5 体积应变.....         | (64) |

|        |                   |      |
|--------|-------------------|------|
| § 2.6  | 球形应变张量和应变偏量张量     | (65) |
| § 2.7  | 主剪应变与最大剪应变        | (66) |
| § 2.8  | 八面体应变和有效剪应变       | (67) |
| § 2.9  | 应变速率张量和应变增量张量     | (68) |
| 1.     | 应变速率张量            | (69) |
| 2.     | 应变增量张量            | (71) |
| § 2.10 | 柱面坐标系和球面坐标系中的几何方程 | (72) |
| 习 题    |                   | (73) |

### 第三章 弹性应力-应变关系和弹性问题的求解

|       |                     |      |
|-------|---------------------|------|
| § 3.1 | 广义虎克定律              | (76) |
| 1.    | 广义虎克定律              | (77) |
| 2.    | 各向同性条件下的广义虎克定律      | (78) |
| 3.    | 体积虎克定律              | (80) |
| 4.    | 用应变表示应力的广义虎克定律      | (80) |
| § 3.2 | 弹性应变能               | (81) |
| 1.    | 弹性应变能密度             | (82) |
| 2.    | 体积变化应变能密度与形状变化应变能密度 | (84) |
| § 3.3 | 虚功原理(虚位移原理)         | (86) |
| § 3.4 | 最小总势能原理             | (88) |
| § 3.5 | 弹性问题的求解             | (89) |
| 1.    | 未知量与基本方程            | (90) |
| 2.    | 边界条件与求解方法           | (91) |
| 3.    | 解的存在性和唯一性           | (92) |
| 4.    | 位移法解弹性问题            | (92) |
| 5.    | 应力法解弹性问题            | (95) |
| 6.    | 半逆解法和逆解法            | (96) |
| § 3.6 | 圣文南原理               | (97) |
| § 3.7 | 线性叠加原理              | (99) |



|                                |       |
|--------------------------------|-------|
| § 3.8 矩形截面梁的纯弯曲 .....          | (101) |
| 1. 梁内任意一点的应力 .....             | (101) |
| 2. 梁内任意一点的应变 .....             | (103) |
| 3. 梁内任意一点的位移 .....             | (103) |
| 4. 验证材料力学的假设 .....             | (108) |
| 5. 横截面形状的变化 .....              | (109) |
| § 3.9 螺位错的应力场 .....            | (110) |
| 1. 螺位错的弹性体模型 .....             | (110) |
| 2. 螺位错的应力场 .....               | (110) |
| § 1.10 错配球引起的应力场、应变场和应变能 ..... | (113) |
| 习 题 .....                      | (116) |

#### 第四章 弹性平面问题

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| § 4.1 平面应力和平面应变 .....      | (117) |
| 1. 平面应力 .....              | (117) |
| 2. 平面应变 .....              | (119) |
| § 4.2 平面问题的基本方程和边界条件 ..... | (122) |
| § 4.3 平面问题的求解 .....        | (124) |
| 1. 位移法解平面问题 .....          | (124) |
| 2. 应力法解平面问题 .....          | (126) |
| 3. 应力函数 .....              | (128) |
| 4. 半逆解法和逆解法 .....          | (129) |
| § 4.4 极坐标系中的平面问题 .....     | (132) |
| 1. 极坐标系中的平衡微分方程 .....      | (133) |
| 2. 极坐标系中的几何方程 .....        | (135) |
| 3. 极坐标系中的广义虎克定律 .....      | (138) |
| 4. 极坐标系中的应力函数和应变协调方程 ..... | (139) |
| § 4.5 刃位错的应力场 .....        | (143) |
| 1. 刃位错的弹性体模型 .....         | (143) |

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| 2. 刃位错的应力场 .....           | (144) |
| § 4.6 位错与溶质原子的弹性交互作用 ..... | (146) |
| § 4.7 轴对称问题,厚壁筒均匀受压 .....  | (147) |
| 1. 轴对称问题 .....             | (147) |
| 2. 厚壁筒均匀受压 .....           | (150) |
| § 4.8 圆孔对板中应力分布的影响 .....   | (153) |
| § 4.9 复变函数法 .....          | (159) |
| 1. 解析函数 .....              | (159) |
| 2. 应力函数 .....              | (162) |
| 3. 应力分量 .....              | (164) |
| 4. 位移分量 .....              | (165) |
| § 4.10 曲线坐标系中的平面问题 .....   | (168) |
| 1. 曲线坐标系 .....             | (168) |
| 2. 应力分量和位移分量 .....         | (171) |
| § 4.11 各向均匀拉伸板中的椭圆孔 .....  | (173) |
| § 4.12 单向拉伸板中的椭圆孔 .....    | (178) |
| 习 题 .....                  | (179) |

## 第五章 屈服准则和应变强化

|                                 |       |
|---------------------------------|-------|
| § 5.1 屈服条件 .....                | (183) |
| § 5.2 主应力空间中的屈服面 .....          | (185) |
| § 5.3 两个常用的屈服准则 .....           | (188) |
| 1. Tresca 屈服准则 .....            | (189) |
| 2. Mises 屈服准则 .....             | (191) |
| 3. Tresca 和 Mises 屈服准则的比较 ..... | (194) |
| § 5.4 应变强化 .....                | (197) |
| § 5.5 梁的弹塑性弯曲 .....             | (199) |
| 习 题 .....                       | (203) |

第六章 弹塑性应力-应变关系

§ 6.1 弹塑性应力-应变关系的特点及几种理想模型 ..... (205)

§ 6.2 增量理论 ..... (209)

1. Reuss 假定 ..... (209)

2. Prandtl-Reuss 方程 ..... (211)

3. Levy-Mises 方程 ..... (212)

4. 讨论 ..... (213)

§ 6.3 全量理论 ..... (214)

1. Hencky 方程 ..... (214)

2. 讨论 ..... (214)

§ 6.4 圆轴的弹塑性扭转 ..... (215)

1. 弹性扭转分析 ..... (215)

2. 弹塑性扭转分析 ..... (216)

习 题 ..... (220)

第七章 塑性平面应变问题与滑移线场理论

§ 7.1 理想刚塑性材料的平面应变问题 ..... (221)

1. 应力状态和屈服条件 ..... (221)

2. 基本方程 ..... (223)

§ 7.2 最大剪应力线及其方向 ..... (224)

§ 7.3 滑移线及其微分方程 ..... (226)

§ 7.4 滑移线与特征线 ..... (227)

§ 7.5 Hencky 应力方程 ..... (231)

§ 7.6 滑移线的基本性质 ..... (233)

1. 沿线性质 ..... (233)

2. 跨线性质 ..... (235)

3. 纯几何性质 ..... (236)

§ 7.7 简单应力状态的滑移线场 ..... (238)

§ 7.8 应力边界条件 ..... (240)

|                      |                                                                |       |
|----------------------|----------------------------------------------------------------|-------|
| § 7.9                | 刚性平冲头压入半无限体 .....                                              | (243) |
| § 7.10               | 不同类型切口板拉伸 .....                                                | (247) |
| 1.                   | 双边裂纹板拉伸 .....                                                  | (247) |
| 2.                   | 对称 V 型深切口板拉伸 .....                                             | (248) |
| 3.                   | 对称圆缺口板拉伸 .....                                                 | (249) |
| 习 题                  | .....                                                          | (250) |
| <b>第八章 粘弹性理论基础</b>   |                                                                |       |
| § 8.1                | 线性粘弹性的力学模型 .....                                               | (252) |
| § 8.2                | Maxwell 固体的力学行为 .....                                          | (254) |
| 1.                   | 应力松弛 .....                                                     | (255) |
| 2.                   | 蠕变(应变松弛) .....                                                 | (256) |
| § 8.3                | Kelvin 固体的力学行为 .....                                           | (257) |
| § 8.4                | 标准线性固体的力学行为 .....                                              | (258) |
| 1.                   | 应力松弛 .....                                                     | (259) |
| 2.                   | 蠕变(应变松弛) .....                                                 | (260) |
| 3.                   | 常数 $\tau_\sigma$ 、 $\tau_\epsilon$ 、 $M_R$ 和 $M_u$ 之间的关系 ..... | (260) |
| § 8.5                | 粘弹性固体的动态力学行为 .....                                             | (261) |
| § 8.6                | 标准线性固体的动态力学行为 .....                                            | (264) |
| <b>第九章 线弹性断裂力学基础</b> |                                                                |       |
| § 9.1                | 裂纹的三种类型 .....                                                  | (266) |
| § 9.2                | I 型裂纹尖端弹性应力场 .....                                             | (267) |
| 1.                   | Westergaard 解 .....                                            | (268) |
| 2.                   | 解析函数 $Z_I$ 的确定 .....                                           | (269) |
| 3.                   | 裂纹尖端区域的弹性应力场和应力强度因子 .....                                      | (270) |
| 4.                   | 裂纹面位移 .....                                                    | (272) |
| § 9.3                | II 型和 III 型裂纹尖端附近应力场 .....                                     | (273) |
| 1.                   | II 型裂纹 .....                                                   | (273) |
| 2.                   | III 型裂纹 .....                                                  | (275) |

|                                    |       |
|------------------------------------|-------|
| § 9.4 应力强度因子的确定 .....              | (277) |
| 1. 承受拉伸载荷的无限大板问题 .....             | (278) |
| 2. 无限大板含中心裂纹并承受作用于裂纹面上的楔力<br>..... | (280) |
| 3. 有限宽度板含中心裂纹并承受单向拉伸载荷 .....       | (282) |
| 4. 表面裂纹和内埋裂纹问题 .....               | (282) |
| § 9.5 裂纹尖端塑性区 .....                | (285) |
| 1. 裂纹尖端塑性区尺寸和形状 .....              | (285) |
| 2. 考虑应力松弛后的塑性区尺寸 .....             | (288) |
| 3. 有效裂纹尺寸和 $K_I$ 值的塑性区修正 .....     | (289) |
| 4. 裂纹尖端张开位移 .....                  | (291) |
| 5. “小范围”屈服条件 .....                 | (292) |
| § 9.6 脆性断裂判据 .....                 | (293) |
| § 9.7 能量释放率断裂理论 .....              | (296) |
| 1. Griffith 理论 .....               | (296) |
| 2. 能量释放率参量及其断裂判据 .....             | (298) |
| 3. $G_I$ 与 $K_I$ 间之关系 .....        | (300) |

## 第十章 热应力

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| § 10.1 热应力的产生 .....       | (303) |
| § 10.2 温度分布 .....         | (305) |
| 1. 热传导基本微分方程 .....        | (305) |
| 2. 边界条件 .....             | (306) |
| 3. 温度分布问题的例子 .....        | (307) |
| § 10.3 弹性热应力基本方程 .....    | (309) |
| 1. 应力-应变关系 .....          | (309) |
| 2. 平面热弹性问题 .....          | (310) |
| 3. 极坐标中的轴对称平面热弹性问题 .....  | (312) |
| § 10.4 弹性热应力问题的若干例子 ..... | (313) |

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| § 10.5 热处理淬火过程中的热应力····· | (320) |
|--------------------------|-------|

## 第十一章 残余应力

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| § 11.1 残余应力的产生·····        | (322) |
| 1. 机械作用造成不均匀塑性变形·····      | (323) |
| 2. 热应力造成不均匀塑性变形·····       | (324) |
| 3. 不均匀相变·····              | (324) |
| 4. 化学变化·····               | (324) |
| § 11.2 残余应力的自平衡·····       | (325) |
| § 11.3 残余应力的机械测定方法·····    | (329) |
| 1. 圆筒残余应力的逐层剥除测定法·····     | (329) |
| 2. 矩形截面梁中残余应力的剥层测定法·····   | (333) |
| § 11.4 不均匀塑性变形造成的残余应力····· | (336) |
| 1. 拉伸加载和卸载的应力-应变关系 ·····   | (336) |
| 2. 弹塑性纯弯曲梁中的残余应力·····      | (338) |
| 3. 裂纹尖端的反向塑性区·····         | (341) |
| 4. 造成表面残余压应力的特殊处理·····     | (342) |
| § 11.5 热应力造成的残余应力·····     | (344) |
| § 11.6 不均匀相变造成的残余应力·····   | (347) |
| 1. 钢棒淬火的相变应力·····          | (347) |
| 2. 表面淬火的相变残余应力·····        | (348) |
| 3. 渗碳淬火产生的残余应力·····        | (351) |
| 4. 残余应力对相变动力学的影响·····      | (352) |

## 第十二章 平面问题的有限元法

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| § 12.1 有限元法概述·····    | (354) |
| § 12.2 连续弹性体的离散化····· | (355) |
| 1. 单元分割·····          | (355) |
| 2. 载荷移置·····          | (356) |
| 3. 约束简化·····          | (357) |

|        |                    |       |
|--------|--------------------|-------|
| § 12.3 | 单元位移函数             | (357) |
| 1.     | 位移函数的设选            | (357) |
| 2.     | 待定系数的确定            | (358) |
| 3.     | 单元面积计算             | (362) |
| § 12.4 | 单元载荷移置             | (363) |
| 1.     | 载荷移置原则             | (363) |
| 2.     | 载荷移置示例             | (364) |
| § 12.5 | 单元应力矩阵             | (371) |
| 1.     | 单元应变               | (371) |
| 2.     | 单元应力               | (372) |
| § 12.6 | 单元刚度矩阵             | (373) |
| 1.     | 节点力与节点位移的关系        | (373) |
| 2.     | 单元刚度矩阵的计算          | (376) |
| 3.     | 单元刚度矩阵的物理意义        | (377) |
| 4.     | 单元刚度矩阵的性质          | (378) |
| § 12.7 | 总体刚度矩阵             | (379) |
| 1.     | 节点平衡方程             | (379) |
| 2.     | 总体刚度矩阵的形成          | (384) |
| 3.     | 总体刚度矩阵的性质          | (385) |
| 4.     | 零位移约束处理            | (386) |
| § 12.8 | 平面弹性问题有限元法的小结和一个示例 | (386) |
| 习 题    |                    | (395) |

## 参考文献

# 引 论

实际材料都具有复杂的内部结构和复杂的力学行为。但是在很多情况下,往往可以根据所研究的问题的特点,采用理想化的模型来简化。弹性、塑性、粘弹性等均是一种理想化的模型。

固体力学研究固体的力学行为,所研究的固体都是不同程度上的理想化的固体。经典的固体力学处理的是连续的、均匀的和各向同性的固体。目前的发展方向是处理不连续的、不均匀的和各向异性的固体。当然,对不连续性、不均匀性和各向异性的固体也只有在一定程度上进行理想化后才能进行定量处理。这种理想化的程度由所需研究的问题要求的精度而定。

力学问题可以是静态的(与时间无关的),和动态的(与时间有关的)。实际问题本质上都是动态的,但很多问题可当作静态或准静态问题来处理。

本书限于讨论经典的固体力学,主要是弹性和塑性,而且限于讨论静态问题。这些都是讨论更复杂的问题的基础,也是固体力学中最成熟的部分。

当固体力学的基本原理和特定的材料更紧密地结合起来时就形成一些专门的分支,如复合材料力学等。本书不讨论这样专门的问题。



# 第一章 应力状态分析

本章讨论连续体在空间力系的作用下,其中任意一点的应力状态、平衡微分方程以及应力边界条件等有关内容。讨论将主要在空间直角坐标系中进行,只在本章最后给出在柱面和球面坐标系中的形式。

本章的内容不仅适用于固体,而且适用于任何连续体。

## § 1.1 应力和应力分量

外力可能以两种方式作用到物体上。一种是外力直接对物体中每个质点起作用,即外力分布在物体的体积内;这种类型的外力的特点是它与物体的质量成正比,例如重力、磁力及运动物体的惯性力等就是以这种方式起作用的;这种类型的外力称为体积力,简称体力。另一种是外力只直接作用在物体的表面上,它可能是集中载荷也可能是分布载荷,然后再传递给整个物体;这种类型的外力称为表面力,简称面力。

在讨论应力和应变状态时,均将物体视为各向同性的均匀连续体,这将给数学处理带来很大方便。

本书中,单位体积内的体力用  $F$  表示,其在空间直角坐标系中的三个坐标轴  $x, y, z$  上的分量为  $F_x, F_y, F_z$ 。空间直角坐标系的三个坐标轴  $x, y, z$  也可以写成  $x_1, x_2, x_3$ , 其一般项可写成  $x_i, i=1, 2, 3$ , 甚至还可以简单地以 1、2、3 表示这三个坐标系。因而体力  $F$  在直角坐标系中的三个分量  $F_x, F_y, F_z$  也可以相应地写成  $F_1, F_2, F_3$ , 其一般项也可写成  $F_i, i=1, 2, 3$ 。