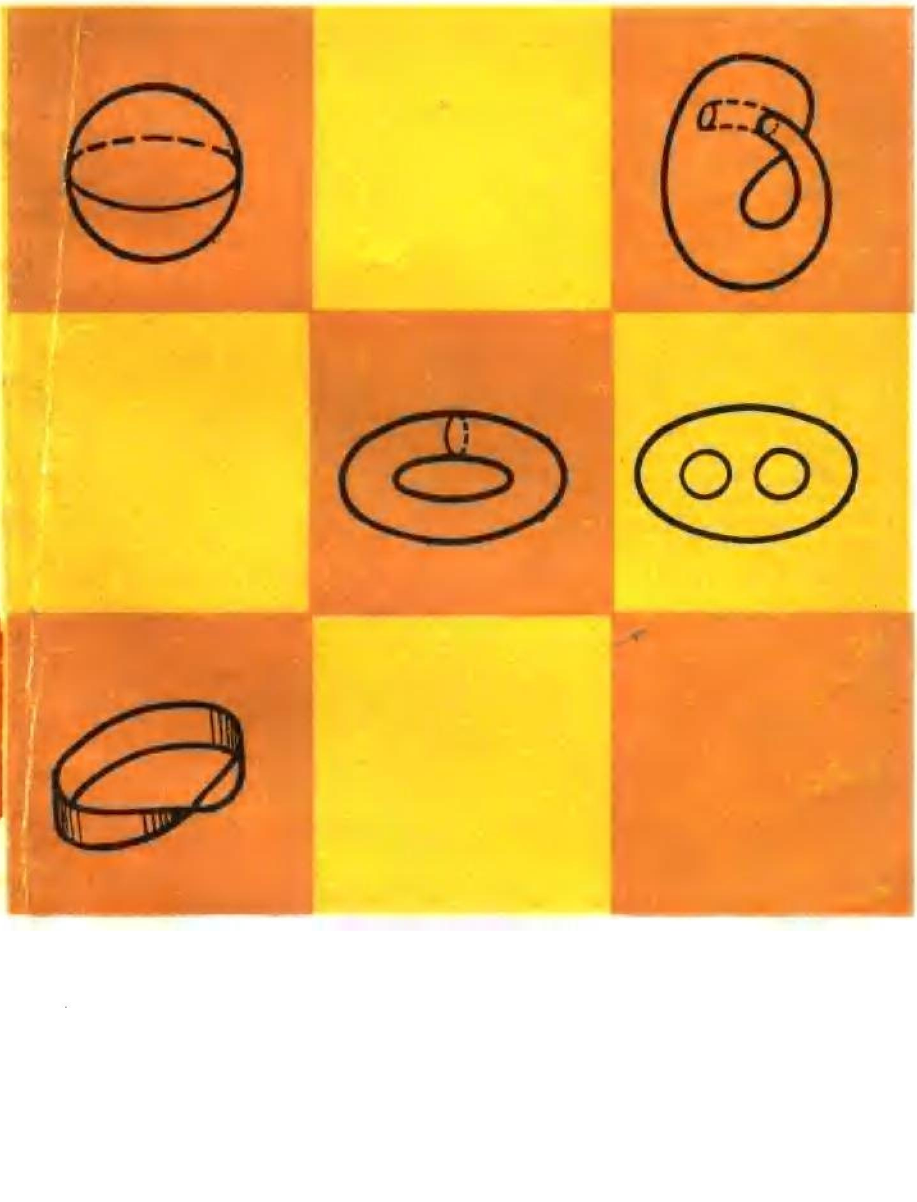
拓扑学与几何学基础讲义

I. M. 辛格　J. A. 索普　著　干丹岩　译

上海科学技术出版社



拓扑学与几何学基础讲义

I. M. 辛格
J. A. 索普 著
干丹岩 译

上海科学技术出版社

LECTURE NOTES ON ELEMENTARY TOPOLOGY AND GEOMETRY

I. M. Singer

J. A. Thorpe

Springer-Verlag 1967

拓扑学与几何学基础讲义

I. M. 辛格
J. A. 索普 著

干丹岩 译

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本850×1156 1/32 印张 8.5 字数225,000
1985年11月第1版 1985年11月第1次印刷
印数：1— 6,900

统一书号：13119·1269 定价：2.10元

原　　序

目前一个普通大学数学专业的学生会发现，数学被严重地分割化了．他们学过微积分之后，接着学一门分析课程和一门代数课程．然后按照他们自己的或者他系里的兴趣，再修几门专业课．如果他学拓扑学，通常就学简易的点集拓扑学；如果他学几何学，通常就学经典微分几何学．然而诸如数学内部有某种统一性，各个领域相互交叠以及一个领域中的方法在另一个领域中有其应用这样一些会使人惊叹不已的发现，在大学学习阶段就领略不到．必须等到他有幸读研究生课程时才懂得其间的联系．我想这是因为在这以前他们未能充分了解的缘故．

这份讲义至少在拓扑-几何方面试图破除这种分割化，它用代数和高等微积分中的知识来证明与几何学、拓扑学和群论都相关的某些相当深刻的结果．(de Rham 定理、曲面的 Gauss-Bonnet 定理、覆盖空间的基本群的函子关系以及作为齐性空间的常曲率曲面等，都是这些结果中最值得注意的例子．)

本书头两章给出了初等点集拓扑学中最起码的知识要点，并提示了它在泛函分析中的某些应用．第三、四两章讨论基本群、覆盖空间和单纯复形．关于这一部分的处理方法，作者向 E. Spanier 表示感谢．经过第五章中关于流形理论的若干准备之后，我们在第六章中采用 H. Whitney 所著《Geometric Integration Theory》一书中的方法证明了 de Rham 定理．在关于 Riemann 几何的最后两章中，作者遵循了 E. Cartan 和陈省身的处理方法．(为了在最后两章中回避李群理论，我们只限于讨论有向的二维流形．)

这份讲义曾在麻省理工学院作为拓扑学和几何学的一学年课程使用过，它要求学生至少读过一学期近世代数和一学期高等微积分．这个班大约有七十名学生，大多数是高年级生．开设这样

一个课程的想法是本书作者之一在美国数学协会大学数学教学计划委员会 (Committee on the Undergraduate Program in Mathematics of the Mathematical Association of America) 任职期间产生的. 在大学数学教学计划委员会的小册子«Pregraduate Preparation of Research Mathematicians»(1963), 特别是这本小册子的"大纲 III: 曲面理论(pp. 68~70)"中, 可以隐约看到关于这门课程的一个大致计划. 此外, 本书的两位作者都相信: 在一个不用教科书的大班讲演中, 这份讲义的材料大概是足够一学年之用的。

译　序

把数学的各个分支孤立起来进行研究，这样一种传统作法已经受到现代数学最新发展的冲击．越来越多的人认识到，数学各分支之间的内在联系和统一性对数学的当代发展具有极重要的意义．因此，数学家们普遍要求掌握现代数学的基本成就，以便在自己的研究工作中予以运用．

由 H. Poincaré 于上世纪末开创的代数拓扑学，在本世纪得到了巨大的发展．Poincaré 当初研究的几何对象，主要是微分流形．微分流形是光滑曲线和光滑曲面的自然推广．在微分流形上不仅有拓扑结构，而且有微分结构，因而可以建立微积分学．所以，微分流形不仅是拓扑学研究中最有意义的对象，也是几何学与分析学活动的理想的舞台．

在本世纪前五十年中，在代数拓扑学大发展的基础上迅速成长起一门新的学科——微分拓扑学，即研究微分流形及微分映射的拓扑学．其后，微分流形的理论广泛地渗入到许多学科之中．到了六十年代，由于巧妙地将几何拓扑方法与分析方法结合起来成功地解决了一系列深刻的问题，而宣告了整体分析学的诞生．其中最引人瞩目的成果是所谓 Atiyah-Singer 指标定理，被誉为近二十年来世界数学最重大的成就之一．

M. F. Atiyah 因此荣获了 Fields 奖．他的合作者 I. M. Singer 就是我所译出的这本书的第一位作者．

I. M. Singer 和 J. A. Thorpe 合著的这本《拓扑学与几何学基础讲义》有许多特色．第一，取材丰富．在只有大约二十多万字的篇幅中，包括了点集拓扑学初步，代数拓扑学中的基本群(即一维同伦群)与覆盖空间，单纯复形上的同调与上同调群，微分流形的基本概念，流形上的微积分学及 de Rham 定理；还包括微分几何学中曲面的 Gauss-Bonnet 定理和关于常曲率曲面的深入讨

论．第二，深入浅出．处理的方法既便于初学者接受，又符合现代数学的要求．第三，强调联系．内容的选取和理论的展开都突出了相互间的联系和统一性．第四，适可而止．比如省略了单纯同调群的拓扑不变性的证明，这可能是因为考虑到它包含着相当长的一段会使初学者感到艰涩的推理．这些都是本书突出的优点．使人遗憾的是只选入了很少数的习题，这是一个不足之处．

总之，这是一本值得向我国广大读者推荐的难得的好书，既可作为几何拓扑方面的专门人才的入门读物，又适于非专攻几何拓扑而又希望了解拓扑学，微分流形理论及微分几何学的某些深刻理论的数学家和其他科学家参考．

干丹岩

1980年于西安

目　录

第一章 点集拓扑学的一些知识

1.1 朴素的集合论

我们将对象的一个集合(系、族)的概念以及一个对象属于一个集合的概念作为原始的(不定义的)概念来接受.

我们只注意这样一件事,给了一个集合 S 和一个对象 x, 人们能够确定该对象或者属于该集合(是该集合的一个元素), 写作 $x\in S$. 或者不属于该集合,写作 $x\overline{\in} S$.

定义 设 A 和 B 都是集合. 如果 $x\in A$ 蕴涵 $x\in B$, 则说 A 是 B 的子集, 写作 $A\subset B$. 如果 $A\subset B$ 并且 $B\subset A$, 则说 A 等于 B, 写作 $A=B$.

记号 空集,即其中没有任何对象的集合,记为 $\emptyset$.

注记

(1) 对于所有集合 A, 有 $\emptyset\subset A$.

(2) 空集 $\emptyset$ 是唯一的;这就是说,任何两个空集必相等. 因为若 $\emptyset_1$ 和 $\emptyset_2$ 是两个空集,则 $\emptyset_1\subset\emptyset_2$ 并且 $\emptyset_2\subset\emptyset_1$.

(3) 对于所有的集合 A, 有 $A\subset A$.

定义 设 A 和 B 是集合. A 和 B 的并 $A\cup B$ 是使得或者 $x\in A$, 或者 $x\in B$ 的所有 x 所成的集合,写作

$$A\cup B=[x; x\in A \quad \text{或} \quad x\in B].$$

A 与 B 的交 $A\cap B$ 定义为

$$A\cap B=[x; x\in A \quad \text{且} \quad x\in B].$$

类似地,若 $\mathscr{S}$ 是集合的一个集合(即集合系), $\mathscr{S}$ 中所有集合的并和交分别定义为

$$\bigcup_{S\in\mathscr{S}} S=[x; x\in S \text{ 对于某个 } S\in\mathscr{S}],$$

$$\bigcap_{S\in\mathscr{S}} S=[x;\, x\in S \text{ 对于每个 } S\in\mathscr{S}].$$

若 $A\subset B$, A 在 B 中的余集,记作 A' 或 $B-A$, 定义为

$$A'=[x\in B;\, x\overline{\in} A].$$

定理 1 设 A, B, C 和 S 均为集合. 则

(1) $A\cup B=B\cup A$.

(2) $A\cap B=B\cap A$.

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(4) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(5) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(6) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(7) 若 $A\subset S$ 且 $B\subset S$, 则 $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

(8) 若 $A\subset S$ 且 $B\subset S$, 则 $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

(9) 若 $\mathscr{S}_1$ 和 $\mathscr{S}_2$ 是两个集合系,则

$$\Big(\bigcup_{S\in\mathscr{S}_1} S\Big)\cup\Big(\bigcup_{S\in\mathscr{S}_2} S\Big)=\bigcup_{S\in\mathscr{S}_1\cup\mathscr{S}_2} S$$

及

$$\Big(\bigcap_{S\in\mathscr{S}_1} S\Big)\cap\Big(\bigcap_{S\in\mathscr{S}_2} S\Big)=\bigcap_{S\in\mathscr{S}_1\cup\mathscr{S}_2} S.$$

(10) 对于如(9)中的 $\mathscr{S}_1$ 和 $\mathscr{S}_2$, 有

$$\Big(\bigcup_{S_1\in\mathscr{S}_1} S_1\Big)\cap\Big(\bigcup_{S_2\in\mathscr{S}_2} S_2\Big)=\bigcup_{\substack{S_1\in\mathscr{S}_1\\ S_2\in\mathscr{S}_2}}(S_1\cap S_2).$$

证明 此定理的证明留给读者.

定义 设 A 和 B 均为集合. A 和 B 的笛卡儿乘积 $A\times B$ 是有序对的集合

$$A\times B=[(a,\, b);\, a\in A,\, b\in B].$$

A 与 B 之间的一个关系是 $A\times B$ 的一个子集 R. 如果 $(a,b)\in R$, 则说 a 与 b 是 R–有关的.

例 设 $A=B=$实数集. 则 $A\times B$ 是平面. 顺序关系 $x<y$ 是 A 与 B 之间的一个关系. 这个关系是图 1.1 中打上阴影的点集.

定义 一个关系 $R\subset S\times S$[注]称为一个半序,如果满足

[注] 原文将 $S\times S$ 误为 $A\times A$.——译者注

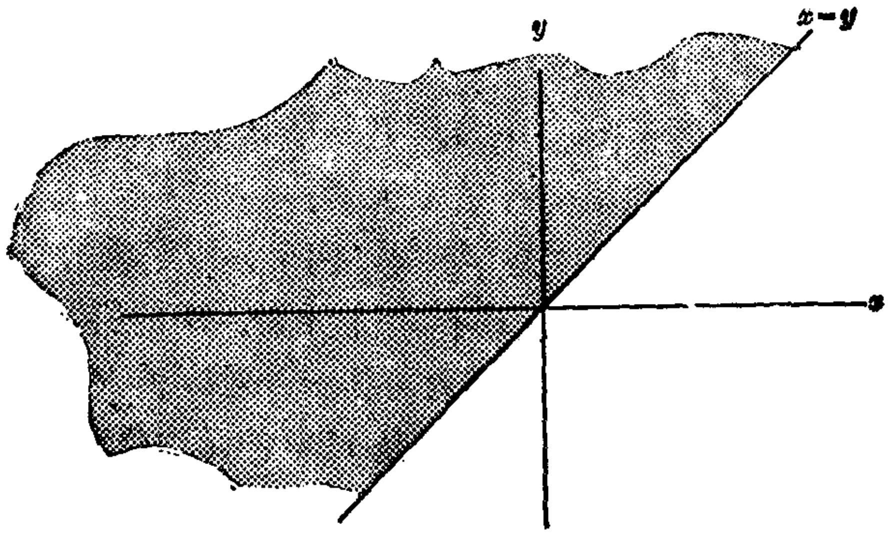


图 1.1

(1) $(s_1, s_2)\in R$ 并且 $(s_2, s_3)\in R \Rightarrow (s_1, s_3)\in R$.

(2) $(s_1, s_2)\in R$ 并且 $(s_2, s_1)\in R \Rightarrow s_1=s_2$.

一个关系 R 称为一个单序，如果它是一个半序，并且还满足

(3) 对于每一对 $s_1, s_2\in S$，或者 $(s_1, s_2)\in R$，或者 $(s_2, s_1)\in R$.

当 S=实数集时，其顺序关系是单序之一例. 一般说来，我们称 S 被 R 半序化(单序化).

定义 设 A 和 B 均为集合. 映 A 入 B 的一个函数 f，记为 $f: A\to B$，是 A 和 B 之间的一个关系($f\subset A\times B$)，满足以下性质:

(1) 若 $a\in A$，则存在 $b\in B$，使得 $(a, b)\in f$.

(2) 若 $(a, b)\in f$ 且 $(a, b_1)\in f$，则 $b=b_1$.

性质(1)说，函数 f 在 A 上处处有定义. 性质(2)说，f 是一个"单值"函数.

记号 设 $f: A\to B$. 我们用记号 $f(a)=b$ 表示 $(a, b)\in f$.

定义 设 $f: A\to B$. 若对于每个 $b\in B$，存在 $a\in A$，使得 $f(a)=b$，则称 f 是满射(映满的). 若 f 是满射，我们写作 $f(A)=B$. 如果 $f(a)=f(a_1)\Rightarrow a=a_1$，则称 f 是单射(一对一的). 如果 f 既是满射又是单射，我们就说 f 是 A 和 B 之间的一个一一对应.

定义 一个集合 A 称为可数的，如果在全体整数所成的集与 A 之间存在一一对应. 一个集合 A 说是有限的，如果对于某个正

整数[注] n，存在$\{1, \cdots, n\}$和 A 之间的一一对应，这时我们说 A 有 n 个元素。

定理 2 如果 $A=\{a_1, \cdots, a_n\}$ 是一个 n 个元素的有限集，则 A 的所有子集所构成的集合有 2^n 个元素。

证明 考虑映 A 入由"是"与"非"两个元素组成的集合 {是, 非}的所有函数所成集合 F. F 有 2^n 个元素. A 的所有子集所成集合 $\mathscr{S}$ 是一一对应于 F 的. 因为可作一一对应 $f: \mathscr{S}\to F$ 如下.

对于 $B\in\mathscr{S}$，即 $B\subset A$，$f(B)$是 F 中的元素(即 $f(B)$: $A\to$ [是, 非])定义为

$$f(B)(x)=\begin{cases}\text{是, 若 } x\in B,\\ \text{非, 若 } x\overline{\in} B.\end{cases}$$

f 是单射，因为若 $f(B)=f(C)$，则对于所有 $x\in A$ 有 $f(B)(x)=f(C)(x)$. 于是 $f(B)(x)=$"是"当且仅当 $f(C)(x)=$"是"；这就是说，$x\in B$ 当且仅当 $x\in C$. 于是 $B=C$. f 是满射，因为每个函数 $g: A\to$[是, 非]都确定一个 $B\subset A$ 如下

$$B=[x;\ g(x)=\text{是}]$$

且 $f(B)=g$. □

记号 从此命题得到启发，我们将 A 的所有子集的集合记为 2^A. 给了两个集合 A 和 B, B^A 表示所有函数 $A\to B$ 的集合.

定义 设 $f\in B^A$. 由

$$f^{-1}(B_1)=[a\in A;\ f(a)\in B_1]\quad (B_1\subset B)$$

定义的函数 f^{-1}: $2^B\to 2^A$ 称为 f 的逆. $f^{-1}(B_1)$称为 B_1 的逆象. 注意

$$f^{-1}\in (2^A)^{2^B}.$$

记号 设 W 是一个集合，并设 $\mathscr{S}$ 是一个集合系. 我们说 $\mathscr{S}$ 是由 W 标号的，如果给定了一个满射函数 φ: $W\to\mathscr{S}$. 对于 $w\in W$，我们记 $\varphi(w)$为 S_w，并且将 $\mathscr{S}$ 由 W 标号记作$\{S_w\}_{w\in W}$.

定义 设 $\{S_w\}_{w\in W}$ 由 W 标号. 则 $\{S_w\}_{w\in W}$ 的乘积是集合

[注] 通常，我们认为空集也是有限集，因此，此处"正整数"应改为"非负整数". ——译者注

$$\prod_{w\in W} S_w=[f:W\to\bigcup_{w\in W} S_w;\ f(w)\in S_w\text{ 对所有 }w\in W].$$

如果集合 W 不是有限的,则这个乘积称为无限乘积. 注意这个乘积概念是两个集合的乘积 $S_1\times S_2$ 概念的推广.因为设 $W=\{1,2\}$, $\mathscr{S}=\{S_1,S_2\}$, 并设 $\varphi:W\to\mathscr{S}$ 为 $\varphi(j)=S_j$, $j=1, 2$. 则 $S_1\times S_2=[(s_1,s_2);\ s_j\in S_j]$, 而 $\prod_{w\in W}S_w=[f:\{1,2\}\to S_1\cup S_2;f(j)\in S_j]$. 它可看成与$[(f(1), f(2));\ f(j)\in S_j]$相等, 后者又可看成与 $S_1\times S_2$ 相等.

注记 $\prod_{w\in W}S_w$ 是一个函数集. 人们可能会问: 是否存在这样的函数呢; 即是否 $\prod_{w\in W}S_w\neq\emptyset$? 换句话说,设给了无限多个非空集,是否可能从每一个集合中选出一个元素来?在公理化集合论中可以证明,这个问题不可能希求由集合论的通常的公理来回答.我们这里接受肯定的答案作为一条公理.

选择公理 设 $\{S_w\}_{w\in W}$ 是由 W 标号的集合系. 设对于所有的 $w\in W$, $S_w\neq\emptyset$. 则

$$\prod_{w\in W} S_w\neq\emptyset.$$

选择公理等价于许多其他的公理,其中之一如下.

极大原理 如果 S 由 R 半序化,且 T 是一个单序子集,则存在一个集合 M 使得下述结论成立.

(1) $T\subset M\subset S$.

(2) M 是被 R 单序化的.

(3) 如果 $M\subset N\subset S$, 且 N 由 R 单序化, 则 $M=N$; 这就是说, M 是一个极大的含有 T 的单序子集.

1.2 拓扑空间

定义 一个度量空间是一个集合 S 连同一个函数 ρ: $S\times S\to$ 非负实数,使得对于任意 $s_1, s_2, s_3\in S$ 满足:

(1) 当且仅当 $s_1=s_2$, $\rho(s_1, s_2)=0$.

(2) $\rho(s_1, s_2)=\rho(s_2, s_1)$.

(3) $\rho(s_1, s_3)\leqslant\rho(s_1, s_2)+\rho(s_2,s_3)$.

函数 ρ 称为 S 上的一个度量.

给定度量空间 S 中的一个点 s_0 和一个实数 a, 围绕 s_0 以 a 为半径的球定义为集合

$$B_{s_0}(a)=[s\in S;\rho(s,\ s_0)<a].$$

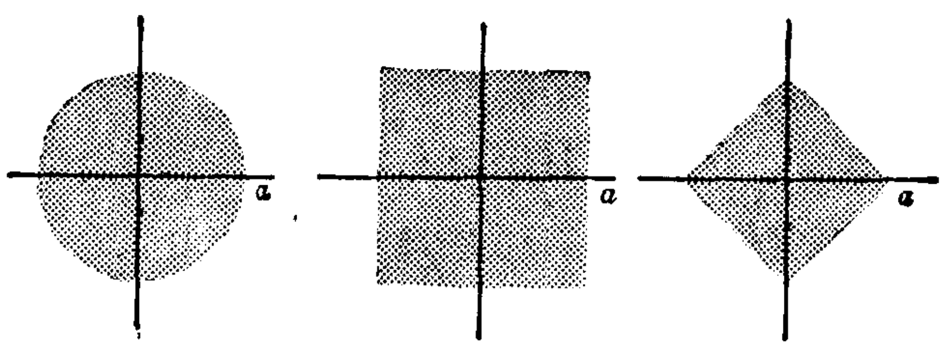
例 设 S 是平面, 即实数集与自己的乘积. 我们在 S 上定义三种度量如下. 对于 S 中的两个点 $P_1(x_1,\ y_1)$ 和 $P_2(x_2,\ y_2)$,

$$\rho_1(P_1,\ P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

$$\rho_2(P_1,\ P_2)=\max\{|x_2-x_1|,\ |y_2-y_1|\},$$

$$\rho_3(P_1,\ P_2)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|.$$

图 1.2 中用打阴影的区域表示关于这些度量的每一种的围绕 $O=(0,\ 0)$ 以 a 为半径的球. 注意, 一个球不必有一个圆的边界, 甚至不必有光滑的边界.



$\rho_1(s,\ O)<a$ $\rho_2(s,\ O)<a$ $\rho_3(s,\ O)<a$

图 1.2

注记 上面定义的三种度量为平面提供了三种不同的度量空间结构. 然而对于这些空间的某些性质的研究而言, 这些度量是等价的. 例如, 如果我们希望知道 O 是否是集合 $T\subset S$ 的一个极限点, 那么我们问是否存在 T 中的收敛于 O 的点列; 即是否存在 T 中的点列 $\{s_n\}$, 使得给了任意的 $\varepsilon>0$, 存在一个 N 使得对于所有的 $n>N$,

$$\rho(s_n,\ O)<\varepsilon.$$

不难看出, 这个问题的答案与我们采用上述几种度量中的无论哪一个作为 ρ 是无关的; 这就是说, 给定了 $\varepsilon>0$, 存在一个采用 ρ_1 的 N, 当且仅当存在一个采用 ρ_2 的 N, 等等. 此答案不依赖于以

ε 为半径的球的形状，而仅依赖于它的“开性”．由于这个原因，将度量空间的对描述“开性”来说是本质的那些性质收集在一起，并用这些性质来定义一个更为抽象的结构，拓扑结构，在其中我们仍然能够谈论极限点并且上述平面上的三种度量结构将给出相同的“开集”．

定义 一个拓扑空间是一个集合 S 连同 S 的子集的满足下列条件的一个集合 $\mathscr{U}$（$\mathscr{U}$ 是 2^S 的一个子集）．

(1a) $\emptyset\in\mathscr{U}$, $S\in\mathscr{U}$.

(2a) 若 $U_1, \cdots, U_n\in\mathscr{U}$，则 $\bigcap_{i=1}^n U_i\in\mathscr{U}$.

(3a) $\mathscr{U}$ 中任意多个元素的并仍在 $\mathscr{U}$ 中；即若 $\widetilde{\mathscr{U}}\subset\mathscr{U}$，则 $\bigcup_{U\in\widetilde{\mathscr{U}}}U\in\mathscr{U}$.

$\mathscr{U}$ 中的元素称为 S 中的开集．集合 $\mathscr{U}$ 称为 S 上的一个拓扑．

注记 我们将常常略去 $\mathscr{U}$ 而简称 S 为一个拓扑空间．

定义 设 $(S, \mathscr{U})$ 是一个拓扑空间．一个集合 $A\subset S$ 称为闭的，如果它是一个开集的余集，即 $A'\in\mathscr{U}$.

注记 将上述条件(1a)，(2a)和(3a)中集合取余集，可见闭集系 $\mathscr{C}$ 满足下列条件．

(1b) $\emptyset\in\mathscr{C}$, $S\in\mathscr{C}$.

(2b) 若 $A_1, \cdots, A_n\in\mathscr{C}$，则 $\bigcup_{i=1}^n A_i\in\mathscr{C}$.

(3b) $\mathscr{C}$ 中任意多个元素之交仍在 $\mathscr{C}$ 中．

注记 我们可以指定闭集系来表述一个拓扑，这等价于指定开集系．

定义 设 $(S, \mathscr{U})$ 是一个拓扑空间．设 $A\subset S$．一个点 $s\in S$ 称为 A 的极限点，如果对于每个 $U\in\mathscr{U}$，使得 $s\in U$，有

$$(U-\{s\})\cap A\neq\emptyset.$$

定义 集合 $A\subset S$ 的闭包，记作 $\overline{A}$，是集合

$$\overline{A}=A\cup[s\in S;\ s\text{ 是 }A\text{ 的极限点}].$$

定理 1 集合 A 的闭包 $\overline{A}$ 是闭的．

证明 我们必须证明 $\overline{A}'$ 是开的．为此只须证明对于每个 $s\in\overline{A}'$，存在一个开集 U_s，使得 $s\in U_s\subset\overline{A}'$．那末对每个 s, $s\in U_s$

蕴涵 $\overline{A}'\subset\bigcup_{s\in\overline{A}'}U_s$，而对每个 s，$U_s\subset\overline{A}'$ 蕴涵 $\bigcup_{s\in\overline{A}'}U_s\subset\overline{A}'$. 从而 $\overline{A}'=\bigcup_{s\in\overline{A}'}U_s$ 是开集的并，因而是开集.

现在设 $s\in\overline{A}'$. 则 s 不是 A 的极限点，所以存在一个开集 U_s，使得 $s\in U_s$ 且 $(U_s-\{s\})\cap A=\emptyset$. 又因为 $s\notin\overline{A}$，故 $s\notin A$，因此实际上 $U_s\cap A=\emptyset$. 由于 U_s 的每一点被包含在一个开集(即 U_s 自身)中，它与 A 相交为 $\emptyset$，由此可见 U_s 根本不包含 A 的极限点并且 $U_s\cap\overline{A}=\emptyset$；即 $U_s\subset\overline{A}'$. □

定理 2 一个集合 A 是闭的当且仅当 $A=\overline{A}$.

证明 设 A 是闭的. 则 A' 是开的. 若 $s\notin A$，则 A' 是一个包含 s 的开集，满足 $(A'-\{s\})\cap A=\emptyset$. 因此 s 不是 A 的极限点. 因此 A 的所有极限点位于 A 内；即 $A=\overline{A}$.

反之，若 $A=\overline{A}$，则由前一个定理知 A 是闭的. □

定义 我们称一个集合 $\mathscr{B}\subset 2^S$ 是 S 上的一个拓扑基，如果下述条件满足：

(1c) $\emptyset\in\mathscr{B}$.

(2c) $\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B=S$.

(3c) 若 B_1 和 $B_2\in\mathscr{B}$，则对于某子集 $\widetilde{\mathscr{B}}\subset\mathscr{B}$ 有 $B_1\cap B_2=\bigcup_{B\in\widetilde{\mathscr{B}}}B$.

定理 3 设 S 是一个集合，并设 $\mathscr{B}$ 是 S 上的一个拓扑基. 设

$$\mathscr{U}_{\mathscr{B}}=[U\in 2^S;\ U\text{ 是 }\mathscr{B}\text{ 中某些元素之并}].$$

则 $\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ 是 S 上的一个拓扑，称为由 $\mathscr{B}$ 生成的拓扑.

证明 我们需要验证 $\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ 满足 S 上的拓扑的三条开集公理.

由基的定义中的(1c)和(2c)知 $\emptyset$ 和 $S\in\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$，故拓扑空间的定义中的条件(1a)满足.

假设 $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$. 则 $\bigcup_{V\in\mathscr{V}}V=\bigcup_{V\in\mathscr{V}}(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_V}B)=\bigcup_{B\in\widetilde{\mathscr{B}}}B$，其中对于每个 $V\in\mathscr{V}$，$\mathscr{B}_V\subset\mathscr{B}$，满足 $V=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_V}B$[注]，并且 $\widetilde{\mathscr{B}}=\bigcup_{V\in\mathscr{V}}\mathscr{B}_V\subset\mathscr{B}$. 因此条件(3a)成立.

我们用归纳法来证明条件(2a). 我们假设 $\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ 中 k 个集合之

[注] 原文没有“满足 $V=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_V}B$”. ——译者注