线性规划

XIAN XING GUI HUA

高等学校试用教材

魏国华 王芬 编著

线性规划

魏国华　王　芬　编著

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是在作者为复旦大学数学系及统计运筹系学生讲授《线性规划》课程所用讲义的基础上编写成的. 本书力求通过几何直观阐明有关算法的基本思想，然后论证相应的定理作为算法的理论基础，最后用一定的例题说明算法的应用. 本书尤其注意把各种算法归纳成接近程序语言的算法步骤，使得给出的算法更有实用价值.

本书可作为应用数学、运筹学、数理统计等专业的教材，也可作为财经、管理及工科有关专业的教学参考书. 还可作为经济工作者与研究人员的参考书.

高等学校试用教材

线性规划

魏国华　王　芬　编著

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 9.75　字数 230 000

1989 年 12 月第 1 版　1990 年 3 月第 1 次印刷

印数 0001—2,430

ISBN 7-04-002273-7/O·781

定价 2.85 元

前　言

著名经济学家 Leontief 在研究投入产出分析法时，提到了线性规划问题，后来 Hitchcook 在研究运输问题时，又对线性规划问题作了讨论. 1947 年 Dantzig 提出了求解一般线性规划问题的单纯形方法. 从此线性规划在理论上日趋成熟，在实际应用上日益广泛. 目前已深入到经济计划、企业管理、工程设计、交通运输等许多方面.

本书是在作者多年为复旦大学数学系及统计运筹系学生讲授《线性规划》课程所用讲义的基础上，经过修改和补充而写成的. 我们力求通过几何直观等手段阐明有关算法的基本思想，然后论证相应的定理作为算法的理论基础. 最后用一定的例题说明算法的应用. 本书特别注意把各种算法归纳成接近程序语言的算法步骤，使得给出的算法更有实用价值.

本书第一章分析了线性规划可行解集合的结构. 第二章至第五章，以单纯形法为中心阐述线性规划的理论和方法. 第六章介绍求解整数规划的两种基本方法：割平面法和分支定界法. 第七章讨论运输问题. 第八章讲解两种分解算法：列生成法和行生成法. 这三章的内容也是以单纯形法为基础的. 最后一章从算法复杂性的角度介绍线性规划较新的成果：椭球算法，供读者进一步学习参考. 前八章的每章之末都附有一定的习题，供读者练习.

本书可作为应用数学、运筹学、数理统计等有关专业的教科书，也可作为财经、管理、工科等有关专业的教学参考书或研究生教材.

限于作者水平，书中难免有不妥和错误之处，恳请读者批评指正.

目　录

第一章　基本可行解

本章首先通过一些例子来阐明线性规划问题及其数学模型，然后再考察线性规划标准形的几何特性，并由此导出基本可行解的概念．最后介绍可行解的表示定理．

§1.1　线性规划问题

例1.1　某工厂生产1#、2#、3#、4#四种型号的童车．每种童车都要经过机械、油漆和装配三个车间进行加工．根据该厂现有的设备和劳动力等生产条件，可以确定各车间每日的生产能力，我们把它们折合成有效工时来表示．现将各车间每日可利用的有效工时数、每辆童车在各个车间加工时所花费的工时数以及每辆童车可获得的利润情况列成下表：

车　间	每辆童车所需的加工工时				有效工时(小时/日)
	1#	2#	3#	4#	
机　械	0.8	0.8	1.1	1.2	160
油　漆	0.6	0.6	0.7	0.8	120
装　配	0.4	0.5	0.7	0.7	100
利润（元/辆）	6	8	9	10	

试问这四种型号的童车每日各应生产多少辆，才能使得工厂所获得的利润最大？

解 设 x_1、x_2、x_3、x_4 分别为 1#、2#、3#、4# 型童车的日产量. 于是，工厂每日可获得的利润 z 为

$$z=6x_1+8x_2+9x_3+10x_4.$$

我们的目标是要在目前的生产条件下，确定 x_1、x_2、x_3、x_4 的一组值，使利润 z 达到最大值. 由于机械车间每日最大的生产能力为 160 工时，故 x_1、x_2、x_3、x_4 应满足如下条件:

$$0.8x_1+0.8x_2+1.1x_3+1.2x_4\leqslant 160.$$

再考虑到油漆车间和装配车间的生产能力，x_1、x_2、x_3、x_4 还应满足下面两个条件:

$$0.6x_1+0.6x_2+0.7x_3+0.8x_4\leqslant 120,$$

$$0.4x_1+0.5x_2+0.7x_3+0.7x_4\leqslant 100.$$

又变量 x_1、x_2、x_3、x_4 显然只能取非负值，故它们还应满足条件:

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.$$

于是，问题可以归结为以下数学形式:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z=6x_1+8x_2+9x_3+10x_4 \\
\text{s.t.} \quad & 0.8x_1+0.8x_2+1.1x_3+1.2x_4\leqslant 160 \\
& 0.6x_1+0.6x_2+0.7x_3+0.8x_4\leqslant 120 \\
& 0.4x_1+0.5x_2+0.7x_3+0.7x_4\leqslant 100 \\
& x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4,
\end{aligned}$$

其中 max $z=6x_1+8x_2+9x_3+10x_4$ 表示要求函数 $z=6x_1+8x_2+9x_3+10x_4$ 达到最大值，s. t. 为英文“subject to”的缩写，意即“受约束于”. 因此，这是一个求条件极值的问题，即要在满足 s. t. 后面所列出的全部条件下，求一组 x_1、x_2、x_3、x_4 之值，使函数 $z=6x_1+8x_2+9x_3+10x_4$ 达到最大值.

例 1.2 （运输问题） 现要从三个仓库运送库存的原棉给四个纺织厂，以满足它们的需求. 每个纺织厂所需的原棉数量、每个仓库内现有的原棉库存量以及每吨原棉从各个仓库运送到各个纺

织厂所需的运费见下表.

运费单价（元/吨） 工厂 / 仓库	1#	2#	3#	4#	库存量（吨）
1#	2	1	3	5	50
2#	2	2	4	1	30
3#	1	4	3	2	70
需求量（吨）	40	50	25	35	

试问在保证各纺织厂的需求都得到满足的条件下，应采用何种运输方案，才能使总运费达到最小?

解 设 x_{ij} 表示从 i# 仓库运送到 j# 纺织厂的原棉吨数. 于是，总运费 z 为

$$z=2x_{11}+x_{12}+3x_{13}+5x_{14}+2x_{21}+2x_{22}+4x_{23}+x_{24}$$
$$+x_{31}+4x_{32}+3x_{33}+2x_{34}.$$

我们的目标是要按各仓库现有的库存量，在保证各厂需求的条件下，确定 $x_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$ 的一组值，使得总费用 z 达到最小值. 首先，从各个仓库运出的原棉数量不能超过它的库存量，故 x_{ij} 应满足下列条件:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\leqslant 50,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\leqslant 30,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\leqslant 70.$$

又各纺织厂所需的原棉都必须得到满足，故 x_{ij} 还应满足下列条件:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=40,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=50,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=25,$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=35.$$

此外,运送量 x_{ij} 应取非负值,故还应满足条件:

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,2,3;\quad j=1,2,3,4.$$

于是,问题可以写成如下的数学形式:

$$\begin{aligned}
\min\quad & z=2x_{11}+x_{12}+3x_{13}+5x_{14}+2x_{21}+2x_{22}\\
& \qquad +4x_{23}+x_{24}+x_{31}+4x_{32}+3x_{33}+2x_{34}\\
\text{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\leqslant 50\\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\leqslant 30\\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\leqslant 70\\
& x_{11}+x_{21}+x_{31}=40\\
& x_{12}+x_{22}+x_{32}=50\\
& x_{13}+x_{23}+x_{33}=25\\
& x_{14}+x_{24}+x_{34}=35\\
& x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,2,3;\ j=1,2,3,4.
\end{aligned}\tag{1.1}$$

注意到,现在三个仓库原棉的库存总量恰等于四个纺织厂的需求总量,因此,若要保证各纺织厂的需求都得到满足,每个仓库的库存原棉就必须全部运走. 于是(1.1)中前三个不等式条件可以改成等式.

运输问题一般地可叙述如下:把 m 个发点(发送货物的地点)的货物运送到 n 个收点(接收货物的地点). 若已知 $i^{\#}$ 发点处有货物 a_i 单位,$j^{\#}$ 收点处需要货物 b_j 单位,每单位货物从 $i^{\#}$ 发点运送到 $j^{\#}$ 收点的运费为 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,\ m;\ j=1,2,\cdots,\ n)$. 那么,在保证每个收点的需求都得到满足的条件下,应采用何种运输方案才能使总运费最小?

设以 x_{ij} 表示从 $i^{\#}$ 发点运送到 $j^{\#}$ 收点的货物数量,则上述问题可以写成如下的数学形式:

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_j, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, \quad j=1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij}\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m; \quad j=1,2,\cdots,n.$$

特别地，当 m 个发点所具有的货物总量恰等于 n 个收点所需的货物总量时，即当

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j \tag{1.3}$$

成立时，(1.2) 又可写成如下形式：

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, i=1,2,\cdots,m \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, j=1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij}\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m; \quad j=1,2,\cdots,n.$$

例 1.3 （营养问题） 某养鸡场欲用 n 种原料（例如，玉米、大豆、小麦等）配制一批配合饲料. 要求这批配合饲料必须含有 m 种营养成份（例如，蛋白质、脂肪、钙质等），并要求 $i^{\#}$ 营养成份的含量应不低于 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$. 已知 $i^{\#}$ 营养成份在每单位 $j^{\#}$ 原料中的含量为 a_{ij}、每单位 $j^{\#}$ 原料的价格为 $c_j(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$，试问在保证营养要求的条件下，应采用何种配方才能使这批配合饲料的费用最小？

解 设以 x_j 表示在这批配合饲料中 $j^{\#}$ 原料的用量. 那么, $a_{ij}x_j$ 即为该饲料内的 $j^{\#}$ 原料中 $i^{\#}$ 营养成份的含量, 从而 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ 为该饲料内 $i^{\#}$ 营养成份的总含量, 它应不小于 b_i. 于是问题可写成如下的数学形式:

$$\min \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \quad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,n.$$

在上述三个例子中, 都需要首先确定一组具有明确含义的变量, 这样的一组变量称之为**决策变量**(有时也称其中的每个变量为决策变量). 问题的目标是, 要在某些限制条件下, 选取决策变量的一组值, 使决策变量的一个函数——**目标函数**, 实现极大化或极小化. 这些限制条件可用含有决策变量的等式或不等式来表示. 我们称这些等式或不等式为**约束条件**. 如果目标函数是决策变量的线性函数, 而且约束条件也都是关于决策变量的线性等式或线性不等式, 则相应的数学问题就称为一个**线性规划问题**. 显然, 上述三例都是线性规划问题.

§1.2 标 准 形

为了研究上的方便, 我们把具有如下数学形式的线性规划问题称为**标准形**的线性规划问题, 并记为(LP):

$$\min \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{LP}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

其中 x_j 为决策变量，a_{ij}、b_i、c_j 均为已知常量($i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$). 也就是说，在标准形中，问题的目标是实现目标函数的极小化；问题中每个决策变量的取值都应是非负实数；除了要求决策变量应取非负值的约束条件之外，其余的约束条件均为等式形式.

有时采用矩阵和向量的符号来书写更为方便. 令

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

便可将(LP)写成如下形式，仍记为(LP)：

$$\begin{aligned} \min \quad & z=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{LP}$$

为了方便，在没有特别说明的情况下，我们不妨假定：(LP)中 $n>m$；矩阵 A 的秩为 m；$\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$.

若决策变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 的某个取值 $\hat{\boldsymbol{x}}=(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_n)^T$ 满足(LP)的全部约束条件，即下列关系式均成立：

$$A\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b},$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}\geqslant\boldsymbol{0},$$

则称 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为(LP)的一个**可行解**. (LP)的所有的可行解组成的集合 K 称为(LP)的**可行域**，即

$$K=\{\hat{\boldsymbol{x}} \mid A\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{x}}\geqslant\boldsymbol{0}\}.$$

可行域K中每个可行解 $\hat{x}$ 都对应了一个目标函数值 $c^T\hat{x}$，其中对应的目标函数值最小的可行解 x^* 称为**最优解**，相应的目标函数值c^Tx^* 称为**最优值**. (LP)的最优解 x^* 也称为(LP)的解.

对于其它形式的线性规划问题，可同样地定义它的可行解、可行域、最优解和最优值. 下面讨论如何把其它形式的线性规划问题化成标准形.

(1) 若问题的目标是实现目标函数的极大化，即求

$$\max \quad z=c^Tx,$$

那么可令 $z'=-z$. 于是问题化成在相同约束条件下求

$$\min \quad z'=(-c)^Tx.$$

它与原问题具有相同的可行域和最优解. 同样的可行解的相应的目标函数值之正负号彼此恰好相反，故彼此的最优值之正负号也恰好相反.

(2) 若约束条件中具有不等式约束 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$，则可以引进一个新的变量 ξ_i，称为**松弛变量**，并用下面两个约束取代原来的不等式约束:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \xi_i = b_i, \\ \xi_i \geqslant 0. \end{cases}$$

(3) 若约束条件中具有不等式约束 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$，则可以引进一个新的变量 η_i，称为**剩余变量**，并用下面两个约束取代原来的不等式约束:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \eta_i = b_i, \\ \eta_i \geqslant 0. \end{cases}$$

(4) 若约束条件中没有关于变量 x_j 的非负性约束 $x_j \geqslant 0$，取而代之的是出现了约束 $x_j \geqslant h_j (h_j \neq 0)$，则可以引进一个新的变量 u_j，并令 $x_j = u_j + h_j$. 再将它代入问题的目标函数和全部约束条件中，消去 x_j，于是原来的约束 $x_j \geqslant h_j$ 就化成 $u_j \geqslant 0$ 了.

(5) 若约束条件中没有明显的关于变量 x_j 的正负性的限制(这种变量称为**自由变量**)，即 $x_j > 0, x_j = 0$ 或 $x_j < 0$ 都可以(写成 $x_j \gtrless 0$)，则可以同时引进两个新的变量 u_j 和 v_j，并以 $x_j = u_j - v_j$ 代入问题的目标函数和全部约束条件中，消去 x_j. 同时，在约束条件中添加 $u_j \geqslant 0$ 和 $v_j \geqslant 0$ 这两个约束.

例 1.4 把下面的线性规划问题化成标准形:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ & x_1 + 7x_2 \geqslant 4 \\ & x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1 \geqslant 0, \ x_2 \gtrless 0. \end{aligned}$$

解 它共有四处不符合标准形的要求：问题的目标是要求实现目标函数的极大化；x_2 为自由变量；第一、第二个约束为不等式. 为此，我们可采取以下步骤把它化成标准形.

首先令 $z' = -z$，把求 max z 转化为求 min z'；再令 $x_2 = u_2 - v_2$，代入原问题，消去自由变量 x_2，并添加约束 $u_2 \geqslant 0$ 和 $v_2 \geqslant 0$；最后对第一和第二个不等式约束分别引进松弛变量 ξ_1 和剩余变量 η_2. 于是可将原问题化成如下的标准形:

$$\begin{aligned} \min \quad & z' = -2x_1 + u_2 - v_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2u_2 - 2v_2 + \xi_1 \qquad = 6 \\ & x_1 + 7u_2 - 7v_2 \qquad - \eta_2 = 4 \\ & x_1 + u_2 - v_2 \qquad\qquad = 2 \\ & x_1 \geqslant 0, u_2 \geqslant 0, v_2 \geqslant 0, \xi_1 \geqslant 0, \quad \eta_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

另外，如下形式的线性规划问题也是我们常用的形式，称为**典则形线性规划问题**:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \quad i=1,2,\cdots,m \\
& x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

采用矩阵和向量符号来写，可有下面的形式:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z=\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

因为等式约束$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ 等价于下列约束条件:

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \\
\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \geqslant -b_i,
\end{cases}
$$

故每个标准形的线性规划问题都可化成典则形. 换言之，各种形式的线性规划问题也都可以化成典则形.

§1.3 线性规划问题的几何特征

在下一章，我们将要介绍求解(LP)的单纯形法. 为使读者更好地理解这一方法的基本思想，先分析一下线性规划问题的几何特征将是有益的. 我们先以一个具体的典则形线性规划问题为例，从几何直观对它进行分析. 考察下面的线性规划问题:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z=-x_1-3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1-\ \ x_2\geqslant -6 \\
& x_1-2x_2\geqslant -8 \\
& x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

它又可以写成如下的形式:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z=-x_1-3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1+\ \ x_2\leqslant 6 \\
& -x_1+2x_2\leqslant 8 \\
& x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

问题仅含有两个变量,故我们可在 x_1Ox_2 坐标平面来考察它。在 x_1Ox_2 坐标面上,方程 $x_1+x_2=6$ 表示一条直线,而不等式 $x_1+x_2\leqslant 6$则表示以 $x_1+x_2=6$为界的一个半平面.同样,$-x_1+2x_2\leqslant 8$, $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$ 都各自表示一个半平面. 于是,此线性规划问题的可行域 K 就是上述四个半平面之交(见图 1.1). 它是一个凸多边形.

再考察目标函数 $z=-x_1-3x_2$. 对于任一给定的实数α, 方程$-x_1-3x_2=\alpha$ 表示一条直线, 该直线上各点处的目标函数值都等于α, 故称这种直线为目标函数 $z=-x_1-3x_2$ 的**等值线**. 对应于α的不同值所得的等值线相互平行. 易知, 目标函数 $z=-x_1-3x_2$ 的梯度为

$$\nabla z=(-1,-3)^T,$$

它与每条等值线都垂直, 且当点$(x_1,\ x_2)^T$ 沿着$-\nabla z$ 的指向移动时, 它所对应的目标函数值将不断地减小. 在图 1.1 中, 等值线 L_1、L_2、L_3、L_4 上点所对应的目标函数值分别为 0、-6、-12、$-\frac{46}{3}$.在与可行域K有公共交点的等值线中,L_4: $-x_1-3x_2=-\frac{46}{3}$ 是值最小的一条. 它与K只有一个交点, 就是凸多边形K的顶点