中等银行学校
试用教材

概率论与数理统计初步

中国金融出版社

中等银行学校试用教材

概率论与数理统计初步

《概率论与数理统计初步》编写组

责任编辑：李祥玉

概率论与数理统计初步

《概率论与数理统计初步》编写组

※

中国金融出版社　出版

（北京西交民巷17号）

新华书店北京发行所发行

天津新华印刷三厂　印刷

※

787×1092毫米　1/32　9.25印张　192千字

1989年3月第一版　1989年3月第一次印刷

印数：1—20500

ISBN 7—5049·0421 X F·049　定价：1.85元

编审说明

本书是按照银行中等专业学校教学计划和《数学》教学大纲的要求，为教学需要而编写的教材，亦可供金融系统各类中等专业教育或干部培训使用．

这套《数学》教材，分为三册：第一册《微积分初步》；第二册《线性代数基础》；第三册《概率论与数理统计初步》．

本册《概率论与数理统计初步》，结合经济应用，介绍了概率论的基本概念、随机事件及其概率、随机变量及其分布和数字特征．讲解了简单而基本的概率模型，简要叙述大数定律和中心极限定理．在概率论的基础上，重点介绍了参数估计等基本的数理统计方法．全书配备有适量的例题与习题．

本书是由中国人民银行教育司组织有关教师编写的．

编写组长：马骏；副组长：余志祖．

编写人员：刘晓卫（第1章）；余志祖（第2、4章）；黄俊民（第3、5章）；马骏（第6章）；林宝霖（第7章、附录）；由马骏、余志祖总纂．

审稿：董承章．

全套书均由马骏同志最后总纂．

现经我们审定，可以作为银行中等专业学校试用教材出版．各单位在使用过程中有何修改意见和建议，请函寄中国人民银行教育司教材编审室．

中国人民银行教材编审委员会

1988年8月24日

目　录

第一章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究大量随机现象的规律性的数学学科．它已广泛地应用于工程技术、经济和工农业生产中．随着我国经济的发展，在金融各专业中，对随机现象的研究已经感到十分必要．因此，概率论与数理统计已成为金融专业，特别是经济分析和保险专业学生必修的一门基础课．在本章内，将阐明概率论中的一些最基本的概念．

第一节　随机事件

一、随机现象、随机试验

在自然界和人们的活动中经常遇到各种各样的现象，这些现象大体上可分为两类：必然现象和随机现象．所谓必然现象，是指在一定的条件下一定会出现的现象．例如，“在标准大气压下，纯水加热到100℃就沸腾”；“货币发行过量会导致通货膨胀”等等．每当具备一定的条件时，我们就可以预言现象的必然结果．另一类现象就是随机现象．例如，掷一枚伍分的硬币，可能出现两种不同的结果：“国徽”和“伍分”，但究竟出现哪种结果事先无法确切预言；某交换台每天9：00—10：00收到电话呼唤的次数，是一个非负

整数，但事先无法预言每天9：00—10：00呼唤的确切次数；某保险公司每天接待的投保户数，一定是一个非负整数，但事先无法预言每天投保的确切户数等等．这类现象的共同特点是：即使条件完全相同，它们所产生的结果一般也不尽相同，或不完全确定和不能确切预言，这样的现象就是随机现象．

随机现象又有大量性随机现象和个别随机现象．大量性随机现象，是指在完全相同的条件下可以重复出现的随机现象；而原则上不能在不变的条件下重复出现的随机现象，就是个别随机现象．概率论只研究大量性随机现象的规律性，而且只研究大量性随机现象在完全相同的条件下重复出现时所表现出来的规律性．这种规律性就是统计规律性．

为了研究大量性随机现象的规律性，需要对随机现象进行观察或为此而进行实验．我们把对现象的观察或为此而进行的实验都称为试验，记为E．例如

E_1：掷一枚硬币观察正面（有国徽的一面）、反面出现的情况；

E_2：将一枚硬币掷两次，观察正、反面出现的情况；

E_3：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_4：记录一小时内，到某保险公司投保的户数；

E_5：一射手射击一个目标，直到击中为止，观察其射击的次数；

E_6：记录某地一昼夜的最高温度（℃）和最低温度（若已知历史上最高和最低温度分别是38℃和－25℃）．

这些试验都具有以下特性：

（1）可以在相同的条件下重复进行；

（2）每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

（3）进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

我们将具有上述三个特性的试验称为随机试验，简称试验，仍记为E。

二、基本事件、基本事件空间、随机事件

在随机试验中，我们关心的是试验的结果。例如，在E_1中，我们关心的是出现正面或出现反面；在E_2中，可能出现的结果有（正、正），（正、反），（反、正），（反、反）四种等等。总之，为了研究随机试验，首先需要知道这个试验可能出现的结果。我们把在一个随机试验中每一个可能出现的最简单的结果称为基本事件，记作ω。基本事件的全体构成基本事件空间，记作Ω，$\Omega=\{\omega\}$。

例如，在E_3中，“出现1点”、“出现2点”、…、“出现6点”就是基本事件。则$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，亦可记为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，其中$\omega_i$表示“出现i点”（$i=1,2,\cdots,6$）；在$E_6$中，基本事件$\omega$为$-25$℃至38℃中的任意一个实数，则$\Omega=[-25,38]$；在$E_2$中，$\Omega=\{$（正、正），（正、反），（反、正），（反，反）$\}$。显然，把这四个结果作为基本事件，则构成了基本事件空间。这些基本事件是我们感兴趣的问题，但是我们还可以讨论另一些问题，如：“至少出现一次正面”，为使我们讨论的这一情况出现，必须且只须下列基本事件之一出现：

（正、反）、（反、正）、（正、正）。

它是由三个基本事件构成的。不难看出，它是基本事件的某

个集合．

我们把基本事件的某个集合称为随机事件，简称事件，记作A、B、C、…．当且仅当某事件所包含的某一个基本事件出现，则称该事件发生．

例1　试写出随机试验E_4：“记录一小时内，到某保险公司投保的客户数”的基本事件空间和事件A＝{在这一小时内，最多有20个客户投保}．

解　依题意

$\Omega=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$；

$A=\{0, 1, 2, \cdots, 20\}$．

例2　写出下列随机试验的基本事件空间及下列事件中的基本事件：

（1）10件产品中，有一件废品，从中任取两件产品，有一件废品；

（2）一次掷两颗骰子，点数和小于5．

解（1）　依题意将10件产品编号为1, 2, 3, 4, …, 10，并设10号产品为废品．则

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),\cdots,(1,9),(1,10),(2,3),(2,4),\cdots,(2,9),(2,10),\cdots(9,10)\}.$$

A＝{任取两件产品得一件废品}

$=\{(1,10),(2,10),\cdots,(9,10)\}$．

（2）依题意有

$\Omega=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$．

A＝{两颗骰子点数和小于5}

$=\{2,3,4\}$

事实上，在具体问题中，十分重要的是：弄清基本事件空间是怎样构成的。

在每次随机试验中，一定会出现的事件称为必然事件，记作Ω；在任何一次试验中，都不会出现的事件称为不可能事件，记作ϕ。

为了讨论方便，通常把必然事件和不可能事件作为随机事件的特例来处理。

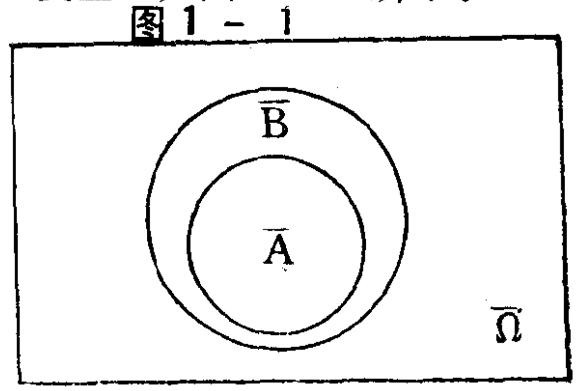
三、随机事件间的关系及其运算

当我们讨论随机试验的时候，实际上只关心在这个试验中可能观察到哪些事件，以及在每一次具体的试验中究竟出现了什么事件。这样，与每一个随机试验相联系有一个事件的集合，也就是在这个随机试验中可以观察到的全体。今后，为讨论事件的需要，我们在这个事件的集合中，定义事件间的关系和运算。

（一）事件的包含与相等

如果事件A中的每个基本事件都包含在事件B中，也就是每当事件A出现时，事件B也一定出现，则称事件B包含事件A，或称A是B的特款，记作$A \subset B$或$B \supset A$。这时，事件A的发生必然导致事件B发生。如图1－1所示。

图1－1

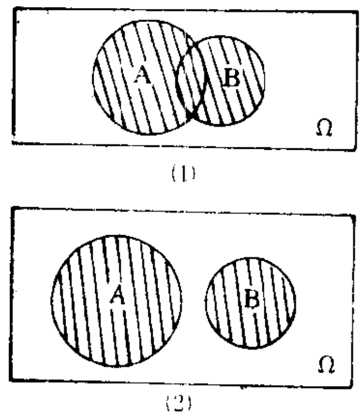


如果$A \supset B$与$B \supset A$同时成立，则称A等于B或称A与B等价，记为$A = B$。

（二）事件的并（和）

“两个事件A、B至少出现一个”也是一个事件，

图1－2



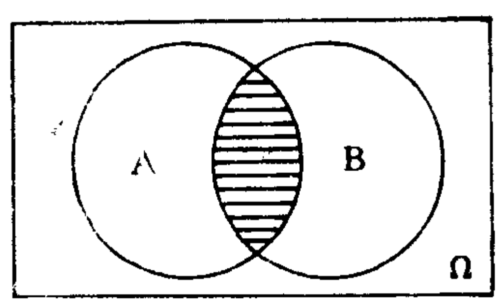
称为二事件A、B的并（或和），记作$A\cup B$。如图1－2所示，

例如，在E_3中，A＝{出现1点}，B＝{出现2点}，则$A\cup B$＝{出现1点或2点}。

类似地，“几个事件A_1，A_2，…，A_n至少出现一个”作为一个事件，称为事件A_1，A_2，…，A_n的并（或和），记作$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$；而“可数个事件A_1，A_2，…，A_n，…中至少出现一个作为一个事件，称为可数个事件A_1，A_2，…，A_n，…的并（或和），记作$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$。

显然，对任意事件A有$A\cup\phi=A$；$A\cup\Omega=\Omega$；若$A\subset B$，则$A\cup B=B$。

图1－3



（三）事件的交（积）

“两个事件A、B同时出现”也是一个事件，称为二事件A、B的交（或积），记作$A\cap B$或AB。如图1－3所示。

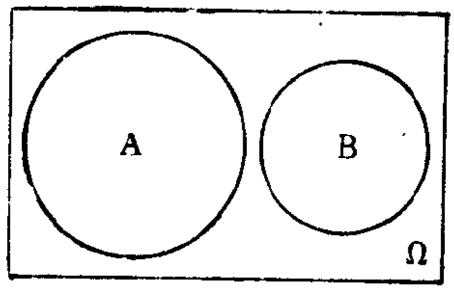
如在例1中，若B＝{20＜投保户数＜150}，C＝{投保户数＞100}，则$C\cap B$＝{100＜投保户数＜150}。

类似地，“n个事件A_1，A_2、…，A_n同时出现”作为

一个事件，称为事件 A_1、A_2、…，A_n 的交（或积），记作 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1A_2A_3\cdots A_n$；而 “可数个事件 A_1、A_2，…，A_n，…同时出现” 作为一个事件，称为可数个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的交（或积），记作 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$。

如果二事件A和B的交是不可能事件 ϕ，即 $A\cap B=\phi$，则称A、B为互不相容事件．例如，掷一颗骰子“出现偶数点”和“出现奇数点”二事件互不相容．二事件A、B互不相容如图1－4所示．

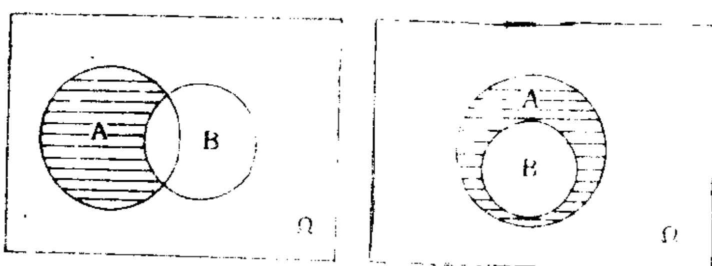
图1－4



（四）事件的差与逆

“事件A出现而事件B不出现”也是一个事件，称为事件A与B的差，记作 $A-B$．如图1－5所示．

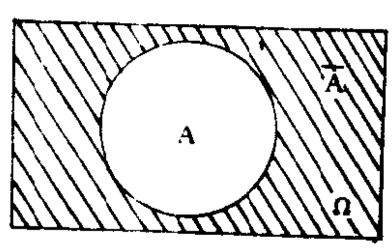
图1－5



(1)　　(2)

如在例1中，{投保户数 50} {20 投保户数 150} = {投保户数 20}．

图1－6



“A不出现”作为一个事件称为A的逆事件或对立

事件，记作$\bar{A}$．如图1－6所示．

显然，$\bar{A}=\Omega-A$；$\bar{\bar{A}}=A$．即A和$\bar{A}$互为对立事件．例如，掷一颗骰子"出现奇数点"和"出现偶数点"互为对立事件，亦称互为逆事件．

不难看出，当且仅当$A\cup B=\Omega$，$A\cap B=\phi$时，A与B（$B=\bar{A}$）互为对立事件（互为逆事件）．

例3　随机试验E：对某一目标接连进行两次射击，记$A_i=\{$第i次射击命中目标$\}$，其中$i=1,2$．试用事件间的关系和运算表示下列各事件（1）第i次射击未命中目标，其中$i=1,2$；（2）$B_j=\{$两次射击恰好有j次命中目标$\}$，其中$j=0,1,2$．

解　（1）依题意有$\bar{A}_i=\{$第i次射击未命中目标$\}$；

（2）$B_0=\bar{A}_1\bar{A}_2$；$B_1=A_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_1A_2$；

$B_2=A_1A_2$．

我们设想，对例3来说，若$C_k=\{$两次射击至少有k次命中目标$\}$，其中$k=0,1,2$，则

$$C_0=B_0\cup B_1\cup B_2=\Omega;$$

$$C_1=B_1\cup B_2;$$

$$C_2=B_2=A_1A_2.$$

事件运算有如下简单性质：

若A、B、C是任意事件，则它们满足

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

（2）结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A(BC)=(AB)C$；

（3）分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC$，$A(B-C)=AB-AC$；

（4）对偶原则（德·摩根律）

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\quad \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

以上性质的证明都很简单，现仅以$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$为例进行证明.

由于事件$A\cup B$表示事件“A和B至少出现一个”，所以，如果它的对立事件出现，则A和B均不出现，即$\bar{A}\cap\bar{B}$. 这样，$\overline{A\cup B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$. 反之，由于事件$\bar{A}\cap\bar{B}$表示事件“A和B都不出现”，所以如果$\bar{A}\cap\bar{B}$出现，则$A\cup B$的对立事件$\overline{A\cup B}$必出现，从而$\bar{A}\cap\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$，于是$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.

性质（4）可以推广到任意有穷多个或可数多个事件：若A_1，A_2，…是有穷多个或可数多个事件，则

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i};\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}.$$

证明从略.

第二节　概　　率

一、频　　率

如前所述，随机试验可以多次（原则上可以无穷多次）地重复进行. 以后，当我们说进行n次试验”，就是指“给定的随机试验重复进行n次”.

一个随机试验有许多可能结果，我们常常希望知道某些结果出现的可能性有多大. 例如，某保险公司要对某林场进行保险，就希望知道该场每年发生森林火灾的可能性的大小. 森林发生火灾是随机事件，我们希望能将一个随机事件发生的可能性的大小用一个数来表达.

首先分析一个简单的例子. 考虑“抛硬币”这一随机试

验．为知道“正面”出现的可能性的大小，我们将一个硬币抛 n 次，观察在 n 次试验中，“正面”出现的次数．现将硬币连抛50次、500次各做了十遍得数据如表1－1．

表1－1

实验序号	n＝50		n＝500	
	n_A	$F_n(A)$	n_A	$F_n(A)$
1	22	0.44	251	0.502
2	25	0.50	249	0.498
3	21	0.42	256	0.512
4	25	0.50	253	0.506
5	24	0.48	251	0.502
6	21	0.42	246	0.492
7	18	0.36	244	0.488
8	24	0.48	258	0.516
9	27	0.54	262	0.524
10	31	0.62	247	0.494

其中 A＝{出现正面}；n_A 表示在 n 次试验中，正面出现的次数；$F_n(A)$ 表示 n_A 与 n 的比值，即 $F_n(A)=\frac{n_A}{n}$．$F_n(A)$ 是在这 n 次试验中 A 出现的频率．

定义 1．1 一般地，设随机试验 E，Ω 是它的基本事件空间，A 是它的任一事件．在 n 次试验中事件 A 出现的次数 n_A 称为 A 在这 n 次试验出现的频数，而 A 的频数与试验次数 n 的比值

$$F_n(A)=\frac{n_A}{n} \quad (1-1)$$

称为事件A在这n次试验中出现的频率。

事件的频率反映了它在一定的条件下，出现的频繁程度。我们可以设想，一个事件在每次试验中出现的可能性越大，则它在n次试验中出现的频率也越大。反之，由频率的大小，也应该能判定事件出现的可能性的大小。

从表1－1不难看出，事件的频率随试验次数和试验轮次的改变而变化，但是通过大量的观察和试验发现，当试验次数很小时，同一个事件在不同轮次的试验中，频率可能有较为明显的差异，然而随着试验次数的无限增大，任一事件的频率都趋于稳定在某一个数附近。如表1－1中，抛一枚硬币出现正面的频率趋于稳定在0.5附近。频率这种趋于稳定的性质称为频率的稳定性。频率趋于稳定的这个数，既不依赖于试验次数，也不依赖于试验轮次。自然，应该用这个数来度量事件出现的可能性，并称之为该事件的概率。

对于任意随机试验，频率有如下基本性质：

（1）非负性：对于任意事件A有

$$0\leq F_n(A)\leq 1; \quad (1-2)$$

（2）规范性：$F_n(\Omega)=1$； （1－3）

（3）可加性：对于任意有穷多个两两互不相容的事件A_1，A_2，…，A_m，有

$$F_n\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}F_n(A_i). \quad (1-4)$$

证明从略。

二、概率的统计定义

基于频率的稳定性，对于任意随机试验，当n充分大时，