高等学校教学用书

微积分学讲义

专　册

邝荣雨　薛宗慈　陈平尚　蒋　铎　李有兰　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

微积分学讲义

专册

邝荣雨　薛宗慈　陈平尚
蒋　铎　李有兰　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

微 积 分 学 讲 义

专 册

邝荣雨 薛宗慈 陈平尚
蒋 铎 李有兰 编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：5.5 字数：132千
1991年5月第1版 1991年5月第1次印刷
印数：1—2 200

ISBN 7-303-01103-X/O·142
定价：2.00元

内容提要

本书分四册，第一册是一元与多元微积分初步；第二册是一元微积分的理论与方法；第三册是多元微积分理论与计算. 这三册可作为数学系本科数学分析课程的教材或教学参考书. 本册为专册，它包含实数域、极限的一般定义、度量空间、重积分换元法的证明和 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 k 维流形等六讲，供教学选用或课外参考.

本书是作者在总结最近几年来在北京师范大学数学系本科数学分析课程教学改革的经验的基础上写成的. 作者将现行的数学分析课程的内容分为两个阶段(首先侧重于概念、计算，进而侧重于理论、方法)进行讲授，教学效果达到预期的目的.

目　录

第一讲 实 数 域

§1 实数域的构造

数学分析的基本理论是在实数域的基础上展开的. 在本书第四章 §1 中，我们把实数域定义为满足连续(完备)公理的有序域，即实数域 $\boldsymbol{R}$ 是满足下述三组公理的集合.

域公理

设 $\boldsymbol{R}$ 是一个集合，在它的元素之间规定了两种分别叫做加法"+"和乘法"·"的运算关系，使得 $\boldsymbol{R}$ 中任何两个元素 a,b，都有 $a+b\in\boldsymbol{R}$，$a\cdot b\in\boldsymbol{R}$ 且满足下面几条基本性质：

I.1 $a+(b+c)=(a+b)+c$，

I.2 $a+b=b+a$，

I.3 $\exists 0\in\boldsymbol{R}$，$\forall a\in\boldsymbol{R}$，有 $0+a=a$，

I.4 $\forall a\in\boldsymbol{R}$，$\exists -a\in\boldsymbol{R}$，使 $a+(-a)=0$，

I.5 $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$，

I.6 $a\cdot b=b\cdot a$，

I.7 $\exists 1\in\boldsymbol{R}$，且 $1\neq 0$，$\forall a\in\boldsymbol{R}$，有 $a\cdot 1=a$，

I.8 $\forall a\in\boldsymbol{R}$，且 $a\neq 0$，$\exists 1/a\in\boldsymbol{R}$，使 $a\cdot(1/a)=1$，

I.9 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

序公理

在 $\boldsymbol{R}$ 的元素之间规定一种顺序关系"$<$"，且满足下面四条基本性质

II. 1(三歧性) $\forall a,b\in\boldsymbol{R}$，以下三种关系：$a<b$，$a=b$，$b<a$

有且仅有一种成立，

II.2（传递性） 若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$，

II.3 若 $a<b$，则 $\forall c\in \boldsymbol{R}$，有 $a+c<b+c$，

II.4 若 $a<b$，则 $\forall c:0<c\in \boldsymbol{R}$，有 $a\cdot c<b\cdot c$. 关系“$a<b$”又可写成“$b>a$”. 关系“$\leqslant$”表示“$<$或$=$”.

连续(完备)公理

III（分划原理） 设 A,B 是 $\boldsymbol{R}$ 的非空子集. 且 $\forall a\in A,\forall b\in B$，皆有 $a\leqslant b$，则 $\exists c\in \boldsymbol{R}$，$\forall a\in A$，$\forall b\in B$，有 $a\leqslant c\leqslant b$.

然而在那里并未给出满足这三组公理的实数模型，也就是说没有解决实数域的存在性问题. 在本讲中，我们将从有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 出发，构造出具体的实数模型. 构造实数模型的方法不止一种，我们这里采用的是 Dedekind 的分划方法.

【定义】 设 X 是有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 的子集，且满足下述条件

(i) $X\neq\varnothing$，$X\neq\boldsymbol{Q}$，

(ii) 若 $a\in X$，则对任何 $a'<a$ 且 $a'\in\boldsymbol{Q}$，有 $a'\in X$，

(iii) 若 $a\in X$，则存在 $b\in X$，使 $a<b$（即 X 无最大有理数）则称 X 是一个**分划**.

【例 1】 验证 $X=\{a\in\boldsymbol{Q}|a<2\}$ 是一个分划.

【解】 (i) 显然有 $X\neq\varnothing$，$X\neq\boldsymbol{Q}$.

(ii) 若 $a\in X\Rightarrow a<2$. $\forall a'\in\boldsymbol{Q}$，$a'<a\Rightarrow a'<a<2$，所以 $a'\in X$.

(iii) 若 $a\in X\Rightarrow a<2$，取 $b=(a+2)/2\in\boldsymbol{Q}\Rightarrow a<b<2$. 所以 $b\in X$. 故 X 是一个分划.

【例 2】 验证 $X=\{a\in\boldsymbol{Q}|a\leqslant 0\}\cup\{a\in\boldsymbol{Q}|a>0$ 且 $a^2<2\}$ 是一个分划.

【解】 (i) 显然有 $X\neq\varnothing$，$X\neq\boldsymbol{Q}$.

(ii) 设 $a\in X$. 当 $a\leqslant 0\Rightarrow\forall a'\in\boldsymbol{Q}$ 且 $a'<a$，有 $a'<a\leqslant 0\Rightarrow a'\in X$；当 $a>0\Rightarrow\forall a'\in\boldsymbol{Q}$ 且 $a'<a$. 若 $a'\leqslant 0\Rightarrow a'\in$

X，若 $a'>0$，由 $(a')^2<a^2<2\Rightarrow a'\in X$。

(iii) 设 $a\in X, a>0$，若能找到 $n\in \boldsymbol{N}$，使 $(a+1/n)^2<2$，则取 $b=a+1/n$，必有 $a<b\in X$，这就证明了(3)。

事实上，要使 $\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^2<2$，只要 $a^2+\dfrac{2a}{n}+\dfrac{1}{n^2}<2$，这只要取 $n>\dfrac{2a+1}{2-a^2}$ 即可，由有理数域的阿基米德原理知，这样的 $n\in \boldsymbol{N}$ 是存在的。综上所述，X 是一个分划。

下面我们要利用有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 的分划来构造实数域 $\boldsymbol{R}$。

记 $\boldsymbol{R}=\{X\mid X$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的分划$\}$，我们要在 $\boldsymbol{R}$ 中规定加法与乘法的运算关系及顺序关系，并证明它们满足有序域的十三条基本性质。

【定理 1.1】 $\boldsymbol{R}$ 是有序集。

【证明】 首先要在 $\boldsymbol{R}$ 中规定顺序关系。$\forall X, Y\in \boldsymbol{R}$，规定

$$X<Y\Longleftrightarrow X\subset Y \text{ 且 } X\neq Y.$$

下面要证上述"小于($<$)"关系满足序公理的 II.1-2

由集合包含关系易知 II.2 （传递性)成立。

$\forall X,Y\in \boldsymbol{R}$，由集合包含关系易知，以下三种关系：$X<Y$，$X=Y$，$Y<X$ 最多有一种成立，因此要证 II.1 (三歧性)，只要证明上述三种关系中必有一种成立就可以了。

先假定 $X<Y$ 与 $X=Y$ 不成立，则 X 不是 Y 的子集 $\Rightarrow \exists a\in X$，但 $a\notin Y$。$\forall b\in Y$，有 $b\neq a$ 因 Y 是分划 $\Rightarrow b<a$，因 X 是分划 $\Rightarrow b\in X$，故 $Y\subset X$，又 $X\neq Y\Rightarrow Y<X$。

再假定 $X<Y$ 与 $Y<X$ 不成立，仿上推理知 $Y\subset X$ 且 $X\subset Y\Rightarrow X=Y$。 □

【定理 1.2】 $\boldsymbol{R}$ 是有序域。

【证明】 第一步．要在 $\boldsymbol{R}$ 中定义加法运算，并证明它满足域公理中的 I.1—I.4 及序公理中的 II.3。

$\forall X$，$Y\in\boldsymbol{R}$，规定

$$X+Y=\{a+b\,|\,a\in X,b\in Y\}.$$

首先要证 $X+Y$ 是一个分划，即证 $X+Y\in\boldsymbol{R}$.

(i) 取 $c'\notin X$，$d'\notin Y\Rightarrow\forall c\in X,\forall d\in Y$，有 $c+d<c'+d'\Rightarrow c'+d'\notin X+Y$，故 $X+Y\neq\boldsymbol{Q}$，显然有 $X+Y\neq\varnothing$.

(ii) 设 $a\in X+Y\Rightarrow a=c+d$，其中 $c\in X,d\in Y$，$\forall b<a\Rightarrow b-d<c\in X$，因 X 是分划 $\Rightarrow b-d\in X$，故 $b=(b-d)+d\in X+Y$.

(iii) $\forall a\in X+Y\Rightarrow a=c+d$，其中 $c\in X,d\in Y\Rightarrow\exists c'\in X$，使 $c<c'$，取 $b=c'+d\Rightarrow a<b\in X+Y$，即 $X+Y$ 无最大数. 综上所述，$X+Y\in\boldsymbol{R}$.

其次证明加法满足公理 I.1—I.4 及 II.3.

I.1 由 $\boldsymbol{Q}$ 满足结合律易知 $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$.

I.2. 由 $\boldsymbol{Q}$ 满足交换律易知 $X+Y=Y+X$.

I.3. 规定

$$\bar{0}=\{a\in\boldsymbol{Q}\,|\,a<0\}$$

用例 1 的方法易知 $\bar{0}\in\boldsymbol{R}$.

$\forall X\in\boldsymbol{R}$，$a\in\bar{0}+X\Rightarrow a=b+c$，其中 $b\in\bar{0}$，$c\in X\Rightarrow a=b+c<c\in X$，所以 $a\in X\Rightarrow\bar{0}+X\subset X$.

$\forall d\in X\Rightarrow\exists e\in X$，使 $d<e$，于是 $d=(d-e)+e$，而 $d-e<0\Rightarrow d-e\in\bar{0}$，因而 $d\in\bar{0}+X\Rightarrow X\subset\bar{0}+X$，

故 $\bar{0}+X=X$.

I.4 $\forall X\in\boldsymbol{R}$，令

$$Y=\{a\in\boldsymbol{Q}\,|\,\exists c>0，使-a-c\notin X\},$$

即 $a\in Y\Longleftrightarrow$ 有比 $-a$ 小的有理数 $-a-c$ 不在 X 中.

下面要证 $Y\in\boldsymbol{R}$ 且 $X+Y=\bar{0}$

取 $b\notin X$，令 $d=-b-1\Rightarrow-d-1\notin X$，于是 $d\in Y\Rightarrow Y\neq$

$\varnothing$. 取$e\in X$,$\forall c>0\Rightarrow -(-e)-c<e\in X$,所以$-(-e)-c\in X\Rightarrow -e\notin Y$,于是 $Y\neq Q$. 故 Y 满足分划定义中的 (i).

设 $a\in Y\Rightarrow \exists c>0$, 使 $-a-c\notin X$, $\forall b<a\Rightarrow -a-c<-b-c$,从而$-b-c\notin X\Rightarrow b\in Y$,故 Y 满足分划定义中的(ii).

令 $d=a+(c/2)\Rightarrow a<d$ 且 $-d-(c/2)=-a-c\notin X\Rightarrow d\in Y$, 即 Y 满足分划定义中的 (iii).

综上所述, $Y\in \boldsymbol{R}$.

$\forall a\in X+Y\Rightarrow a=b+c$, 其中 $b\in X$, $c\in Y$. 因 $c\in Y\Rightarrow \exists d>0$, 使$-c-d\notin X$, 而 $b\in X\Rightarrow b<-c-d$, 所以 $b+c<0$, 即 $a=b+c\in\bar{0}$,故 $X+Y\subset\bar{0}$.

$\forall e\in\bar{0}$, 令 $f=-e/2\Rightarrow f>0$, 因 $\boldsymbol{Q}$ 具有阿基米德原理$\Rightarrow \exists n\in\boldsymbol{Z}$, 使 $nf\in X$, 但 $(n+1)f\notin X$. 令 $a=-(n+2)f\Rightarrow -a-f=(n+1)f\notin X$,所以 $a\in Y$,从而 $e=-2f=nf+a\in X+Y$,故 $\bar{0}\subset X+Y$.

综上所述,$X+Y=\bar{0}$. 记 $Y=-X$,则有 $X+(-X)=\bar{0}$.

II.3 设 $Y<Z$. $\forall X\in\boldsymbol{R}$, 由 $\boldsymbol{R}$ 中加法定义易知 $X+Y\subset X+Z$. 假若 $X+Y=X+Z$, 由 I.1, I.3,I.4 $\Rightarrow Y=Z$, 矛盾! 故 $X+Y<X+Z$.

由此易知 $X>\bar{0}\Longleftrightarrow -X<\bar{0}$.

第二步. 记 $\boldsymbol{R}^+=\{X\in\boldsymbol{R}\mid X>\bar{0}\}$, 首先要在 $\boldsymbol{R}^+$ 中定义乘法运算,并证明它满足域公理中的 I.5—I.9. $\forall X,Y\in\boldsymbol{R}^+$, 规定

$XY=\{a\in\boldsymbol{Q}\mid$ 存在 b: $0<b\in X$ 及 c: $0<c\in Y$,使 $a<bc\}$.

先证 XY 是一个分划,即证 $XY\in\boldsymbol{R}$. 由此得 $XY\in\boldsymbol{R}^+$.

(i) 取 $b_1,c_1\in\boldsymbol{Q}$, 且 $0<b_1\notin X$, $0<c_1\notin Y$, 记 $a_1=b_1c_1\Rightarrow a_1\in\boldsymbol{Q}$ 且 $\forall b\in X,c\in Y,b>0,c>0$ 有 $b<b_1$, $c<c_1\Rightarrow bc<b_1c_1$,所以 $a_1\notin XY$,故 $XY\neq\boldsymbol{Q}$, 显然有 $XY\neq\varnothing$.

(ii) 设 $\forall a\in XY\Rightarrow$ 有 $0<b\in X$ 及 $0<c\in Y$,使 $a<bc$, $\forall a'<a\Rightarrow a'<bc$, 故 $a'\in XY$.

(iii) $\forall a\in XY\Rightarrow$ 有 $0<b\in X$ 及 $0<c\in Y$，使 $a<bc$，取 $b_1\in X$，$c_1\in Y$ 使 $b<b_1$，$c<c_1$，记

$$a_1=\frac{b+b_1}{2}\cdot\frac{c+c_1}{2}\Rightarrow a<a_1<b_1c_1,$$

故 $a_1\in XY$，即 XY 无最大数。

综上所述，$XY\in\boldsymbol{R}$. 因 X,Y 都含正有理数，$\forall a\in\bar{0}$，有 $a\in XY$，从而有 $\bar{0}<XY$，故 $XY\in\boldsymbol{R}^+$.

其次证明在 $\boldsymbol{R}^+$ 中乘法满足公理 I.5-I.9.

I.5 设 $X,Y,Z\in\boldsymbol{R}^+$. $\forall a\in X(YZ)\Rightarrow\exists 0<b\in X,\exists 0<c\in YZ$，使 $a<bc$. 由 $c\in YZ\Rightarrow\exists 0<d\in Y,\exists 0<e\in Z$，使 $c<de\Rightarrow a<bc<b(de)=(bd)e$，由 $b\in X\Rightarrow\exists b_1\in X$，使 $b<b_1$，由 $d\in Y\Rightarrow\exists d_1\in Y$，使 $d<d_1$ 于是 $bd<b_1d_1$ 且 $b_1>0,d_1>0$，所以 $bd\in XY$，故 $a\in(XY)Z\Rightarrow X(YZ)\subset(XY)Z$. 同理可证 $(XY)Z\subset X(YZ)$. 故 $(XY)Z=X(YZ)$.

I.6 设 $X,Y\in\boldsymbol{R}^+$，由 XY 的定义及 $\boldsymbol{Q}$ 满足交换律易知

$$XY=YX.$$

I.7 规定

$$\bar{1}=\{a\in\boldsymbol{Q}\mid a<1\}.$$

显然 $\bar{1}\neq\bar{0},\bar{1}\in\boldsymbol{R}^+$.

设 $X\in\boldsymbol{R}^+$，$\forall a\in X\bar{1}\Rightarrow\exists 0<b\in X$，$\exists 0<c\in\bar{1}$，使 $a<bc<b\Rightarrow a\in X$，故 $X\bar{1}\subset X$.

$\forall a\in X\Rightarrow\exists 0<a'\in X$，使 $a<a'$，记

$$b=\frac{a+a'}{2a'}\Rightarrow 0<b<1,$$

所以 $b\in\bar{1}$，由

$$a<\frac{a+a'}{2}=a'\frac{a+a'}{2a'}=a'b\Rightarrow a\in X\bar{1},$$

故 $X\subset X\bar{1}$.

故 $X\bar{1}=X$.

I.8 $\forall X\in \boldsymbol{R}^+$,令

$Y=\{a\in \boldsymbol{Q}|a\leqslant 0\}\cup\{a\in\boldsymbol{Q}|a>0,\ \exists c>1$, 使 $1/(ac)\notin X\}$ 即 $0<b\in Y\Longleftrightarrow$ 有比 $1/a$ 小的有理数 $1/(ac)$ $(c>1)$ 不在X中。

下面要证 $Y\in\boldsymbol{R}$ 且 $XY=\bar{1}$.

取 $0<b\notin X$,令 $d=1/(2b)\Rightarrow 1/(2d)=b\notin X$, 所以 $d\in Y\Rightarrow Y\neq\varnothing$. 取 $0<e\in X$, $\forall c>1$,由

$$\frac{1}{(1/e)c}<e\Rightarrow\frac{1}{(1/e)c}\in X,$$

故 $\frac{1}{e}\notin Y\Rightarrow Y\neq\boldsymbol{Q}$,故$Y$满足分划定义中的(i).

设 $a\in Y$,且 $a>0\Rightarrow\exists c>1$,使 $1/(ac)\notin X$, $\forall b:0<b<a\Rightarrow 1/(ac)<1/(bc)$,从而 $1/(bc)\notin X\Rightarrow b\in Y$. 当 $a\leqslant 0,\forall b<a\Rightarrow b\in Y$. 故$Y$满足分划定义中的(ii).

$\forall a\in Y$, 且 $a>0\Rightarrow\exists c>1$, 使 $1/(ac)\notin X$, 取 $c':1<c'<c$,令 $d=ac'\Rightarrow d>a$ 且

$$\frac{1}{d(c/c')}=\frac{1}{ac}\notin X$$

(其中 $c/c'>1)\Rightarrow d\in Y$. 当 $a\leqslant 0$,有 $0\in Y$,故Y满足分划定义中的(iii).

综上所述, $Y\in\boldsymbol{R}$,显然也有 $Y\in\boldsymbol{R}^+$.

$\forall a\in XY\Rightarrow\exists b:0<b\in X$ 及 $c:0<c\in Y$, 使 $a<bc$. 由 $0<c\in Y\Rightarrow\exists d>1$,使 $1/cd\notin X$, 而 $b\in X\Rightarrow b<1/cd$. 于是 $a<bc<1/d<1\Rightarrow a\in\bar{1}$,故 $XY\subset\bar{1}$.

$\forall e\in\bar{1}$,当 $e\leqslant 0$,显然有 $e\in XY$;当 $e>0$,只要证明: $\exists f:0<f\in X$ 及 $g:0<g\in Y$,使 $e<fg$ 即可

事实上,$\forall h:0<h\in X$,由于 $h(1-e)>0$, 由 $\boldsymbol{Q}$具有阿基

米德原理可证[*]: $\exists f \in X$ 及 $p \bar{\in} X$, 使 $p - f = h(1 - e)$. 由 $h \in X$, $p \bar{\in} X \Rightarrow h < p \Rightarrow f = (p - h) + he > 0$. 又 $p - f = h(1 - e) < p(1 - e) \Rightarrow pe < f$,即 $f/pe > 1$,再由

$$\frac{1}{(e/f)(f/pe)} = p \bar{\in} X \Rightarrow 0 < e/f \in Y,$$

故 $\exists g: e/f < g \in Y$,于是 $e < fg \Rightarrow e \in XY$,故 $\bar{1} \subset XY$.

综上所述,$XY = \bar{1}$,记 $Y = 1/X$,则有 $X(1/X) = \bar{1}$.

I.9. $\forall a: 0 < a \in X(Y + Z) \Rightarrow \exists b: 0 < b \in X$, $\exists c: 0 < c \in Y$, $\exists d: 0 < d \in Z$, 使 $a < b(c + d) = bc + bd$. 显然 $bc \in XY$, $bd \in XZ \Rightarrow bc + bd \in XY + XZ$,于是 $a \in XY + XZ$,故 $X(Y + Z) \subset XY + XZ$.

$\forall e: 0 < e \in XY + XZ \Rightarrow \exists f: 0 < f \in X$, $\exists g: 0 < g \in Y$, $\exists p: 0 < p \in X$, $\exists q: 0 < q \in Z$,使 $e < fg + pq$. 取 $h: \max(f, p) < h \in X \Rightarrow e < fg + pq < h(g + q) \Rightarrow e \in X(Y + Z)$. 故 $XY + XZ \subset X(Y + Z)$

综上所述, $X(Y + Z) = XY + XZ$.

现在要在 $\boldsymbol{R}$ 中定义乘法运算, 并证明它满足域公理中的 I.5—I.9 及序公理中的 II.4.

规定 $\boldsymbol{R}$ 中的乘法为

$$XY = \begin{cases} \bar{0}, & X = \bar{0} \text{ 或 } Y = \bar{0} \\ (-X)(-Y), & X < \bar{0}, Y < \bar{0}, \\ -[(-X)Y], & X < \bar{0},\ Y > \bar{0}, \\ -[X(-Y)], & X > \bar{0}, Y < \bar{0}. \end{cases}$$

只要重复运用 $X = -(-X)$ 就能证明公理 I.5—I.8. 在证

*) 令 $q = h(1 - e)$, 取 $a_0 \in X$, $\bar{a}_0 \bar{\in} X$, 由 $\boldsymbol{Q}$ 的阿基米德原理 $\Rightarrow \exists n_0 \in \boldsymbol{N}$, 使 $n_0 q > \bar{a}_0 - a_0 \Rightarrow n_0 q + a_0 > \bar{a}_0$. 于是 $n_0 q + a_0 \bar{\in} X$, 记 $E = \{n \in \boldsymbol{N} \mid nq + a_0 \bar{\in} X\} \Rightarrow E \neq \varnothing$, 据 $\boldsymbol{N}$ 的最小数原理 $\Rightarrow E$ 有最小数 n_1. 当 $n_1 = 1$, 取 $f = a_0$, $p = a_0 + q$; 当 $n_1 > 1$, 取 $f = (n_1 - 1)q + a_0$, $p = n_1 q + a_0$ 即可.

明 I.9 (分配律)时,需要分情形讨论,例如,当 $X > \bar{0}$, $Y < \bar{0}$, $Y + Z > \bar{0}$ 时,有 $Z = (Y + Z) + (-Y)$, 因 $\boldsymbol{R}^+$ 中分配律成立,所以

$$XZ = X(Y + Z) + X(-Y),$$

但 $X(-Y) = -(XY)$, 于是 $XY + XZ = X(Y + Z)$, 其它情形可类似处理. 关于 II.4 的证明,只要注意在 $\boldsymbol{R}^+$ 中, 由 $X, Y \in \boldsymbol{R}^+ \Rightarrow XY \in \boldsymbol{R}^+$. 再由刚证明的 $\boldsymbol{R}$ 中的域公理及已证明的 II.3 即可证明 II.4. 到此定理已全部证明. □

【定理 1.3】 $\boldsymbol{R}$ 是具有最小上界性质的有序域.

【证明】 (所谓 $\boldsymbol{R}$ 具有最小上界性质是指 $\boldsymbol{R}$ 的任一非空有上界的集必有上确界(最小上界).)

设 $\varnothing \neq A \subset \boldsymbol{R}, Y \in \boldsymbol{R}$ 是 A 的一个上界. 设 Z 是所有 $X \in A$ 的并集(X 是 $\boldsymbol{Q}$ 的子集)即

$$Z = \{a \in \boldsymbol{Q} | \exists X \in A, 使\ a \in X\}.$$

现在要证 $Z \in \boldsymbol{R}$ 且 $Z = \sup A$.

因为 $A \neq \varnothing \Rightarrow \exists X_0 \in A$, 由 $X_0 \neq \varnothing$, $X_0 \subset Z \Rightarrow Z \neq \varnothing$. 又 $\forall X \in A$, 有 $X \subset Y$, 故 $Z \subset Y \neq \boldsymbol{Q} \Rightarrow Z \neq \boldsymbol{Q}$, 故 Z 满足分划定义中的 (i).

$a \in Z \Rightarrow \exists X_1 \in A$, 使 $a \in X_1 \subset Z \Rightarrow \forall b < a$, 有 $b \in X_1$, 从而 $b \in Z$, 故 Z 满足分划定义中的 (ii).

$\forall a \in Z \Rightarrow \exists X_1 \in A$, 使 $a \in X_1 \subset Z \Rightarrow \exists c > a$, 且 $c \in X_1$ 从而 $c \in Z$, 故 Z 满足分划定义中的 (iii).

综上可得 $Z \in \boldsymbol{R}$.

显然 $\forall X \in A$, 有 $X \subset Z \Rightarrow X \leqslant Z$, $\forall Z_1 < Z$, 有 $z \in Z$, 而 $z \not\leqslant Z_1 \Rightarrow \exists X \in A$, 使 $z \in X$,因而 $Z_1 < X$. 所以 Z_1 不是 A 的上界. 故 $Z = \sup A$. □

【推论】 $\boldsymbol{R}$ 的任一非空有下界的集必有下确界.

【定理 1.4】 $\boldsymbol{R}$ 是满足连续公理(分划原理)的有序域.

【证明】 设 $\varnothing \neq A \subset \boldsymbol{R}$，$\varnothing \neq B \subset \boldsymbol{R}$，且 $\forall X \in A$，$\forall Y \in B$，有 $X \leqslant Y$。显然，A 有上界，B 有下界。由定理 1.3 $\Rightarrow Z = \sup A$ 存在 $\Rightarrow \forall X \in A$，有 $X \leqslant Z$。又 B 中每个 Y 都是 A 的一个上界 $\Rightarrow Z \leqslant Y$。即 $\exists Z \in \boldsymbol{R}$，$\forall X \in A$，$\forall Y \in B$。有 $X \leqslant Z \leqslant Y$。故分划原理成立。结合定理 1.2 知 $\boldsymbol{R}$ 是满足连续公理（分划原理）的有序域。 □

到此我们通过分划（有理数集的子集）的方法由有理数域构造出了满足实数三组公理的实数域，全部完成了实数域存在性的证明。

还剩下一个问题就是。如何理解原来的有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 是上述构造出来的实数域 $\boldsymbol{R}$ 的子集呢？这只要把原来的每个有理数看成一个分划就行了，即 $\forall p \in \boldsymbol{Q}$。令

$$p^* = \{r \in \boldsymbol{Q} \mid r < p \in \boldsymbol{Q}\}$$

显然每个 p^* 是一个分划（有理分划），即 $p^* \in \boldsymbol{R}$，可以证明

(i) $p^* + q^* = (p + q)^*$,

(ii) $p^* q^* = (pq)^*$,

(iii) $p^* < q^* \Longleftrightarrow p < q$.

如果把所有有理分划 p^* 构成的集记作 $\boldsymbol{Q}^*$。由 (i) (ii) (iii) 知 $\boldsymbol{Q}^*$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 是同构的，显然 $\boldsymbol{Q}^*$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 的元素并不一样，但从运算关系与顺序关系角度看它们具有相同的功能。因此，在同构的意义上，我们把 $\boldsymbol{Q}^*$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 看成一样，也就是在这个意义上，我们把 $\boldsymbol{Q}$ 看成 $\boldsymbol{R}$ 的子集。

§2 实数域连续公理的等价命题

在第二册第四章中，我们已经介绍了实数域的连续公理的七个等价命题。

① 分划原理（第二册. p.3）

② 确界原理(第二册. p.8)

③ 单调数列收敛原理(第二册. p.21)

④ 柯西收敛原理与阿基米德原理(第二册. p.25)

⑤ 闭区间套原理与阿基米德原理(第二册. p.15)

⑥ 列紧性原理(第二册. p.38)

⑦ 有限覆盖原理(第二册. p.43)

但是我们并没有解决它们之间的等价性问题. 在第二册中, 我们已证明了以下的逻辑关系

$$①\Longleftrightarrow ②\Rightarrow ③, ⑤\Rightarrow ⑦\Rightarrow ⑥, ⑤\Rightarrow ④$$

其中 ①⇒②, 见 p.8 的定理 1.2,

②⇒① 见 p.14 最后几行,

②⇒③ 见 p.21 的定理 2.1,

⑤⇒⑦ 见 p.43 的定理 2.12,

⑦⇒⑥ 见 p.44 的例 5,

⑤⇒④ 见 p.25 的定理 2.3.

如果能补充证明

$$③\Rightarrow ⑤, ⑥\Rightarrow ②, ④\Rightarrow ⑤,$$

那么就证明了上述七个命题是互相等价的.

【定理 2.1】 若③(单调数列收敛原理)成立则⑤(闭区间套原理与阿基米德原理)也成立.

【证明】 (i) 先由 ③ 证阿基米德原理: $\forall \varepsilon > 0$, $a > 0$, 必 $\exists n \in \boldsymbol{N}$, 使 $n\varepsilon > a$.

采用反证法,假若 $\varepsilon < 2\varepsilon < 3\varepsilon < \cdots < n\varepsilon < \cdots \leqslant a$, 由 ③$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\varepsilon = l$ 存在$\Rightarrow \exists N, \forall n > N$, 有$|n\varepsilon - l| < \varepsilon/2$, 由此得

$$\varepsilon = |(n+1)\varepsilon - n\varepsilon| \leqslant |(n+1)\varepsilon - l| + |n\varepsilon - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

上述矛盾表明阿基米德原理成立.