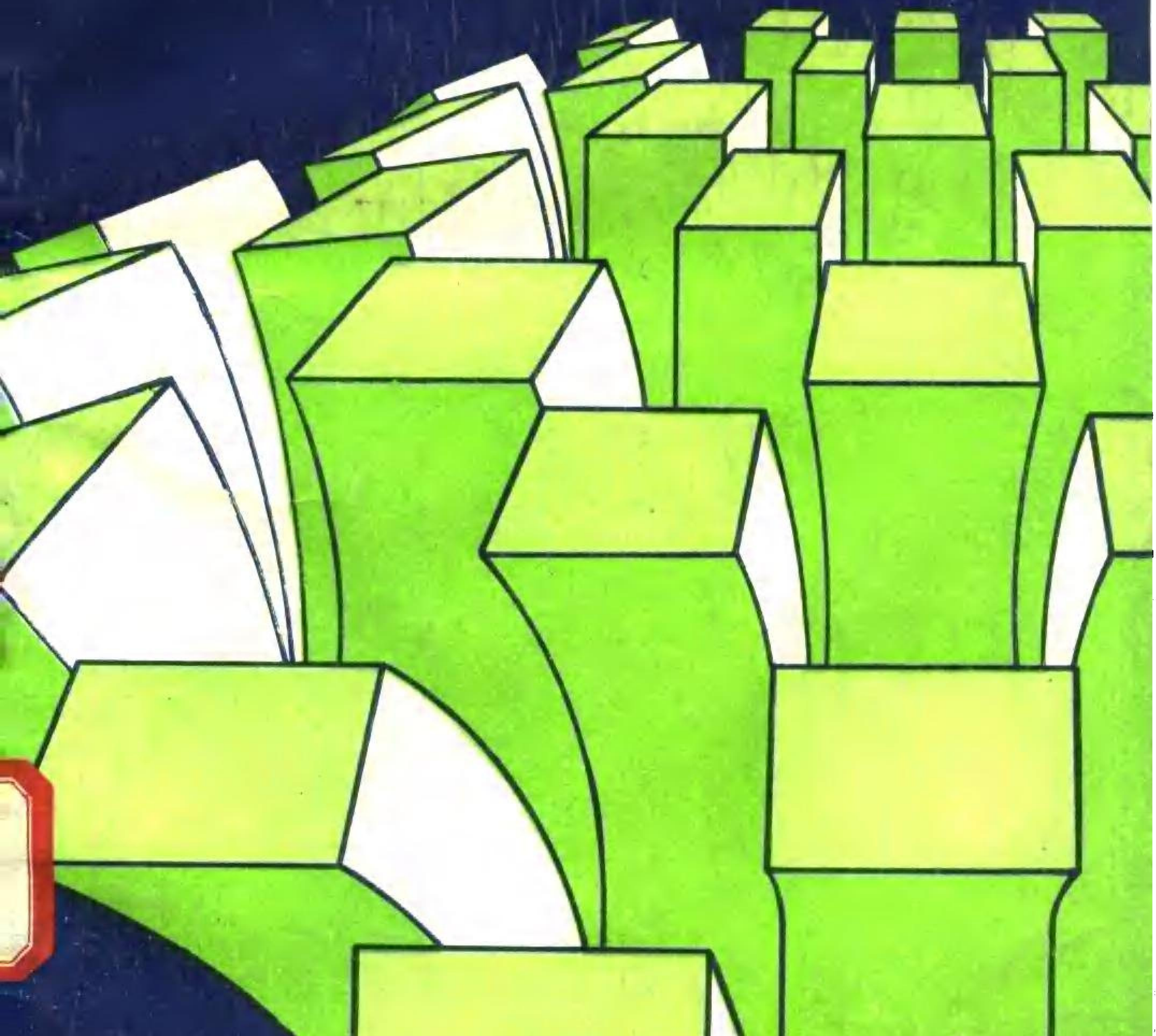
GUTILIXUE BIANFEN YUANLI JIQI YINGYONG

固体力学变分原理及其应用

张汝清 编著 ○ 重庆大学出版社



固体力学变分原理及其应用

张 汝 清 编著

重 庆 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书介绍固体力学中的变分解法．从一般意义上来讲，变分解法不仅能够正确的表达边值问题，而且，对求解这些边值问题的近似解是十分有效的．因此，在固体力学中有着十分广泛的应用。

本书共分七章，系统地介绍了固体力学中静力和动力问题，线性和非线性问题的变分原理和广义变分原理；作为在主要方面的应用，同时介绍了固体力学中静力和动力问题，线性和非线性问题位移协调元、应力协调元、混合有限元、杂交元等的变分原理。在本书的末尾，还介绍了薄板弯曲问题的变分原理和协调有限元的变分原理。

本书可作为力学专业和其它工程学科的研究生、高年级本科生的教材或参考书，也可作为广大工程技术人员、力学科学研究人员的参考书。

固体力学变分原理及其应用

张汝清　编著

责任编辑　蒋怒安

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重　庆　印　制　第　一　厂　印　刷

*

开本：787×1092　1/16　　印张：11.25　　字数：280 千

1991年 8 月第 1 版　　1991年 8 月第 1 次印刷

印数：1—2000

标准书号：ISBN 7-5624-0421-6 / O·60　定价：5.60元

前　言

固体力学的边值问题，在数学上就是空间连续场的确定问题，因而它可归结为泛函变分的极值问题或驻值问题的求解。这就是通常人们所说的变分解法。换句话说，这种变分解法，就是把一个给定的原来用控制微分方程连同边界条件求解的问题，替换为一个与之等价的比原来更易求解的泛函极值或驻值的求解问题。更重要的是，当所给定的问题不能够精确的求解时，变分解法则可给问题提供一种近似的求解方法，由此得到相应的近似解。从另一种意义上来讲，变分解法还能绕过给定问题的控制微分方程而求得近似的解。当前，对于固体力学问题，除了一些特殊情形而外，几乎不大可能得到问题的精确解，所以，寻求问题的近似解，以满足工程设计中的需要，是固体力学应用中的一个重要课题。显然，研究固体力学中的变分解法，就具有重要的理论意义和实用意义。这就是作者编写此书的目的。

归纳起来，本书研究的内容，一是介绍固体力学问题的变分解法，它包括静力和动力问题，线性和非线性问题。即是通过建立给定问题的泛函，由变分极值或驻值条件，提供给定问题的控制方程（即Euler方程和自然边界条件）并与原问题的控制方程等价。二是对给定问题泛函中的变量，用近似的试函数表示(主要是作有限元离散)，再由变分的极值或驻值条件，得到代数方程组，从而求得原给定问题的近似解。我们把前者称为固体力学的变分原理，而把后者称为变分原理在固体力学中的应用。

全书共分七章。第一章主要是从数学的角度，以一般的形式给出了泛函极值问题的公式系统。与此同时，从应用的角度出发，也从一般的形式上介绍了Ritz法，有限元法，加权残值法，Galerkin法和最小二乘法等近似解法的公式系统。

第二章和第三章，分别介绍小变形弹性体静力和动力问题的变分原理，广义变分原理，以及位移协调元，应力协调元，混合有限元，杂交元等变分原理和广义变分原理。

第四章主要介绍非线性弹性体静力和动力问题的变分原理，广义变分原理以及位移协调元和混合有限元的变分原理和广义变分原理。

第五章着重介绍有限位移变形弹性体静力和动力问题的变分原理，广义变分原理以及位移协调元和混合有限元的变分原理和广义变分原理。

第六章主要介绍塑性形变理论和塑性流动理论中的变分原理和位移协调元的变分原理。

第七章主要介绍薄板弯曲问题的变分原理、广义变分原理以及协调元的广义变分原理。

全书许多章节的内容是根据所列出的参考文献编写的。其中的一部分内容，主要是动力问题反映了作者近十年的教学体会和研究工作的一些成果。

本书可作为力学专业和其它工程科学的研究生，高年级本科生的教材或参考书，也可作为广大工程技术人员、力学科学研究人员的参考书。

由于作者水平有限，书中难免存在缺点或错误，敬请读者批评指正。

张汝清

1990年8月于重庆大学

目　录

第一章 绪 论

§1.1 引 言

本书是介绍变分解法在固体力学中的应用。通常称之为固体力学的变分原理。

固体力学边值问题，在数学上就是空间连续场的确定问题，可归结为微分方程的求解问题，亦可归结为泛函变分的极值或驻值的求解问题，后者称之为变分解法，这二者是等价的。

从一般意义上来讲，变分解法不仅能正确的表达边值问题，而且，对求解这些边值问题的近似解是十分有效的。尤其是固体力学的问题，人们不满足于得到给定问题的变分原理，而把注意力集中在寻找它的近似解法上。这是因为固体力学问题，除了一些特殊的情形而外，几乎不大可能得到问题的精确解。所以，寻求问题的近似解，以满足工程问题的需要是很有必要的，这也就是固体力学变分原理得到迅速发展的一个重要原因。

总括起来，我们可把固体力学问题的变分解法分成如下两个方面。

（1）把一个给定的原来用控制微分方程连同边界条件求解的问题，替换成一个与之等价的由泛函极值或驻值的求解问题，即是研究固体力学中的各种变分原理。

（2）对给定问题所建立的泛函中，将自变量函数，用近似的试函数表示，再由变分的极值或驻值条件，从而求得原给定问题的近似解，即是研究固体力学中近似解法。

本书把前者称为固体力学的变分原理，后者称为变分原理的应用。

现在，进一步将上述两个方面的问题用最一般的术语提出如下：

（1）设所给定的问题，我们要寻求的未知函数为 $\mathbf{u}$，使得它在求解域 Ω 中满足微分方程组

$$\mathbf{A}(\mathbf{u})=\begin{bmatrix} A_1(\mathbf{u}) \\ A_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{bmatrix}=0 \quad （在\Omega内） \tag{1.1}$$

并在该域的边界 Γ 上满足某些边界条件

$$\mathbf{B}(\mathbf{u})=\begin{bmatrix} B_1(\mathbf{u}) \\ B_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{bmatrix}=0 \quad （在\Gamma上） \tag{1.2}$$

待求的函数可以是一个标量，也可以是若干变量所组成的一个向量。同样，微分方程可以是单个方程或联立方程组。正因为如此，在上面我们用了矩阵符号。

如果微分方程组是线性的，可把式(1.1)和(1.2)改写成

$$\mathbf{A}(\mathbf{u})=\mathbf{L}\mathbf{u}+\mathbf{p}=0 \qquad （在\Omega内） \tag{1.3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{u})=\mathbf{M}\mathbf{u}+\mathbf{t}=0 \qquad （在\Gamma上） \tag{1.4}$$

现在，我们不去寻找式(1.1)和(1.2)[或式(1.3)和(1.4)]的解，因为对大量的工程问题，这在客观上有不可克服的困难。而把原给定问题改提成为与之等价的泛函的极值或驻值求解

问题。

设有以下积分形式的泛函

$$\Pi=\int_{\Omega}F\left(\mathbf{u},\ \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}\cdots\right)d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma}E\left(\mathbf{u},\ \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}\cdots\right)d\Gamma \tag{1.5}$$

式中，$\mathbf{u}$是未知函数，F和E是给定的算子。对于小变化$\delta\mathbf{u}$使Π取极值或驻值的函数$\mathbf{u}$，就是连续体问题的解。因此，对于连续体问题的解，有变分极值或驻值条件，即

$$\delta\Pi=0 \tag{1.6}$$

这就叫做变分原理。

不难得知，为使Π取极值或驻值，由式(1.5)经过某些运算之后，我们可以写出

$$\delta\Pi=\int_{\Omega}\delta\mathbf{u}^T\mathbf{A}(\mathbf{u})d\Omega+\int_{\Gamma}\delta\mathbf{u}^T\mathbf{B}(\mathbf{u})d\Gamma=0 \tag{1.7}$$

因为上式必须对于任意的变分$\delta\mathbf{u}$都成立，所以，必有

$$\mathbf{A}(\mathbf{u})=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{1.8a}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{u})=0 \qquad (\text{在}\Gamma\text{上}) \tag{1.8b}$$

不难证明，$\mathbf{A}(\mathbf{u})=0$，正好对应于原给定问题的控制微分方 程，而$\mathbf{B}(\mathbf{u})=0$，正好对应于原给定问题的边界条件。式(1.8) 称为 Euler 微分方程。也很容易证明，对于任一变分原理都可以建立相应的Euler方程组。

以上表明了原微分方程组的求解问题，等价于泛函变分的极值或驻值的求解问题。

（2） 如果能找到一个变分原理，则就能给原问题提供一种近似的求解公式，由此，得到与所采用的近似程度相应的解。

例如，当前在固体力学中广泛应用的有限元法，就是来自变分原理的一种近似解法，它寻求如下形式的近似解

$$\mathbf{u}\approx\hat{\mathbf{u}}=\sum\mathbf{N}_i\mathbf{a}_i=\mathbf{N}\mathbf{a} \tag{1.9}$$

式中，$\mathbf{N}_i$ 是通过自变量(如象坐标x，y等)给定的形状函数，而参数 $\mathbf{a}_i$ 的全部或一部分是未知量。

若把式(1.9)代入式(1.5)，并取变分后写成

$$\delta\Pi=\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_1}\delta\mathbf{a}_1+\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_2}\delta\mathbf{a}_2+\cdots=\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}}\delta\mathbf{a}=0 \tag{1.10}$$

上式应对任意的$\delta\mathbf{a}$均成立，于是，便得到方程组为

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_1}\\[2ex]\dfrac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_2}\\ \vdots\end{Bmatrix}=0 \tag{1.11}$$

由此可求出参数$\mathbf{a}_i$。

如果泛函Π是二次函数，即函数$\mathbf{u}$及其导数以幂次不超过2的形式出现，则式(1.11)可化为标准的线性形式，即

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}}=\mathbf{K a}+\mathbf{f}=0 \tag{1.12}$$

容易证明，矩阵K总是对称的。因此，当变分原理存在时，便有对称的矩阵，这个事实是变分离散化法的重要优点之一。

在本书的以后各章里，将围绕上述两个方面的问题进行详细的讨论。

值得庆幸的是，对于连续体问题建立相应的变分原理总是可能的。通常，根据问题的物理本质就能够以变分原理的形式直接描述。此外，对于任何可用微分方程描述的问题，总是能够建立各种广义变分原理，其办法是运用Lagrange乘子的附加变量来扩大未知函数u的数目。

通常，人们在寻找各种近似解法时，可从两个途径入手。一是直接从已有的泛函极值得到的Euler微分方程去寻它的近似解法。比如，Galerkin法和加权残值法就是这类近似解法。另一个途径就是直接由泛函离散，通过变分取其极值或驻值，寻找与之相应的微分方程的近似解法。比如，古老的Ritz解法和当前应用十分广泛的有限元法，就属于这类解法。显然，后面这类解法，可以避免建立问题的控制微分方程，因而它对许多问题、特别是对许多复杂的边值问题的求解是十分有效的，已出现了广阔的应用前景。

固体力学变分原理的研究和应用，在我国已出现了新的局面，这无论在广度和深度上都达到了新的水平，影响到力学和数学的许多分支。

值得指出的是在近似解法方面，已提出了许多新的有限元模型的变分原理。

从多变量广义变分原理的离散，提出了非协调元，混合有限元以及混合杂交元。文[15]基于修正的Hellinger-Reissner变分原理，导出了一个12自由度矩形杂交应力弯曲板元，并利用此杂交模型，求解了加筋平板的弹塑性屈曲问题，获得了满意的结果。文[10]利用二类变量广义变分原理，推导出六结点三角形壳体应力杂交元，计算了多种形式的加筋球壳。文[11]成功地将杂交/混合有限元模型应用于二维裂纹分析中，并推导出杂交/混合奇异有限元模型。它比传统的位移法和杂交法更具有一般性和灵活性。文[12]构造出用于空间弹塑性分析的杂交混合元，从算例表明，杂交混合元用于空间弹塑性分析，能获得比位移法和杂交法更好的精度。

对线弹性动力分析的变分原理，文[6]从Gurtin变分原理离散，提出了时间对偶有限元，导出了求解动力响应的两种方法。从提高动态应力分析精度出发，文[7]提出了动力分析中的广义变分原理及有限元混合法。对于结构受冲击加载问题，可分为高速和低速冲击，文[9]已提出了考虑计及几何非线性的低速冲击问题的混合变量板壳有限元。文[8]提出了Fourier变换的谱分解变分原理，非线性弹-粘动力问题的谱分解变分原理和弹-粘-孔隙介质力学固结和次固结Laplace变换的变分原理。

在塑性力学方面，文[16]提出了塑性力学中的参变量变分原理的有限元分析，它以位移u为变量函数，以增量理论的流动变量λ为参数构造势能泛函，从极值条件得出满足平衡和屈服条件的塑性位移场。文[17]又进一步以λ作为试函数，提出了塑性理论中的二阶段最小变分原理，提供了求解塑性力学问题的完整解答。

文[13]提出了分区混合能量原理和混合有限元，文[14]由分区混合有限元，提出了一种奇异应力单元，可用于带有各种角度角区结构应力分析。

总的来讲，变分原理是计算力学的重要组成部分，无论在理论上和实用上都有重要价

值。它的研究和应用，必将促进计算力学的发展。

§1.2 泛函的一阶变分

一般地讲，泛函就是函数的函数。因而泛函是一个函数的表达式，它的取值决定于该表达式中的函数。在应用数学领域中所使用的一种泛函形式，是在二维空间中从点 (x_1, y_1) 至 (x_2, y_2) 积分 $F(x,y,y')$。用 Π 表示这个泛函，有

$$\Pi=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{1.13}$$

显然，对于一组给定的端点 x_1 和 x_2，Π 的数值将依赖于函数 $y(x)$。这正如同函数 $f(x)$ 依赖于 x 值一样，泛函 Π 的数值是依赖于函数 $y(x)$。又正如同我们根据 x 的容许值，可以建立函数 f 在某一点处为局部极值的必要条件一样，我们也可以找到泛函 Π 相对于一组容许函数 $y(x)$ 为极值的必要条件。这样一个求泛函极值的过程是变分解法的一个重要组成部分，它比起微积分学中求函数极值问题要复杂得多。

现研究式(1.13)的泛函变分问题。

设在自变量 x 的区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 内，决定一个函数 $y(x)$，使它满足端点条件

$$y(a)=\alpha,\ y(b)=\beta \tag{1.14}$$

并使泛函

$$\Pi=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{1.15}$$

取极值。

其中，F 为已知函数，这个函数对于变量 x，y 和 y' 为二次可微。

参看图1.1，其中，G $(x=a,\ y=\alpha)$ 和 $H(x=b,\ y=\beta)$ 是已知的两点，问题是要在 G，H 之间连接一条曲线，使泛函 Π 取极值。

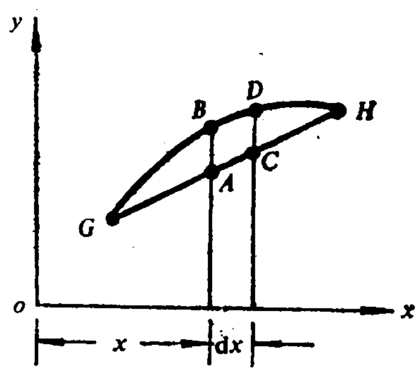


图1.1

设 $y(x)$ 为满足式(1.14)端点条件的式(1.15)中 $\Pi(y)$ 的极值解，其邻近的函数为 $y(x)+\delta y(x)$，也同样满足端点条件式(1.14)，所以，函数的变分满足

$$\delta y(a)=\delta y(b)=0$$

泛函的变分为

$$\begin{aligned}\delta\Pi&=\Pi(y+\delta y)-\Pi(y)\\&=\int_a^b\{F(x,y+\delta y,\ y'+\delta y')-F(x,y,y')\}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.16}$$

根据微量计算的规则，设 $y(x)$ 和 $y(x)+\delta y(x)$ 是有一阶接近度的曲线，即是两条曲线的函数值和导数值差到处都很小。则

$$\begin{aligned}F(x,y+\delta y,\ y'+\delta y')=&F(x,y,y')+\left[\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,y')\right]\delta y\\&+\left[\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')\right]\delta y'\end{aligned} \tag{1.17}$$

以后简记

$$F=F(x,y,y')$$

$$F_y=\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,y'),\quad F_{y'}=\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y') \tag{1.18}$$

于是，式(1.17)可以写成

$$F(x,y+\delta y,\ y'+\delta y')=F+F_y\delta y+F_{y'}\delta y'$$

将它代入式(1.16)，得

$$\delta\Pi=\int_a^b[F_y\delta y+Fy'\delta_{y'}]\mathrm{d}x \tag{1.19}$$

在下面将证明$y(x)$的导数的变分$\delta y'$等于$y(x)$的变分的导数$(\delta y)'$。亦即导数和变分这两种运算过程的先后次序是可以互换的。

在图1.1中，A，B，C三点的纵坐标各为

$$A:y,\ B:y+\delta y,\ C:y+\mathrm{d}y=y+y'\mathrm{d}x$$

而D点的纵坐标，若从C点算过去是

$$y+y'\mathrm{d}x+\delta(y+y'\mathrm{d}x)=y+\delta y+(y'+\delta y')\mathrm{d}x$$

若从B点算过去，则是

$$y+\delta y+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y+\delta y)\mathrm{d}x=y+\delta y+[y'+(\delta y)']\mathrm{d}x$$

这两纵坐标是相等的，故有

$$(\delta y)'=\delta y' \tag{1.20}$$

这就证明了导数的变分等于变分的导数的重要关系。把式(1.20)代入式(1.19)，有

$$\delta\Pi=\int_a^b[F_y\delta y+F_{y'}(\delta y)']\mathrm{d}x$$

通过分部积分，得

$$\int_a^b F_{y'}(\delta y)'\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})\delta y\mathrm{d}x+F_{y'}\delta y\Big|_a^b$$

根据式(1.14)的变分端点条件，得

$$\int_a^b F_{y'}(\delta y)'\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})\delta y\mathrm{d}x \tag{1.21}$$

于是，式(1.19)给出的变分极值条件为

$$\delta\Pi=\int_a^b\left[F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]\delta y\mathrm{d}x=0 \tag{1.22}$$

其中，δy是在两端之间任选的，因而在上述积分式中，方括号内的表达式必须为零。所以，有

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0\quad(a\leqslant x\leqslant b) \tag{1.23}$$

上式称为变分问题的Euler方程，有时也称为Euler-Lagrange 方程。如再加上边界条件式(1.14)，通常便能决定极值函数$y(x)$。

式(1.23)是泛函为极值的必要条件，至于这个极值是极大值或是极小值，可通过泛函的

二阶变分来判断。通常是事先从问题的物理性质来确定。

由上述变分的过程，其结果导致了一个常微分方程，即式(1.23)，它是 $y(x)$ 为极值函数时所要满足的必要条件。而且，我们还可利用它来求解极值函数$y(x)$。

显然，对泛函Π的认识，还可推论出以下几点。

（1）除变量x外，泛函中还可以包含有许多其它的独立变量。

（2）除函数 $y(x)$ 外，泛函中还可以包含有许多以上述独立变量为函数的其它函数。

（3）在泛函中，除一阶导数外，还可以包含有高阶导数。

在以后的各节中，将分别研究这些一般的基本问题。

§1.3 自然边界条件

上节研究了函数在两端点的值都是已知的问题。

现在来讨论左端点具有约束条件

$$y(a)=\alpha \tag{1.24a}$$

而右端点$x=b$处自由，而且，在足够光滑的函数$y(x)$中，求使下列泛函

$$\Pi(y)=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{1.24b}$$

为极值的$y(x)$的解，并确定其自然边界条件。

首先，用式(1.16)到(1.19)的相同推导，得

$$\delta\Pi=\int_a^b[F_y\delta y+F_{y'}\delta y']\mathrm{d}x \tag{1.24c}$$

通过分部积分，得

$$\begin{aligned}\int_a^b F_{y'}\delta y'\mathrm{d}x=&-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})\delta y\mathrm{d}x\\&+F_{y'}[b,y(b),y'(b)]\delta y(b)-F_{y'}[a,y(a),y'(a)]\delta y(a)\end{aligned} \tag{1.24d}$$

根据约束条件$y(a)=\alpha$，便有$\delta y(a)=0$，所以，上式简化为

$$\int_a^b F_{y'}\delta y'\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})\delta y\mathrm{d}x+F_{y'}[b,y(b),y'(b)]\delta y(b) \tag{1.24e}$$

最后，求得变分的极值条件为

$$\delta\Pi=\int_a^b\left[F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})\right]\delta y\mathrm{d}x+F_{y'}[b,y(b),y'(b)]\delta y(b)=0 \tag{1.25}$$

其中，由于$x=b$处自由，所以，$\delta y(b)$不等于零。于是，在$a\leqslant x\leqslant b$ 上的变分 $\delta y(x)$ 和端点$x=b$上的变分$\delta y(b)$都是独立的，这样，我们便可从式(1.25)，得到

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})=0 \qquad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{1.26a}$$

$$F_{y'}[b,y(b),y'(b)]=0 \qquad (x=b) \tag{1.26b}$$

式(1.26a)仍是Euler方程，而式(1.26b)就是本问题在右端点的自然边界条件。即是当$y(b)$的值没有给定时所必须满足的边界条件。式(1.26b)也可以写成

$$F_{y'}=0 \qquad (在x=b上) \tag{1.27}$$

在以后我们将会看到，自然边界条件不采用变分法是很难建立起来的。由于这些条件对于正确的提出一个边值问题非常重要，所以，可以说，自然边界条件是变分法的一个极有价值的产物。

§1.4 具有多个自变函数的一阶变分

现在，我们来讨论在泛函的被积函数F中包含有任意多个数目的函数，但独立变量仍然只有一个的情况。这里仍采用一般力学中经常采用的一种符号，即用$q_1,q_2,\cdots,q_n$来表示这些函数，并用t表示独立变量。对于这种情况的泛函可写成

$$\Pi=\int_{t_1}^{t_2}F(q_1,q_2,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)\mathrm{d}t \tag{1.28}$$

其中，$\dot{q}_1=\mathrm{d}q_1/\mathrm{d}t,\cdots$。

现在要求确定一组函数$q_1(t),q_2(t),\cdots,q_n(t)$使泛函$\Pi$相对于一组容许函数取极值。而且，这组函数应当都是二阶可微。

求Π的一阶变分，得到

$$\delta\Pi=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_r}\delta q_r+\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_r}\delta\dot{q}_r\right]\mathrm{d}t \tag{1.29}$$

利用分部积分后，得到

$$\delta\Pi=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial q_r}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_r}\right)\right]\delta q_r\right\}\mathrm{d}t+\left\{\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_r}\delta q_r\right\}\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{1.30}$$

由$\delta\Pi=0$的极值条件，可得到n个微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial q_r}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_r}\right)=0\qquad(r=1,2,\cdots,n) \tag{1.31}$$

以及多种可能的边界条件。

上式(1.31)中的这些方程就是$q_r(t)$为极值函数的必要条件。同时，也称为Euler-Lagrange方程。将F代入后，便得到一组关于$q_r(t)$的二阶常微分方程。这些方程可以是互相关联的，也可以是互不相关的，这主要取决于式(1.28)中的泛函Π所选用的变量q_r。

例1.1 对于一个在保守力系作用下的质点系，Hamilton原理指出，质点系从时间t_1的状态至时间t_2的状态，所经历的运动轨迹必使泛函

$$\Pi=\int_{t_1}^{t_2}(T-V)\mathrm{d}t \tag{a}$$

达到极值，其中，T为质点系的动能，它是质点速度$\dot{x}_r$的函数；V为势能，它是质点坐标x_r的函数。于是，我们就得到一个含有多个自变函数x_r和一个独立变量t的泛函。

这里进一步假设二个质量相同并用三个弹簧互相连接在一起的质点系，如图(1.2)所示。由于不计摩擦约束，系统只能沿水平直线运动。这个系统需要用二个独立的坐标来确定质点的位置。在图中它们用x_1和x_2来表示。当$x_1=x_2=0$时，弹簧没有伸缩。

于是有

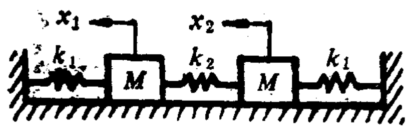


图1.2

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}M\dot{x}_2^2$$

$$V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}k_1x_2^2 \tag{b}$$

因此，对于泛函 Π，有

$$\Pi=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)-\frac{1}{2}[k_1x_1^2+k_2(x_2-x_1)^2+k_1x_2^2]\right\}\mathrm{d}t \tag{c}$$

为了求得Π的极值，可利用式(1.31)，有

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}\right)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}-\frac{\mathrm{d}}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}\right)=0 \tag{d}$$

代入F后，得到

$$-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\dot{x}_1)=0$$

$$-k_1x_2-k_2(x_2-x_1)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\dot{x}_2)=0 \tag{e}$$

将上式改写为

$$M\ddot{x}_1+k_1x_1-k_2(x_2-x_1)=0$$

$$M\ddot{x}_2+k_1x_2+k_2(x_2-x_1)=0 \tag{f}$$

立即可以看出，这些方程与根据 Newton 定律所得到的方程完全相同。因此，从 Euler-Lagrange方程直接导出了在这种情况下的运动方程。利用初始条件$\dot{x}_1(0)$，$\dot{x}_2(0)$，$x_1(0)$ 和 $x_2(0)$，并积分这些方程，就可以确定这个系统的运动。

在这个问题中，我们可很容易地直接应用Newton 定律来导出运动方程，但是，有许多问题，若应用变分法来推导它们却更容易得多。同时，如同即将在后面看到的那样，应用变分法还会带来一些其它方面的优点。

§1.5 具有高阶导数的泛函极值问题

在前面讨论的泛函中，只考虑了一阶导数。在这一节中，将求解极值函数 $y(x)$ 的问题扩大为含有高阶导数的泛函。因此，我们来研究如下的泛函，即

$$\Pi=\int_a^b F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x \tag{1.32}$$

现在把这个问题化为微分方程和相应的边界条件。

求Π的一阶变分，得到

$$\delta\Pi=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''\right]\mathrm{d}x \tag{1.33}$$

利用分部积分，可以把上式中的第二项变为

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b \tag{1.34}$$

类似地，可连用两次分部积分，就把式(1.33)中的第三项化为

$$\int_a^b \frac{\partial E}{\partial y''}\delta y''\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y'\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_a^b$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y\Big|_a^b + \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_a^b \tag{1.35}$$

将式(1.34)和(1.35)代入式(1.33)，并合并同类项后，得到

$$\delta \Pi = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x$$

$$+ \left[\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\delta y\Big|_a^b + \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_a^b \tag{1.36}$$

上式中的第一项，由极值的必要条件$\delta\Pi=0$，得出

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0 \tag{1.37a}$$

它就是Euler方程。对于式(1.36)中的第二项，如果在端点上已知y，那末$\delta y=0$，于是这第二项恒等于零。反之，如果δy可取任意值，则应使之满足自然边界条件

$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0 \tag{1.37b}$$

最后，对于式(1.36)中的第三项作类似的分析，即如果在端点上不是已知y'，则应有

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \tag{1.37c}$$

归纳起来，本问题的边界条件是

在$x=a$及$x=b$处：

$$y = \text{已知，或} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0$$

$$y' = \text{已知，或} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \tag{1.38}$$

从这些结果中，可以看出，当导数的阶数从1逐渐增高时，不难得到建立这些方程的规律性。因此，当建立有导数高于二阶以上的方程时，就能从上述的方程类推而得出。此外，还可以把这些结果推广到含有多个自变函数的泛函Π。而且，对于其中的每一个函数，都能够很简单地得到一个如式(1.37a)一样形式的方程。于是，如果以t为独立变量，$q_1, q_2, \cdots, q_n$为泛函的函数，并且假设在泛函中所有这些函数都是二阶导数，于是，就有

$$\frac{\partial F}{\partial q_r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{q}_r}\right) = 0$$

$$(r = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.39}$$

同样地，对于每一个q，都有一组相对于方程(1.38)一样的边界条件。

例1.2　图1.3所示的直梁弯曲问题。

假设各点的挠度为$w(x)$，向下为正，则各点的弯矩$M(x)$为

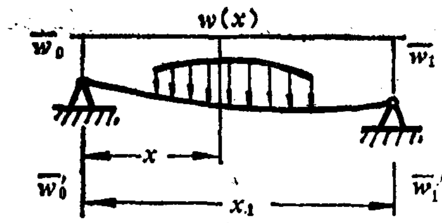


图1.3　两端点位移和斜度已知的直梁

$$M(x)=-EJ\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} \tag{a}$$

其中，$EJ=EJ(x)$为梁的抗弯刚度，这里规定$M(x)$在梁上弯时为正，梁的剪力$Q(x)$为

$$Q(x)=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EJ\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right) \tag{b}$$

当梁的向右的正截面上剪力向下时为正。

设梁受分布载荷$q(x)$，在梁平衡时

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_2}\left(EJ\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)=q(x) \tag{c}$$

梁的端点条件种类很多，图1.3上所给定为

$$\begin{gathered}w(0)=\overline{w}_0,\quad w'(0)=\overline{w}_0' \\ w(x_1)=\overline{w}_1,\quad w'(x_1)=\overline{w}_1'\end{gathered} \tag{d}$$

梁的上述问题就是在端点条件式(d)下求解式(c)。显然，这个问题也可改用变分原理来描述。这里，采用最小势能原理，即在端点条件式(d)的约束下，当梁处于平衡时，挠度曲线$w(x)$的解必使下列泛函

$$\Pi(w)=\int_0^{x_1}\left\{\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2-q(x)w\right\}\mathrm{d}x \tag{e}$$

取极值。

在这种情况下，Euler方程可以根据式(1.37a)得到，即有

$$\frac{\partial E}{\partial w}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right)=0 \tag{f}$$

其中

$$F=\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2-qw \tag{g}$$

所以，可得到Euler方程

$$-q-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(0)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EJ\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)=0 \tag{f}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EJ\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)=q \tag{h}$$

显然，上式也就是梁的平衡方程(c)。

从图1.3中可以看出，如果在两端点上只应用$w(0)=w(x_1)=0$的边界条件，为了求极值，我们还必须在端点附加自然边界条件

$$\frac{\partial F}{\partial w''}=0 \tag{i}$$

将F代入(i)中，得到

$$w''(0)=w''(x_1)=0 \tag{j}$$

可以看出，这个条件表明了在端点的弯矩为零，也就是要求在两端点为无摩擦的铰链。