全国高等林业院校試用教材

高等数学

云南林学院主编

林业专业用

农业出版社

全国高等林业院校试用教材

高 等 数 学

云南林学院数学教研组编

林业系各专业用

农 业 出 版 社

云南林学院数学教研组
编者 王绍颜 雷良橙
马宜中 陈宝丰

全国高等林业院校试用教材
高 等 数 学
云南林学院数学教研组编

农业出版社出版 新华书店北京发行所发行
农业出版社印刷厂印刷

787×1092毫米16开本 21印张 445千字
1978年10月第1版 1978年10月北京第1次印刷
印数 1—25,000册
统一书号 13144·187 定价 1.90元
（限国内发行）

前　　言

这本试用教材，是在落实以华主席为首的党中央抓纲治国战略决策，大力发展社会主义科学教育事业，为在本世纪末把我国建设成为具有现代工业、现代农业、现代国防和现代科学技术的社会主义强国的大好形势下，根据一九七七年十一月全国林业专业教材编写会议制订的林业专业教学计划和课程大纲，为适应当前教学上的需要而编写的。在编写过程中，力求贯彻以下原则：

1. 以马克思、列宁主义，毛泽东思想为指导，贯彻党的教育方针，努力运用辩证唯物主义观点，阐明本课程的基本内容。

2. 力求体现理论联系实际。既要批判“四人帮”破坏基础理论教学，又要防止脱离专业实际盲目加强基础；既要注意本学科的科学性、系统性，又要处理好与专业教学的关系，以符合教学计划的要求。

3. 要删繁就简，贯彻“少而精”的原则。内容力求简明扼要，由浅入深，循序渐进，通俗易懂，便于自学。

本书共三篇十五章，第一篇平面解析几何，是作为复习、参考而编入的，是否讲授，可按实际情况决定。第二篇微积分，是本书的主要部分，讲述微积分的基本内容。这里需要指出的是，函数的极限概念未用$\varepsilon-\delta$语言阐述，因此，有些概念、定理、公式未作严密的论证，根据林业专业的实际需要，着重在微分法、积分法及其应用上，特别是数理统计中常用的内容，尽可能编入，如最小二乘法，函数的线性化，Γ-函数、β-函数等。第三篇线性代数初步，也是为专业所需具备的知识而编的，它对于解线性方程组或现代计算技术均为不可少的。

书中部分附有“*”号，可按实际情况讲授或删除，并不影响前后的连贯。每章末有习题，供教学时选用。书后有初等数学基本公式、积分表及用法举例，以备查阅。

参加制订本书编写大纲和审定初稿的有东北林学院、南京林产工业学院、河北林业专科学校、福建林学院、湖南林学院等单位同志，他们为编写本书提供了许多资料，提出了宝贵意见，在此，我们表示衷心的感谢。

由于编者思想水平和业务水平所限，编写时间匆促，尽管做了许多努力，其中一定仍存在考虑不周、安排欠妥，或错误之处，希望同志们提出批评，以便修改。

编　　者

1978 年 2 月

目　录

绪　言……………………………………………………1

第一篇　平面解析几何

第一章　曲线与方程……………………………………3

第一节　平面坐标法……………………………………3

一、平面直角坐标系……………………………………3

二、有向线段……………………………………5

三、两点间的距离公式……………………………………6

四、中点坐标公式……………………………………6

第二节　曲线与方程……………………………………8

一、曲线……………………………………8

二、曲线的方程……………………………………9

三、曲线方程的求法……………………………………9

四、方程的图形……………………………………10

五、两曲线的交点……………………………………11

习题……………………………………11

第二章　直线……………………………………13

第一节　直线的倾角和斜率……………………………………13

一、概念……………………………………13

二、斜率公式……………………………………13

第二节　平行于坐标轴的直线方程……………………………………15

一、平行于 x 轴的直线方程……………………………………15

二、平行于 y 轴的直线方程……………………………………15

第三节　直线的斜截式方程……………………………………16

一、截距……………………………………16

二、公式……………………………………16

第四节　直线和一次方程……………………………………17

一、任何直线的方程必是含坐标 x、y 的一次方程……………………………………17

二、含坐标 x、y 的一次方程是一条直线……………………………………17

第五节　直线方程的其他类型……………………………………17

一、点斜式……………………………………17

二、两点式……………………………………18

三、截距式……………………………………18

第六节　平行、垂直条件 ……20
一、两直线平行的充要条件是它们的斜率相等 ……20
二、两直线垂直的充要条件是它们的斜率互为负倒数 ……21
习题 ……22
第 三 章　二次曲线 ……23
第一节　圆 ……24
一、定义 ……24
二、标准方程 ……24
三、圆的一般方程 ……24
第二节　抛物线 ……26
一、抛物线的定义 ……26
二、抛物线的标准方程 ……26
三、抛物线的几何性质 ……27
第三节　双曲线 ……28
一、双曲线的定义 ……29
二、双曲线的标准方程 ……30
三、双曲线的几何性质 ……30
四、例题 ……32
第四节　椭圆 ……33
一、椭圆的定义 ……34
二、椭圆的标准方程 ……34
三、椭圆的几何性质 ……35
四、例题 ……36
第五节　坐标变换 ……38
一、平移变换 ……38
*二、旋转变换 ……39
*第六节　一般二元二次方程图形的判断 ……42
习题 ……43

第二篇　微 积 分

第 四 章　函数 ……46
第一节　常量、变量、区间 ……46
一、常量与变量 ……46
二、区间 ……47
第二节　函数 ……48
一、函数的概念 ……48
二、函数的定义域 ……50

三、函数值 ……51
四、函数的表示法 ……52
第三节 列函数关系式举例 ……53
第四节 基本初等函数及其图形 ……55
一、基本初等函数 ……55
二、复合函数、初等函数 ……63
习题 ……65
第五章 极限与连续 ……67
第一节 极限概念 ……67
一、实践中的极限问题举例 ……67
二、极限概念 ……70
第二节 极限的运算法则 ……73
第三节 两个重要的极限 ……76
第四节 无穷小量与无穷大量 ……78
一、无穷小量 ……78
二、无穷大量 ……80
三、无穷大与无穷小的关系 ……80
四、函数的极限与无穷小量的关系 ……81
五、无穷小量的比较 ……81
第五节 函数的连续性 ……82
一、函数的增量 ……83
二、函数的连续性 ……84
习题 ……86
第六章 导数 ……88
第一节 导数概念 ……88
一、实践中的变化率问题举例 ……88
二、导数的定义 ……91
三、导数的几何意义 ……93
四、函数的可导性与连续性的关系 ……95
第二节 几个基本初等函数的导数 ……96
一、常数的导数 ……96
二、幂函数的导数 ……96
三、正弦函数和余弦函数的导数 ……98
四、对数函数的导数 ……99
第三节 函数的和、差、积、商的导数 ……100
一、函数和、差的求导法则 ……100
二、函数乘积的求导法则 ……100

三、函数商的求导法则 …… 101
第四节 复合函数的导数 …… 103
一、复合函数的求导 …… 103
二、指数函数的导数 …… 105
三、反函数的导数 …… 106
*第五节 隐函数的导数 …… 108
第六节 高阶导数 …… 110
习题 …… 111
第七章 导数的应用 …… 115
第一节 中值定理 …… 115
第二节 函数的增减性 …… 116
第三节 函数的最大值、最小值 …… 118
一、函数的极值 …… 118
二、函数的最大值和最小值 …… 122
第四节 函数的作图 …… 127
一、曲线的凸凹和拐点 …… 127
二、函数的作图 …… 130
习题 …… 132
第八章 微分及其应用 …… 133
第一节 微分概念 …… 133
一、实践中的微分问题举例 …… 133
二、微分概念 …… 135
三、微分的几何意义 …… 136
第二节 微分的计算 …… 137
一、微分基本公式 …… 137
二、函数的和、差、积、商的微分运算法则 …… 137
三、复合函数的微分 …… 137
第三节 微分的应用 …… 139
一、利用微分计算函数的近似值 …… 139
二、利用微分估计函数值的误差 …… 142
习题 …… 144
第九章 多元函数的微分法 …… 145
第一节 多元函数概念 …… 146
一、多元函数的概念 …… 146
二、二元函数的极限与连续 …… 148
第二节 偏导数 …… 149
一、偏导数 …… 149

二、复合函数的微分法 …… 151
三、高阶偏导数 …… 152
第三节 全微分 …… 153
一、全微分概念 …… 153
二、全微分在近似计算上的应用 …… 155
第四节 二元函数的最大(小)值 …… 156
一、极大、极小值 …… 156
二、最大值、最小值 …… 158
*三、条件极值 …… 159
第五节 用最小二乘法求经验公式 …… 161
一、用最小二乘法求经验公式 …… 161
二、函数的线性化 …… 163
习题 …… 168
第十章 定积分与不定积分 …… 170
第一节 定积分概念 …… 170
一、实践中的定积分问题举例 …… 170
二、定积分概念 …… 175
三、定积分的几何意义 …… 176
第二节 定积分的性质 …… 178
第三节 微积分的基本公式 …… 180
一、从变速直线运动问题看定积分与导数的关系 …… 180
二、变上限的定积分 …… 181
三、微积分的基本公式 …… 183
第四节 不定积分 …… 185
一、不定积分概念 …… 185
二、基本积分表及运算法则 …… 187
三、三种积分方法 …… 190
第五节 定积分的计算 …… 198
一、用基本公式计算定积分 …… 198
二、定积分的近似计算 …… 201
第六节 广义积分 …… 204
一、积分区间为无限的广义积分 …… 204
二、被积函数有不连续点的广义积分 …… 206
三、Γ 函数与 β 函数 …… 207
习题 …… 210
第十一章 定积分的应用 …… 215
第一节 定积分在几何上的应用 …… 215

一、平面图形的面积 …… 215
二、体积 …… 218
三、平面曲线的弧长 …… 221
第二节　定积分在物理上的应用 …… 221
一、变力沿直线作功 …… 221
二、液体静压力 …… 224
三、函数的平均值 …… 225
习题 …… 228
第十二章　常微分方程 …… 229
第一节　微分方程的概念 …… 229
一、实践中的微分方程举例 …… 229
二、微分方程的基本概念 …… 230
第二节　一阶微分方程 …… 231
一、可分离变量的方程 …… 231
二、一阶线性方程 …… 233
第三节　几种特殊类型的二阶微分方程 …… 237
一、$y''=f(x)$型 …… 237
二、$y''=f(x,y')$型 …… 238
三、$y''=f(y,y')$型 …… 240
习题 …… 242
第十三章　级数 …… 243
第一节　收敛级数与发散级数的概念 …… 243
一、无穷级数的概念 …… 244
二、收敛与发散 …… 244
三、收敛的必要条件 …… 245
四、比值判定法 …… 246
第二节　幂级数 …… 247
一、定义 …… 247
二、幂级数敛散性的判定法 …… 247
三、收敛半径的求法 …… 247
第三节　戴劳级数及马克洛林级数 …… 248
一、戴劳级数 …… 248
二、马克洛林级数 …… 249
第四节　初等函数的展开及其应用 …… 249
一、直接方法 …… 249
二、其他方法 …… 251
三、应用 …… 252

习题 …… 255

第三篇 线性代数初步

第十四章 行列式 …… 257
第一节 二元线性方程组与二阶行列式 …… 257
第二节 三阶行列式 …… 260
第三节 行列式的性质 …… 261
第四节 三元线性方程组的解法 …… 266
第五节 齐次线性方程组的解 …… 268
第六节 n 阶行列式与 n 元线性方程组 …… 269
习题 …… 272
第十五章 矩阵 …… 274
第一节 矩阵及其运算 …… 274
一、矩阵的概念 …… 274
二、矩阵的运算 …… 277
第二节 附加矩阵与逆矩阵 …… 284
第三节 线性方程组的矩阵解法 …… 287
一、逆矩阵与线性方程组的解 …… 287
二、高斯消去法 …… 289
三、主元素消去法 …… 291
习题 …… 293
习题答案 …… 296
附录Ⅰ 初等数学基本公式 …… 310
附录Ⅱ 简易积分表及用法举例 …… 316

绪　言

人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。数学和其他自然科学一样，是人们争取自由的一种武装。

在中学学的代数，主要是研究数量关系，几何是研讨空间的形状和性质，三角学与解析几何则把数与形结合起来研究。而现在要学习的高等数学，仍然是以数量关系和空间形式为研究对象。数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门科学。

数学的产生与发展是依赖于人类的生产实践。正如恩格斯所说："和其他一切科学一样，数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。"人们在生产实践中，由于计数的实际需要才产生了数的概念，继而又对自然数产生了简单的数的运算，由于测量的需要出现了简单的分数及它的运算方法。经过人们长期不断的知识积累，逐渐系统化而形成了算术、代数、几何三角等。在十七世纪以前，由于受当时社会生产力的局限性，人们对于数学知识，基本上停留在所谓初等数学阶段，那时人们只研究事物相对静止的数量关系和简单的几何图形。到十六世纪末，十七世纪初，欧洲资本主义兴起，机械工业的诞生，航海、造船、仪表、采矿等事业的迅速发展，对物理学、力学、天文学等自然科学提出了大量的急待解决的新问题，这些问题需要研究事物的运动与变化过程的数量关系，用初等数学的方法就远远不够了，因而推动人们去寻找新的数学方法，逐渐产生了微分与积分。生产的发展为微积分创造了客观条件，劳动人民的生产实践，为建立微积分的基本思想方法提供了丰富的源泉。那种认为数学的发展纯粹是个别天才数学家的自由创造，和生产实践无关的观点是错误的，唯心的。标志着数学飞跃发展的是笛卡尔把变数引进数学，使数学起了根本性的变革。恩格斯指出："数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，微分和积分也就成为必要的了，而它们也就立刻产生。"经过人们长期的积累、充实提高和生产实践的检验，微积分已成为数学中的基础学科，是学习自然科学和应用技术不可少的基础。

自十九世纪以来，工业、农业、科学技术都有新的发展，在科技生产发展的同时，出现许多的问题，对数学提出更多的新要求，需要数学有更高度的抽象与概括，来描述物质运动，使它在生产实践中有更广泛的应用。现代数学中的许多分支，如微分方程、概率论与数理统计、计算数学等等也逐步发展起来。特别是在现代电子学、自动控制、星际航行等的发展下，数学得到了进一步的发展。电子计算机的产生，已促使科技发生新的变革与突破。总之，数学的发生与发展依赖于生产实践，反之，由于数学的发展，在一定程度上促进了生产。

数学对科学技术是很重要的基础理论。生产实践的需要不仅促进数学理论的发展，数学

理论为生产服务，又使科技生产得到提高，这就是数学与生产实践的辩证关系。

高等数学是林业专业的基础课之一，林业科技中许多特征要通过数量关系来反映，譬如树高、胸径、材积、蓄积量等等，它们之间的关系，就需要通过数量的分析，才能对它们有较深入的了解，掌握它们的规律。尤其是现代计算技术日益发展，电子计算机在林业科学上将广泛使用，学习数学更为必要。

在华主席为首的党中央领导下，在党的十一大路线的指引下，我们一定要努力把科学、教育事业办好。向科学技术现代化进军的伟大革命群众运动正在迅猛兴起，党要求我们刻苦学习，认真深入钻研科学技术，精通业务，掌握规律，努力做到又红又专，为实现四个现代化作出努力，为争取对人类作出较大的贡献。

第一篇　平面解析几何

代数学主要是研究数与数之间的关系；几何学是研究空间形状的图形性质；三角学是研究三角形与数量的关系及其引伸。三角学因引入数量的计算，对于三角形的研究更深入了一步。如果利用数量计算来研究几何图形，对于空间形状的认识将更为深刻。

笛卡尔创造了一种方法——**坐标法**，这种方法沟通了代数与几何，建立起它们之间的紧密联系。一方面把几何轨迹问题用代数式来表示；另一方面，由代数演算来讨论几何图形的性质。这就是所要学习的解析几何。

第一章　曲线与方程

第一节　平面坐标法

解析几何是利用代数的方法来研究几何图形性质的学科。为此，就必须把几何学的基本元素的点与代数学的基本对象的数之间的关系建立起来。怎样建立它们之间的关系呢？就是用坐标法来建立点与数二者间的关系，这也是解析几何的关键。

一、平面直角坐标系　坐标法是一种定位方法。规定了原点、方向和单位长度的直线，叫做**数轴**。在数轴上每一点可以用一个实数来表示，反之，每一实数在数轴上必有一点。在平面上的点如何表示呢？例如看一场电影，入场券上指定的座位是 12 排 5 座， 12 和 5 这两个数就准确无误地指明了座位的位置。概括地说，平面上点的位置可以用两个有序的数来表示，直角坐标就是其中的一种表示方法。

在平面上引进两根互相垂直的数轴，相交于它们的原点，通常一根横放从左到右是正向，另一根竖放从下到上是正向(图 1-1)， 这样就说在这个平面上引进了一个**直角坐标系**，而这个平面就叫做**坐标平面**，交点叫做**坐标原点**，横放的轴叫做**横轴**，记为 x 轴，竖放的轴叫做**纵轴**，记为 y 轴。直角坐标系本身记为 xOy。

坐标轴把坐标平面分为四个部分，每一部分都叫做一个**象限**。象限的顺序，如图 1-2 中罗马数字所示。坐标轴上的点不属于任何一个象限。 不同象限中的点，其坐标符号如图 1-3 所示。

坐标平面上的每一个点都有一个数对与之对应。例如考察点 P(图 1-4)。过 P 作坐标轴的垂线，得到两个垂足 P_x 与 P_y。在 x 轴上，P_x 与 4 对应；在 y 轴上，P_y 与 3 对应。于是平面上的点 P 就确定了一个数对 4 与 3。习惯上把对应于 x 轴上的数写在前面，把对应于 y

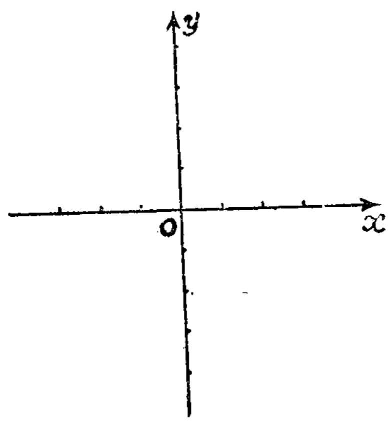

图 1-1

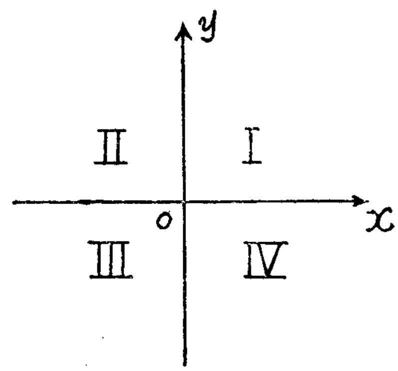

图 1-2

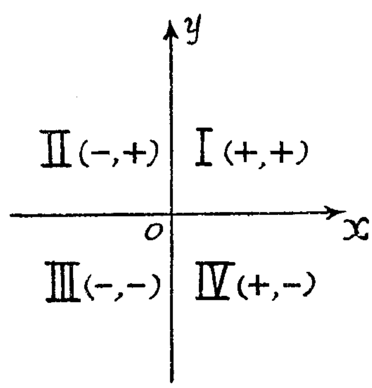

图 1-3

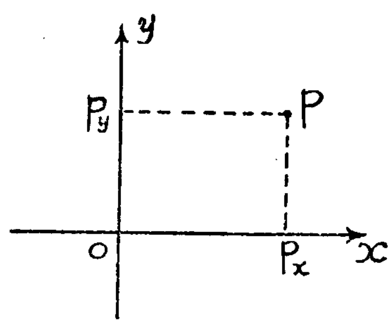

图 1-4

轴上的数写在后面，记为(4，3)。反过来，数对(4，3)，也将在平面上确定一个点。规定第一个数 4 对应于 x 轴上的点 P_x，第二个数 3 对应于 y 轴上的点 P_y。过 P_x 作 x 轴的垂线，过 P_y 作 y 轴的垂线，两垂线必有一个交点，这个交点就是数对(4，3)所确定的点。

一般地说，坐标平面上的点 P 与数对 (x, y) 间有对应关系，数对 (x, y) 叫做点 P 的坐标。这里前一个数 x 是 P 的**横坐标**，后一个数 y 是 P 的**纵坐标**，二者顺序不可颠倒。坐标为 (x, y) 的点 P 通常记为 $P(x, y)$。特别原点为 $O(0,0)$。

于是，坐标平面上的点 P 与一对有 序实数之间建立了一一对应关系。

例 试作 $A(3,2)$，$B(-1,6)$，$C(3,-3)$，$D(4,0)$，$E(0,-2)$，$F(-4,-3)$各点。

解 由原点 O 沿 x 轴向右移 3 个单位，再沿 y 轴向上移 2 个单位，就得点 $A(3,2)$；由原点 O 向左移 1 个单位，再向上移 6 个单位就得点 $B(-1,6)$；由原点 O 向右移 3 个单位，再向下移 3 个单位，就得点 $C(3,-3)$；由原点 O 向右移 4 个单位，不再移动，就得点 $D(4,0)$；由原点 O 不向左也不向右移动，而向下移动 2 个单位，就得点 $E(0,-2)$；由原点 O 向左移

4 个单位，再向下移 3 个单位，就得到点 $F(-4,-3)$(图 1-5)。

设点 P 的坐标为(x,y)，根据平面几何上点的轴对称与中心对称的定义，则知(x,y)与$(x,-y)$**关于 x 轴相对称**；(x,y)与$(-x,y)$**关于 y 轴相对称**；而(x,y)与$(-x,-y)$ **关于原点相对称**，如图 1-6。

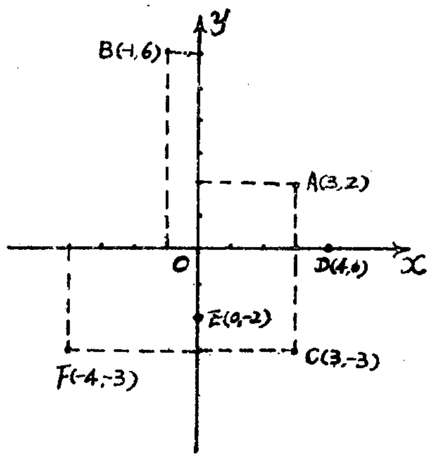

图 1-5

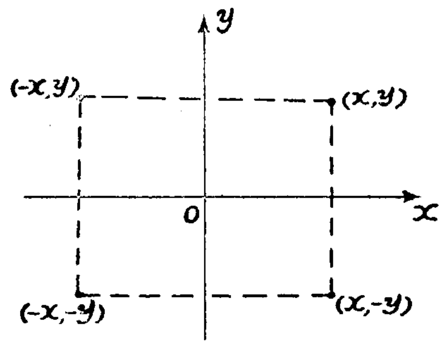

图 1-6

二、有向线段　在许多实际问题中，例如物体的位移，不但线段的长度值得注意，同时线段的方向也有重大的意义。这就是说，对于任意两点 A、B，用直线连结得一线段，分清 A、B 中哪一个是始点，哪一个是终点，这件事是有意义的。从始点到终点的方向是线段的方向。

定义　有方向的线段叫做有向线段。

如果两线段：(1) 由它们所确定的两直线平行或重合，(2) 线段由始点到终点的方向相同或相反，则两线段称为同向的或反向的。

用两个字母 A、B 来标记有向线段 AB 时，第一个字母 A 表示线段的始点，第二个字母 B 表示线段的终点。

有向线段 AB 的长度，用$|AB|$表示，$|AB|$不是负数。一个既表示有向线段的大小（长度），又表示有向线段方向的数，叫做**有向线段的值**，记为 AB。

显然有向线段 AB 与 BA 有相同的长度，但方向相反，所以

$$\boldsymbol{AB}=-\boldsymbol{BA}. \tag{1-1}$$

设 A、B、C 是数轴上任意三点，则 AB、BC 和 AC 间成立下面关系式：

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{AC}. \tag{1-2}$$

值得注意，这关系式的成立并不受 A、B、C 三点在数轴上排列的情形所限制。因此，要证明这关系式成立，必须证明它对于一切可能的排列情形都成立。现在证明如下：把 A、B、C 在数轴上排列的情形分成两类：AB 和 BC 的方向相同；AB 和 BC 的方向相反。如果 AB 和 BC 的方向相同，则$|AC|=|AB|+|BC|$，且 AB、BC 和 AC 的方向相同，因此(1-2)式

成立。如果 AB 和 BC 的方向相反，则 $|AC|$ 为 $|AB|$ 和 $|BC|$ 之差，而 AC 的方向与 AB、BC 中长度较大者同方向。因此，由代数学中的加法法则，知道(1-2)式也成立。

定理　如果 A、B 为数轴上两点，点 A 的坐标为 x_1，点 B 的坐标为 x_2，则

$$\boldsymbol{AB=x_2-x_1}. \qquad (1\text{-}3)$$

证　由(1-2)式有

$$OA+AB=OB,$$

因此

$$AB=OB-OA,$$

但

$$OB=x_2,\ OA=x_1,$$

所以

$$AB=x_2-x_1.$$

三、两点间的距离公式　设 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 是平面上任意两个定点，求 A、B 两点间的距离。

如图 1-7，过 A、B 分别作 x 轴、y 轴的平行线，相交于 C。那么 C 点的坐标是 (x_2, y_1)。$\triangle ACB$ 是直角三角形，由勾股弦定理，有

$$\begin{aligned}|AB|^2&=|AC|^2+|CB|^2\\&=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,\end{aligned}$$

故得

$$\boldsymbol{|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}. \qquad (1\text{-}4)$$

这就是两点间的**距离公式**。

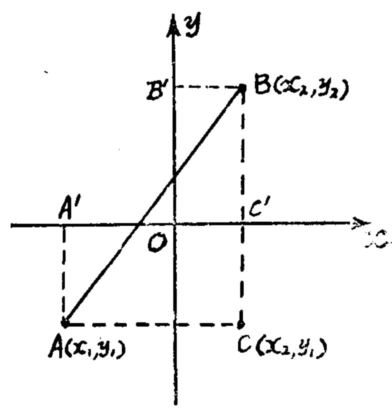

图 1-7

特别是，平面上任意一点 $M(x, y)$ 到原点 $O(0,0)$ 的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1\text{-}4')$$

例　冲制如图 1-8 所示(单位毫米)的零件时，需要知道三孔中心的距离。已知三孔中心的坐标是 $A(-20, 40)$、$B(-50,0)$、$C(40,0)$，求三孔中心的距离。

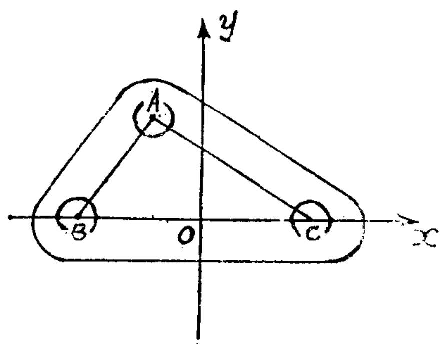

图 1-8

解　根据距离公式，

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{[-50-(-20)]^2+(0-40)^2}\\&=\sqrt{2500}=50\ (\text{毫米}),\end{aligned}$$

$$|CA|=\sqrt{(-20-40)^2+(40-0)^2}=\sqrt{5200}\approx 72.1(\text{毫米}),$$

至于距离 $|BC|$，由图显然有

$$|BC|=40-(-50)=90(\text{毫米}).$$

四、中点坐标公式　已知两点的坐标，怎样求这两点连线中点的位置呢？在解析几何中，求一个点的位置，就是求这点的坐标。