旋转群及洛伦兹群的表示

（导　论）

M. 卡梅利　S. 马林　著

科　学　出　版　社

旋转群及洛伦兹群的表示

（导　论）

M. 卡梅利　S. 马林　著

许　槑　译

栾德怀　校

科　学　出　版　社

1 9 7 9

内 容 简 介

近年来，群论已成为物理学中重要的数学工具．特别是，旋转群及洛伦兹群已广泛应用于量子力学及量子场论．本书着重讲述这两种群的表示．全书共分十一章：群论的基本概念；表示论的基本概念；三维纯旋转群；特殊酉群 SU_2；群 O_3 及群 SU_2 上的不变积分；群 O_3 及群 SU_2 的表示；不可约表示的矩阵元；无穷小转动的微分算子；洛伦兹群；无穷小的处理方法；洛伦兹群的旋量表示．一个附录：洛伦兹群的旋量表示．

本书可供高等院校数学系和物理系师生和研究生参考．

M. Carmeli, S. Malin

REPRESENTATIONS OF THE ROTATION AND LORENTZ GROUPS

An Introduction

Marcel Dekker, 1976

旋转群及洛伦兹群的表示

(导 论)

M. 卡梅利 S. 马林 著

许 槑 译

栾德怀 校

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1979年 7 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1979年 7 月第一次印刷 印张：2 3/8

印数：0001—18,100 字数：48,000

统一书号：13031·1057

本社书号：1486·13—3

定价： 0.27 元

序　　言

近年来，群论已成为物理学中最有用的数学理论之一．特别是，旋转群及洛伦兹群已被广泛应用于量子力学及量子场论．虽然，已有很多好书叙述了这两种群的表示理论，不过这些书只适合于大学毕业以上水平和研究工作者使用．

本书的基础是作者之一卡梅利（M. Carmeli）的两次讲稿．一次是在 1972—1973 年对尼格夫的本格里翁大学数学及物理学毕业班学生做的一学期的讲课．同样的课程在 1973 年夏季又对俄亥俄州的固态研究实验室、空间研究实验室和赖特-帕特森空军基地的理论固态研究组讲了一次． 后来由马林（S. Malin）补写了附录，使读者能获得洛伦兹群的旋量表示这一重要内容的细节． 众所周知，这些表示已最广泛地应用于量子力学、量子场论及广义相对论．

本书可用作数学及其他自然科学的大学教材．对应用这一理论但又不想深入了解表示理论的大学毕业生和研究工作者，本书也可起辅助作用． 虽然，从数学观点来说，这本小册子的叙述是准确的，但它的处理仍是很基础的． 通常一个学期就可学完． 本书共有十一章和一个附录． 包括了旋转群及洛伦兹群的所有有限维表示，但没有涉及无限维表示，因为无限维表示现在刚开始用于基本粒子物理学理论的图象中．

第一章是群论的简单复习，包括一些基本概念，例如群、子群、正规子群、商群、同构及同态等．第二章探讨了有限维表示理论的基本概念． 第三章引进了旋转群，用大家熟悉的

欧拉角来描述纯旋转. 第四章引进了群 SU_2, 并指出了它与纯旋转群的关系. 第五章叙述了在旋转群及群 SU_2 上不变积分的重要概念. 第六、七两章广泛讨论了旋转群的表示,并推导了威格纳 (Wigner) 矩阵元素 D^j_{mn}. 第八章结束了对旋转群的讨论并求出了角动量算子.

一般教科书上对旋转群的表示, 是用欧拉角作参量来表示的,而在本书中则用另外一些角来定义旋转的,就是用指定方向的旋转角和在旋转方向上的两个球面角来定义的.

洛伦兹群的讨论从第九章开始, 这一章讨论了正时洛伦兹变换,对洛伦兹群的有限维表示做了初步探讨. 然后便叙述了旋量表示. 最后的附录对洛伦兹群的旋量表示作了较为详细的讨论.

最后, 我们没有为本书中所讨论的问题开列全部重要的原始文献. 为了弥补这一缺陷,我们介绍下列七册书,供读者参考:

(1) B. L. van der Waerden, *Modern Algebra*, Fredric Ungar Publishing Co., New York, 1953.

(2) L. S. Pontrjagin, *Topological Groups*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1946.

(3) E. P. Wigner, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York, 1959.

(4) M. A. Naimark, *Linear Representations of the Lorentz Group*, Pergamon Press, New York, 1964.

(5) I. M. Gelfand, M. L. Graev, and N. Y. Vilenkin, *Generalized Functions*, vol. 5: *Integral Geometry and Representations Theory*, Academic Press, New York, 1966.

(6) I. M. Gelfand, R. A. Minlos, and Z. Ya. Shapiro, *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Application*, Pergamon Press, New York, 1963.

(7) W. Rühl, *The Lorentz Group and Harmonic Analysis*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1970.

M. 卡梅利

S. 马　林

目　　录

序言 …………………………………………………… iii
1. 群论的基本概念 ………………………………… 1
　1.1　群及子群………………………………………… 1
　1.2　正规子群及商群………………………………… 2
　1.3　同构及同态……………………………………… 3
2. 表示论的基本概念 ……………………………… 4
　2.1　线性算子………………………………………… 4
　2.2　群的有限维表示………………………………… 5
　2.3　酉表示…………………………………………… 6
3. 三维纯旋转群 …………………………………… 7
　3.1　欧拉角…………………………………………… 7
4. 特殊酉群 SU_2 ………………………………… 9
　4.1　群 O_3 与群 SU_2 之间的同态 ……………… 10
5. 群 O_3 及群 SU_2 上的不变积分 ……………… 11
　5.1　群 O_3 上的不变积分 ………………………… 12
　5.2　群 SU_2 上的不变积分………………………… 12
6. 群 O_3 及群 SU_2 的表示……………………… 13
　6.1　韦耳方法………………………………………… 14
　6.2　无穷小生成元…………………………………… 14
　6.3　典范基…………………………………………… 15
　6.4　对应于旋转的酉矩阵…………………………… 16
7. 不可约表示的矩阵元 …………………………… 18
　7.1　旋量表示………………………………………… 19
　7.2　表示的矩阵元…………………………………… 19

7.3 $D^j_{mn}(u)$ 的性质 …… 21
8. 无穷小转动的微分算子 …… 22
8.1 在函数空间中 O_3 的表示 …… 22
8.2 角动量算子 …… 25
9. 洛伦兹群 …… 27
9.1 正时洛伦兹变换 …… 28
10. 无穷小的处理方法 …… 29
10.1 无穷小洛伦兹矩阵 …… 29
10.2 无穷小算子 …… 29
10.3 酉条件 …… 32
11. 洛伦兹群的旋量表示 …… 35
11.1 群 SL(2, c) 及洛伦兹群 …… 35
11.2 群 SL(2, c) 的旋量表示 …… 36
11.3 旋量表示的无穷小算子 …… 39
附录 洛伦兹群的旋量表示 …… 42
A1. 群 SL(2, c) 及洛伦兹群 …… 42
A2. 群 SL(2, c) 的旋量表示 …… 48
A3. 旋量表示的无穷小算子 …… 59
符号表 …… 65

1. 群论的基本概念

对群论的叙述，许多教科书上都有，如 Pontrjagin[1]，van der Waerden[2] 及 Wigner[3] 的书. 本章只对群论的基本概念做扼要的叙述.

1.1 群及子群

一个集合G的诸元素，如果满足下列四个条件*，则该集合称为*群*:

(1) 在G中存在一种运算，使G中任意两个元素 a, b，均有G中的第三个元素 c 与之相对应. 这种运算叫做*乘法*，而元素 c 则称为 a 和 b 的*积*，记为 $c = ab$;

(2) 乘法的*结合律*成立，即，若 a，b 及 c 都是G的元素，则 $(ab)c = a(bc)$;

(3) G中包含一个*右单位元素*(或称右恒等元素，右么元素)，这就是说，存在一个元素 e，对于G的任何一个元素 a，都有 $ae = a$; 以及

(4) 对于G的每一个元素 a，必有一个*右逆元素* a^{-1}，使得 $aa^{-1} = e$.

若群G的元素的个数是有限的，则称G为*有限群*，而群G所含元素的个数则称为该群的*阶*. 有无穷多个元素的群称为*无限群*. 若G的任意两个元素 a 和 b 是可交换的，即 $ab = ba$，则该群称为*阿贝耳群*(或交换群). 在阿贝耳群中，乘法

---

* 原书称**公理** (*axiom*)，我们一般称**条件**. ——译者注

记法 ab 用加法记法 $a+b$ 代替，这时，群的运算称为*加法*，单位元素称为零，用 0 表示，a 的逆元素称为负 a，用 $-a$ 表示.

由于群的诸元素之积服从结合律，我们可以将 $(ab)c=a(bc)$ 简单地写为 abc. 这种写法也适用于三个以上元素的积.容易证明：一个右单位元素同时也是一个左单位元素，即对G的任意元素 a, $ea=a$，a 的右逆元素 a^{-1} 也是它的左逆元素，即 $a^{-1}a=e$. 因此，a^{-1} 的逆元素便是 a. 由此可见，单位元素和逆元素都是唯一的.因此，我们便可以把代数学的记法用于群，如对于任意自然数 m，有 $a^{m+1}=a^m a$，$a^1=a$，以及 $a^{-m}=(a^{-1})^m$，$a^0=e$ 等.若 p 及 q 为二整数，则有 $a^p a^q=a^{p+q}$ 及 $(a^p)^q=a^{pq}$.

设H是群G的一些元素的集合，若G的运算法则也适用于集合H，则H也成群，我们称H为G的*子群*. 群G的子集合H作为G的一个子群的必要且充分的条件是：若H包含两个元素 a 及 b，它必需也包含元素 ab^{-1}.

1.2 正规子群及商群

设G为一个群，H为G的一个子群，a 及 b 为G的两个元素，若 ab^{-1} 是H的一个元素，则称 a 和 b 为*等价的*[4]，记为 $a\sim b$. 这时，可以将群G按H分解成等价元素的若干组，每一组称为关于G的H的*右陪集*（或右旁系）. 由此可见，若A是H的右陪集，a 是A的一个元素，则 $A=Ha$[5]. 其次，形式为 Hb 的每个子集合都是一个右陪集而子群H本身也是陪集之一. 我们也可以引进H的*左陪集*（或左旁系），记为形式 aH. 它们是从下列等价关系得来的：若 $a^{-1}b$ 属于 H，则 $a\sim b$.

设N是群G的一个子群，若对于N的每一个元素 n 和G

的每一个元素 a，元素 $a^{-1}na$ 属于N，则称N为G的正规子群或不变子群. 由此可推知，子群N的右陪集和左陪集互相重合的必要且充分的条件是N为一个正规子群[6].

若N是群G的一个正规子群，A和B是N的两个陪集，$A=Na$，$B=Nb$，则 AB 也是N的陪集. 这样定义的陪集的乘法适合上节所述群的条件，由群G的一个正规子群N的一切陪集所作成的群称为 G 对于正规子群 H 的商群，记为 G/N.

1.3 同构及同态

若群G到群 G′ 的一个映射 f 是一一对应的，且保持乘法运算，称 f 为一个同构映射. 这时，G与G′ 称为是同构的. 同构映射 f 的逆映射 f^{-1} 本身是一同构映射. 一个群到它自身的一个同构映射称为自同构映射. 一个群的所有自同构映射的集合形成一个群.

若群G映入另一群 G′ 的映射 f 保持乘法运算，这映射称为一个同态映射. 在同态映射下，G中所有映为G′的单位元素的元素的集合N称为同态的核. 若核与G的单位元素重合，则同态为一同构映射. 由此得到：N是G的一个正规子群，且G′同构于G/N. G′ 与 G/N 之间的同构被称为自然同构映射. 由G的每一个元素 a 到 G/N 的含有 a 的元素 $f(a)=A$ 之间的对应，定义了一个群G到G/N 上的映射 f，这个映射是一个同态映射，称为一个群到其商群上的自然同态映射. 若 f 是群G到G′ 的一个同态映射，H是G的一（正规）子群，则 $f(H)$ 是 G′ 的一（正规）子群. 若 f 是群G到 G′ 的一个同态映射，g 是 G′ 到 G″ 的一个同态映射，则映射 gf 是G到 G″ 的一个同态映射.

最后，我们注意到，若 f 是群G到群 G′ 的一部分元素上

的一个同态映射，则 G' 中所有那些是G中元素的象的元素之集合，形成 G' 的一个子群。其次，在同态 f 下，若 $f^{-1}(H')$ 是G中那些映为 $H' \subset G'$ 的元素的集合，且若 H' 是群 G' 的(正规)子群，则 $f^{-1}(H')$ 也是群G的(正规)子群.

注释及参考文献

[1] 本书序言中介绍的第(2)册书.

[2] 本书序言中介绍的第(1)册书.

[3] 本书序言中介绍的第(3)册书.

[4] 在一个集合M中，若其中的任意两个元素是等价的 $a \sim b$，或不等价的 a 不$\sim b$，则在该集合上建立起一个**等价关系**。等价关系必需同时满足：1)反射律：$a \sim a$；2)对称的：若 $a \sim b$，则 $b \sim a$；及3)传递的：若 $a \sim b$ 及$b \sim c$，则 $a \sim c$. M 中的一个等价关系将 M 分为不相交的若干组等价元素.

[5] 若A及B是群G的两个子集合，我们便用 AB 表示所有形状为 ab 的一切元素的子集合，这里 $a \in A$，$b \in B$. 子集合 A^{-1} 表示由一切元素 a^{-1} 所组成的子集合，这里 $a \in A$. 子集合 A^{m+1} 定义为 $A^{m+1} = A^m A$，这里 $A' = A$；对于自然数 m，子集合 A^{-m} 定义为 $A^{-m} = (A^{-1})^m$，子集合 A^0 是一个仅含单位元素的集合.

[6] 每一个群至少含有两个正规子群，仅含单位元素的子群，和与群本身重合的子群.若一个群除去上述两个子群外，没有其他正规子群，则称为**单群**.

2. 表示论的基本概念

在本章中，我们复习一下有限维表示论的基本概念. 这一理论可详见下列各书：Wigner[1]，Naimark[2]，Gelfand, Graev 和 Vilenkin[3] 及其他[4][5].

2.1 线性算子

设R为一线性空间，x是R中的一个向量. 若对于R中任意一个向量 x，R中有一个相应的向量 $y = T(x)$，则函数T称为R中的一个算子. 若对于R中的任意两个向量 x，y 和任意复数 α，有 $T(x+y) = T(x) + T(y)$ 和 $T(\alpha x)=$

$\alpha T(x)$，则T被称为线性算子．在空间R中，两算子A和B的加法被定义为：对于R中一切向量x，$(A+B)x = Ax+Bx$．同样，在空间R中，数α与算子A的数乘被定义为：$(\alpha A)x=\alpha(Ax)$，算子A与B的乘积被定义为：$(AB)x = A(Bx)$．其次，若A及B是R中的两个线性算子，则$A+B$，αA及AB也是R中的线性算子．

在有限维空间R中引进一个基$e_1,\cdots,e_n$，则此空间中的线性算子可以用矩阵表示．若A为空间R中的一个线性算子，则Ae_k可以写成$e_1,\cdots,e_n$的一个线性组合，即$Ae_k=\sum_{j=1}^{n}A_{jk}e_j$，$k=1,\cdots,n$．$A_{jk}$是算子$A$对于基$e_1,\cdots,e_n$的矩阵的矩阵元．可以证明算子$A$完全由它的矩阵$A_{ij}$来决定．而且，加法运算，数乘，以及算子与算子相乘均对应于这些算子对于一个固定基的矩阵的相应运算．

2.2 群的有限维表示

设G为一群，g为G的任意一个元素，群G的每一元素g与一有限维空间R中一个线性算子D_g对应$g\to D_g$若(1) $D_{g_1}D_{g_2}=D_{g_1g_2}$及(2) D_e是R中的单位元素，而e是G的单位元素，则这个对应称做一个*表示*．空间R称为*表示的空间*，其维数称为*表示的维数*．

若在维数相同的R和R'两个空间中选取这样的基，使得算子D_g及$D_{g'}$的矩阵恒等，则群G在此二空间R及R'的两个有限维表示$g\to D_g$及$g\to D'_g$称为是*等价的*．若对于空间R的子空间S的每一个向量x，对于群G的所有元素g，D_gx也是S中的向量，则S称对于表示$g\to D_g$是不变子空间．若对于表示$g\to D_g$，除去对于零子空间和整个空间的平凡情形外，在空间R中没有不变子空间，则表示称为*不可约*

表示．若 D_g 是群G上的一个连续算子函数[6]，则群G的表示 $g \to D_g$ 称为是连续的．本书中我们只讨论连续表示．

2.3 酉表示

若对于线性空间中每两个向量 x 及 y，我们能够定义一个满足下列四个条件的函数，该函数叫做 x 及 y 的标积，记为 (x,y)，而该线性空间称为欧几里得空间(简称欧氏空间)，

(1) $(x, x) \geqslant 0, (x, x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$;

(2) $(y, x) = \overline{(x, y)}$;

(3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

(4) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.

能够证明：对于每一个有限维空间，都能定义一个标积．

在有限维欧氏空间 R 中的一个算子 D，若对于空间 R 中的所有 x, y 向量，它能保持标积不变，即 $(Dx, Dy) = (x, y)$，则该算子称为酉算子．若一个表示 $g \to D_g$ 的一切算子 D_g 都是酉算子，则该表示称为酉表示．

下面六章的内容是：求三维纯旋转群的不可约表示，该群记为 O_3. 我们用的是韦耳方法，这是利用二阶特殊酉群，SU_2 群，到旋转群 O_3 的同态映射的方法．用两种不同的参量化来讨论这些表示：

(1) 在指定方向的旋转角和旋转方向的球面角；及

(2) 常用的欧拉角．

注释及参考文献

[1] 本书序言中介绍的第(3)册书.

[2] 本书序言中介绍的第(4)册书.

[3] 本书序言中介绍的第(5)册书.

[4] I. M. Gelfand 和 Z. Ya. Shapiro, *Usp. Mat. Nauk* **7**, 3 (1952); *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.* 2., **2**, 207 (1956).

[5] 本书序言中介绍的第(6)册书.

[6] 若对于固定基的 D_g 的矩阵元，对G是连续函数，则此算子函数 D_g 被称

为在群G上是连续的．这一 D_g 的连续的定义与基的选取无关，因为对于另一基的矩阵元,是原来基的矩阵元的常系数的线性组合．

3. 三维纯旋转群

若变量 x_1，x_2 及 x_3 的一个线性变换 g，使形式 $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 保持不变，则称此变换为一个*三维旋转*． 所有这种线性变换 g 的集合构成一个连续群，该连续群与所有实正交三维矩阵[1]的集合是同构的,我们称之为*三维旋转群*．容易证明：任意一个正交矩阵的行列式等于+1，或−1．行列式为+1 的变换描述*纯旋转*，行列式为−1 的变换则描述*旋转-反射*．所有纯旋转的集合构成一个群,它是三维旋转群的子群,称为*纯旋转群*． *我们将讨论三维纯旋转群*． 该群以 O_3^+[2] 表之．

3.1 欧拉角

设 g 为群 O_3 的一个元素,即 g 是一个三维正交矩阵,其行列式为+1． 众所周知，我们可以用一组三个参量来表示这样的元素.大家所熟悉的欧拉角便是这类参量的一个例子,欧拉角是由三个连续的旋转角来定义的．它们描述了从一个给定的笛卡儿坐标系经过一特定序列的三个连续旋转达到另一个笛卡儿坐标系的变换．

图 1 是这个旋转序列的示意图． 首先，使原来坐标系的 $\vec{x}$ 轴绕 z 轴顺时针方向转动角 ϕ_1[3]． 形成的新坐标系用 $\vec{\xi}$ 表之,故有

$$\vec{\xi}=g(\phi_1)\vec{x},$$

其中正交矩阵 $g(\phi_1)$ 为

$$g(\phi_1)=\begin{bmatrix}\cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & 0\\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad (3.1)$$

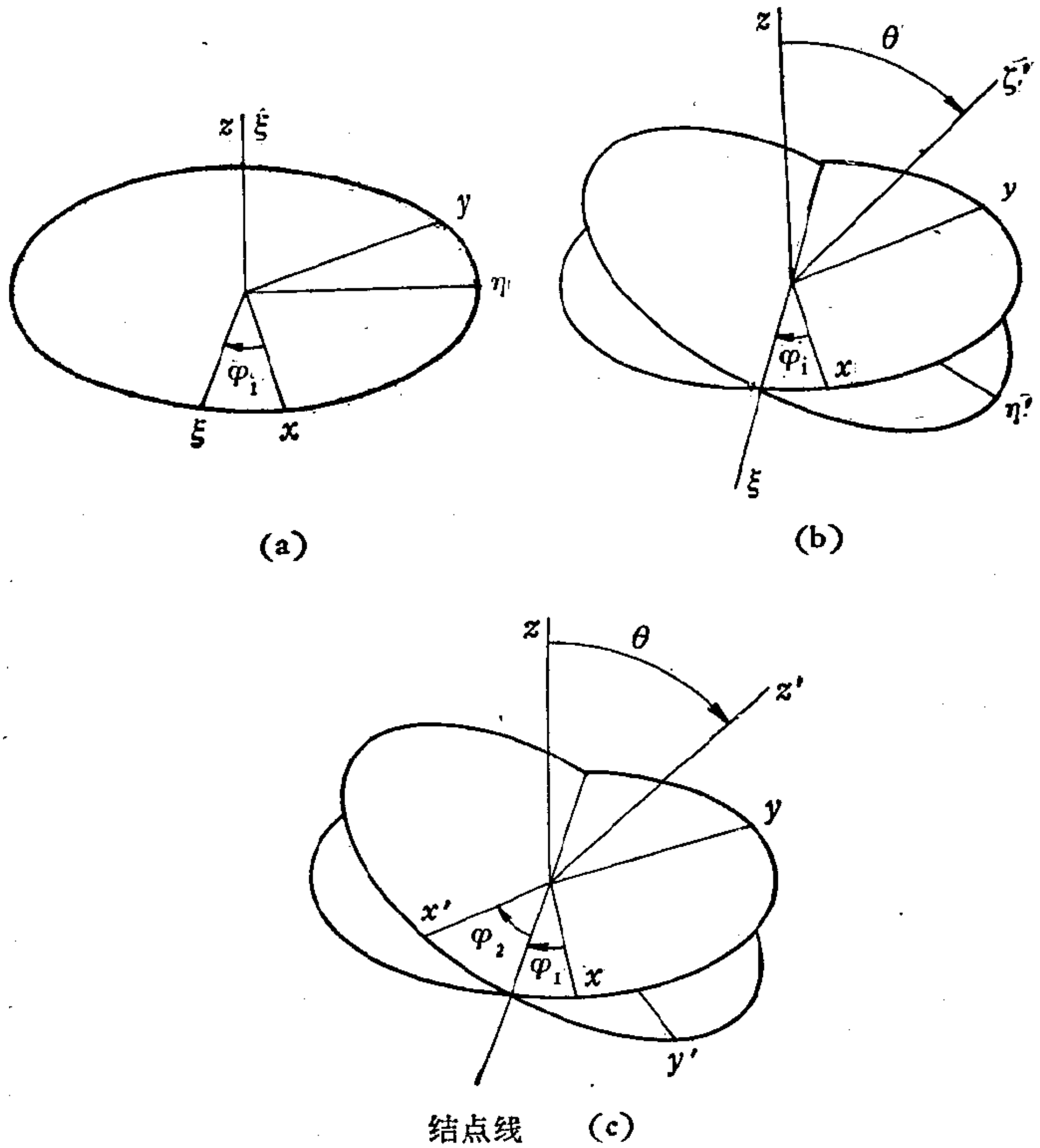

图 1　三个旋转定义了欧拉角

第二步，过渡轴 $\vec{\xi}$ 绕其 ξ 轴顺时针方向转动 θ 角，达到另一组过渡坐标系，用 $\vec{\xi}'$ 表之，从而有

$$\vec{\xi}' = g(\theta)\vec{\xi},$$

其中正交矩阵 $g(\theta)$ 为

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \qquad (3.2)$$

ξ' 轴叫做结点线．最后，坐标系 $\vec{\xi}'$ 绕 ζ' 轴顺时针方向转动 ϕ_2

角，达到所期望的坐标系 $\vec{x}'$:

$$\vec{x}' = g(\phi_2)\vec{\xi},$$

其中正交矩阵 $g(\phi_2)$ 为

$$g(\phi_2) = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 & 0 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

由此得，全变换

$$\vec{x}' = g\vec{x}$$

的矩阵 g 应是连续三次变换的矩阵之积，故从 (3.1)—(3.3) 得 $g = g(\phi_2)g(\theta)g(\phi_1)$:

$$g = \begin{bmatrix} \cos\phi_2\cos\phi_1 - \cos\theta\sin\phi_1\sin\phi_2 & -\cos\phi_2\sin\phi_1 - \cos\theta\cos\phi_1\sin\phi_2 & \sin\phi_2\sin\theta \\ \sin\phi_2\cos\phi_1 + \cos\theta\sin\phi_1\cos\phi_2 & -\sin\phi_2\sin\phi_1 + \cos\theta\cos\phi_1\cos\phi_2 & -\cos\phi_2\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi_1 & \sin\theta\cos\phi_1 & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

角 ϕ_1, θ, ϕ_2 是三个独立参量，完全地决定了旋转 g，它们被称为欧拉角. 从上述定义可见，三个角的区间分别为：$0 \leqslant \phi_1 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 及 $0 \leqslant \phi_2 \leqslant 2\pi$.

注释及参考文献

[1] 若 $g^t g = 1$，则矩阵 g 被称为正交矩阵，这里 g^t 是矩阵 g 的转置矩阵.

[2] 详情参见本书序言中介绍的第(3)册书.

[3] 我们采用下列记法：$\vec{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$, $\vec{\xi}' = (\xi', \eta', \zeta')$, 及 $\vec{x}' = (x', y', z') = (x_1', x_2', x_3')$.

4. 特殊酉群 SU_2

旋转也可以由行列式为 +1 的二阶酉矩阵来表示. 所有