学校教材

夏道行 吴卓人
严绍宗 舒五昌 编著

$Aa$

$a\in N$

$s=\int f d\mu$

# 实变函数论与泛函分析

上册·第二版

$\mu^*(E_i)$

高等教育出版社

高等学校教材

# 实变函数论与泛函分析

## 上册·第二版



夏道行　吴卓人
严绍宗　舒五昌　编著

高等教育出版社

本书第一版在1978年出版。此次修订，是在编者经过两次教学实践的基础上，结合一些兄弟院校使用初版教学提出的意见进行的。本书第二版仍分上、下两册出版，上册为实变函数，下册为泛函分析。本版对原书具体内容处理的技术方面进行了较全面的细致修订。在内容上，勒贝格测度的讨论更完整系统了；测度论中增补了几个重要定理，作为测度论中基本内容介绍就完整了；上册各章习题量增加一倍以上。

本书可作理科数学专业，计算数学专业学生和研究生的教材或参考书。

本书经理科数学教材编审委员会委托陈杰、王振鹏先生审查，同意作为高等学校教材出版。

高等学校教材

**实变函数论与泛函分析**

上 册

（第二版）

夏道行　吴卓人
严绍宗　舒五昌　编著

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 11.25　字数 269,000

1978年8月第1版 1983年8月第2版　1984年2月第1次印刷

印数 00,001—16,600

书号 13010·0908　定价 1.35 元

# 第二版序

本版保持了初版的思想体系和基本结构，从局部来看作了一定程度的修改．在编写初版时，我们对本书编写的思想体系和基本结构给予了较多的考虑．但由于某些内容过去就很少有作为基础课讲授的教学经验，另一方面也由于当时编写时间比较匆促，因此从具体内容处理的技术方面来看，却有必要进行一次较全面的、细致的修订．本次修订，是在作者对初版进行了两次教学实践和兄弟院校使用初版后提出意见的基础上进行的．

对于所作的变动，值得在此提出的有：1．对于一般最常用的勒贝格测度，它作为一般测度的典型地位比初版更加加强了，建立勒贝格测度过程的叙述系统了(与一般测度相同的证明省略，以免重复)，性质的讨论更加完整了，这有利于初学者对它的理解，也有利于讲授者在教学上的选择．2．在测度论中增加了有限可加非负集函数成为可列可加的充要条件，可列可加集函数的 **Hahn** 分解以及 **Radon-Nikodym** 定理等．这样，作为测度论中基本内容的介绍就完整了．3．为了便于初学者对内容的消化，各章节的习题增加了一倍左右．泛函分析各章内容的变动相对来说要少一点．

正如上面所说，我们这次修订得到了不少专家、教师、读者的关心和支持，他们是中国科学技术大学、吉林大学、南京大学、华东师范大学、河北大学、山西大学、西安交大、重庆大学等校有关同志，我们在此一并表示衷心的感谢。

作　者

1981.7.5

# 序

本书是根据1977年9月高等学校理科数学教材编写会议所通过的“实变函数论与泛函分析”课程教材编写大纲编写的．分上、下两册．

上册是实变函数，主要是测度论和积分论(特别是勒贝格测度和勒贝格积分理论)．这是数学分析课程中微积分理论的进一步深入．同时，这一部分内容也为进一步学习分析数学中一些专门理论，如函数论、泛函分析、概率论、微分方程、群上调和分析等提供必要的测度和积分论基础．上册分三章．第一章介绍近代数学的基础——集与映照等有关的概念，同时也介绍学习实变函数论必须的直线上点集的概念和知识．(由于下册一开始就介绍一般度量空间，因此在上册我们就没有介绍$n$维欧几里德空间中的点集．)为了和数学分析衔接得更好一些，把本书中用到的数学分析中的极限论的一部分概括地写在§5中．第二章介绍测度论。由于一般测度理论已经成为概率论、泛函分析、群上调和分析等方面经常用到的基础理论，对数学专业的学生来说，它也许已经成为必须的基础知识．而且就实质来说，它并不比勒贝格测度论增加很多本质上的新困难，因此，在本书中做了一个尝试：不是先介绍勒贝格测度，而是一开始就介绍一般的测度，以勒贝格测度为典型的例．虽然如此，在使用本书时，如果认为没有必要讲授一般测度，也可以在讲授时做一些改变，例如把本书中建立测度的整个过程仅局限于勒贝格测度，对一般测度的情况尽量少提及。第三章主要内容是介绍可测函数和积分理论。此外还介绍了单调函数、有界变差函数的一些重要性质，其中有关于单调函数几乎处处有有

限导数的定理，这个定理本身是重要的，但是它的证明方法，不管是本书上用的 Riesz 引理或别的书上用 Vitali 引理、Sierpinski 引理等，在别的数学分支中这套方法引用较少，已经不如过去那样显出有多大重要性，而这个定理的证明又比较复杂，所以，如果教学时间较少，可以不必讲授这个定理的证明。

下册是泛函分析．泛函分析是现代数学中一个较新的重要分支．它综合地运用分析的、代数的和几何的观点、方法研究分析数学中的许多问题。本世纪中叶，由于运用泛函分析这个工具，引起了偏微分方程论、概率论、群上调和分析的重大发展．泛函分析的概念和方法已经渗透到现代纯粹及应用数学、理论物理学、现代力学和现代工程理论的许多分支——除前面所列举的三个分支外，还有如计算数学、函数论、大范围微分几何、现代控制论、量子场论和统计物理等方面．本书中只能介绍泛函分析的一些基本概念和方法．第四章为度量空间，主要是介绍一些基本概念．其中 § 8的不动点原理是微分方程理论和计算数学中常用的一个方法．在 § 10 中简单地介绍了拓扑空间和线性拓扑空间某些概念．这部分，初学时可以放过不读．第五章 § 1— § 5 是介绍赋范线性空间中线性泛函和线性算子的几个基本概念和基本定理．§ 6 介绍全连续算子的谱分解，以及近年来有关不变子空间理论的一些新成果，这一节可以放到第六章之后去学，如果时间较少也可以不学．第六章的 § 1— § 3 介绍 Hilbert 空间中最基本的投影定理、直交展开等．数学专业的每个学生都应该掌握这一部分内容．第六章的 § 4— § 10，研究 Hilbert 空间中算子谱分解，内容比较深入一些，它是为进一步学习微分方程论、概率论、泛函分析等方面专门理论提供基础的．第七章介绍了近三十年发展起来的广义函数，这过去在基础课教学中较少提及．我们觉得这部分内容不但有较广泛的应用，而且学了这部分内容后对数学分析课程中所学理论的进

一步发展能有所了解，可以加深对数学分析的领会.

总之，泛函分析这部分内容比过去国内一些大学（包括我校）在基础课教学中所曾讲授过的内容增加较多，这是为了适应我国科学技术现代化的需要. 考虑到当前的实际情况，可能在基础课中学习泛函分析的时数不一定很多，使用本书时可以挑其中的部分内容进行讲授. 我们觉得这些内容可以分成四组. 第一组是最基本的内容：第四章 §1—§5, §7, §8 的大部分，第五章 §1 以及第六章 §1—§3(可在十多学时中讲完)，如果教学时间少，可以只学这一组. 第二组是对于计算数学专业比较需要的：为第五章 §2 的大部分，§4 中有关共鸣定理的部分（可采用其中的证法二，而不学逆算子定理）和 §5 有关预解算子和谱半径的部分。这部分大约十学时，对于为进一步学习微分方程、积分方程理论的学生来说还需要第四章 §9 和第五章 §6 的大部分. 第三组是满足进一步学习概率论随机过程理论所需要的：第六章 §4—§7 的大部分，对于进一步学习微分方程来说，除上述内容外，还要进一步学习 §9. 第四组是为了微分方程理论和广义随机过程理论需要，可学第七章. 除去第一组是公共基础外，其余三组基本上是独立的(只有个别的概念或定理用到别组的内容时，可在讲授时补充说明或证明). 对于学习泛函分析的学生来说，学完上、下册可以算作具有最必要的基础.

本书中印有小字的部分，初学者可以略过.

本书约有三分之一取材于我们过去写的“实变函数论与泛函分析概要”一书. 其余取材散见各书及论文. 对编写本书影响较大的有陈建功著“实函数论”, P. Halmos 著“测度论”, И. М. Гельфанд和 Г. Е. Шилов 著“广义函数论“, F. Riesz 和 B. sz.-Nagy 著“泛函分析”，那汤松著“实变函数论”等书.

在完成本书时，我们感谢参加审查本书初稿的吉林大学，南京

大学，上海师大，河北大学，杭州大学的同志．他们曾经对本书提出过许多宝贵的意见．特别是吉林大学江泽坚教授自始至终对本书的编写工作十分关心和支持，提出大量的重要的、有启发性的意见，使本书生色不少．我们在此表示衷心感谢．我们还要对曾参加编写本书有关工作的我校数学研究所和数学系部分教师、研究生一并致谢．

由于我们水平的限制，加以时间较紧，又由于"四人帮"的破坏，十年来无法进行本门课程的教学实践，因而经验较少，本书一定存在不少缺点．殷切地期望同志们、读者们随时给予批评和指教。

编　者

1978 年 国庆节于复旦大学

# 上册目录

# 第一章　集和直线上的点集

## §1 集和集的运算

**1. 集的概念**　在现代数学中，集的概念已被普遍地采用．通常把具有某种特定性质的具体的或抽象的对象的全体称做**集合**，或简称为**集**，其中的每个对象称为该集中的**元素**．

例如，在代数学中，群、环、域等都是某种集，这种集的各个元素之间具有一定的代数关系；在几何学中，直线、曲线、曲面等都可以看作是由点所组成的点集；数学分析中的实数集、连续函数集、某函数的定义域等都是常用的集．

集是数学的一个基础概念．集论① 是研究集的一般性质的，属于数学基础的一个分支．关于集和元素的严谨的定义属于集论的研究范围，这里不予涉及．

以后我们常用大写字母 $A, B, X, Y, \cdots$ 表示集，而用小写字母 $a, b, x, y, \cdots$ 表示元素．

对于一个集 $A$ 来说，某一对象 $x$ 或者是集 $A$ 的元素——这时，我们说 $x$ **属于** $A$，记为 $x\in A$；或者 $x$ 不是集 $A$ 的元素——即 $x$ 不属于 $A$，记为 $x\overline{\in} A$；二者必居其一．

当集 $A$ 是具有某性质 $P$ 的元素全体时，我们往往用下面的形式来表示 $A$：

$$A=\{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$$

例如方程 $x^2-1=0$ 的解 $x$ 的全体组成的数集是 $\{x \mid x^2-1=0\}$．如

① 集论的重要文献首先是德国数学家 G. Cantor (康托尔)在十九世纪末发表的，后来逐步发展成为数学的一个分支，集论中的某些概念和结果已成为近代数学中许多分支的基础。

果能够明确写出集 $A$ 的所有元素，也可以都列举在大括号里面，例如上面这个数集就是 $\{1, -1\}$. 有时我们也把集 $\{x \mid x \in E,\ x$ 有性质 $P\}$ 改写成 $E(x$ 有性质 $P)$. 例如，设 $f(x)$ 是 $E$ 上的一个函数，$c$ 是一个实数，我们把集 $\{x \mid x \in E, f(x) \leqslant c\}$ 写成 $E(f(x) \leqslant c)$.

下面我们研究集的关系.

如果集 $A$ 中的元素都是集 $B$ 的元素，那末称 $A$ 是 $B$ 的**子集**，记做 $A \subset B$，读做 $A$ 包含在 $B$ 中，或记做 $B \supset A$，读作 $B$ 含有 $A$. 显然，$A \subset A$. 有时为研究问题的需要，我们引入不含有任何元素的集合，称为**空集**，记为 $\varnothing$. 例如 $\{x \mid x$ 是实数且 $x^2+1=0\}$ 是一空集. 我们规定空集是任何集的子集. 如果 $A \subset B$，而 $B$ 中确有元素 $b$ 不属于 $A$，称 $A$ 是 $B$ 的**真子集**. 例如 $A$ 是平面上以正有理数做半径的圆的全体，$B$ 是平面上所有圆的全体，那末 $A$ 是 $B$ 的一个真子集.

如果 $A \subset B$，而且又有 $B \subset A$，这时 $A$, $B$ 由相同的元素组成，就是同一集，称 $A$ **等于** $B$（或 $B$ 等于 $A$），记做 $A=B$（或 $B=A$）. 例如 $\{x \mid x^2-1=0\}=\{1, -1\}$.

**2. 集的运算**　设 $A$, $B$ 是两个集，由集 $A$ 同集 $B$ 的一切元素所组成的集称做 $A$ 同 $B$ 的**和集**，简称为"**和**"，记做 $A \cup B$（图 1.1）；所有既属于集 $A$ 又属于集 $B$ 的元素组成的集，称为 $A$ 和 $B$ 的**通集**，也简称为"**通**"或"**交**"，记做 $A \cap B$（图 1.1）.

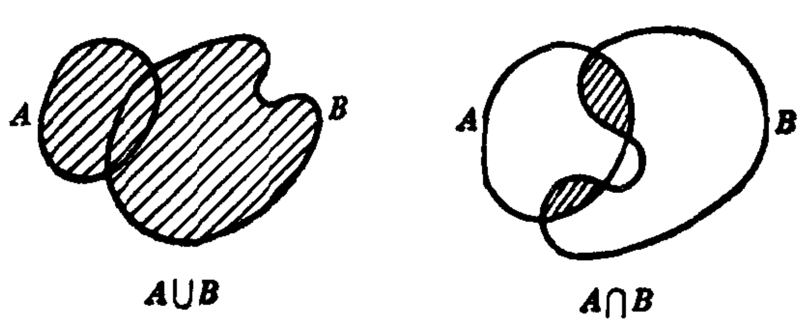



图 1.1

完全类似地可以定义任意个集的和集及通集. 设 $\{A_\alpha \mid \alpha \in N\}$

是任意一组集，其中 $\alpha$ 是集的指标，它在某个指标集 $N$ 中变化，由一切 $A_\alpha(\alpha\in N)$ 的所有元素所组成的集称做这组集的和集，记做 $\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$，也记为 $\sum\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$；同时属于每个集 $A_\alpha(\alpha\in N)$ 的一切元素所组成的集，称做这组集的通集，记做 $\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$ 或 $\prod\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$.

应该注意，由若干个集构成和集时，同时是两个或两个以上的集所公有的元素在和集中只算做一个. 另外，当 $A\cap B=\varnothing$ 时，我们又简称为 $A$ 与 $B$ 不交. 当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，简称为 $A$ 与 $B$ 相交.

不难证明"和"、"通"运算具有下面一些性质:

1° $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ （和、通的幂等性）;

2° $A\cup\varnothing=A$ （空集是加法的零元）;

3° $A\cup B=B\cup A$ （和的交换律）;

$A\cap B=B\cap A$ （通的交换律）;

4° $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ （和的结合律）;

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ （通的结合律）;

5° $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ （分配律）;

6° 如果 $A\subset B$，那末对任意的集 $C$ 成立着

$A\cup C\subset B\cup C$, $A\cap C\subset B\cap C$ （和、通的保单调性）.

在集合之间，除了上面的"加法"和"乘法"以外，我们再引入减法：设 $A$, $B$ 为两个集，由集 $A$ 中不属于 $B$ 的那些元素全体所组成的集，称做集 $A$ 减集 $B$ 的**差集**，记做 $A-B$ 或 $A\backslash B$（注意，这里并不要求 $A\supset B$）. 当 $B\subset A$ 时，称差集 $A-B$ 为 $B$ 关于 $A$ 的**余集**，记做 $C_AB$. 当我们只讨论某个固定集 $A$ 的一些子集 $B$ 时，常简记 $A-B$ 为 $B^c$ 或 $C(B)$，并称它是 $B$ 的余集.

"减法"运算（或称求余运算），显然有下面的性质:

7° 如果 $A\subset B$，那末 $A-B=\varnothing$;

8° $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$（“减法”分配律）；

9° $(C-A)-B=C-(A\cup B)$；

10° 如果 $A\subset C, B\subset C$，那末 $A-B=A\cap C_C B$.

我们称集 $(A-B)\cup(B-A)$ 为集 $A$ 和集 $B$ 的**对称差**，记做 $A\triangle B$.

11° $A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$。

以上这些性质都可以从集的“包含”、“相等”、“和”、“通”以及“差”的定义推导出来，其中有些还可以推广到任意个集的一般情况，这里不一一证明．图形可以帮助我们较直观地理解和记忆一些概念，或者启发我们思考问题，是学习中的一种有效工具，以后将经常采用．但是必须指出，决不能把图形的示意看成定义，或者定理的证明．因为定义必须要用确切的文字叙述，而定理的证明是必须经过严密的逻辑论证．

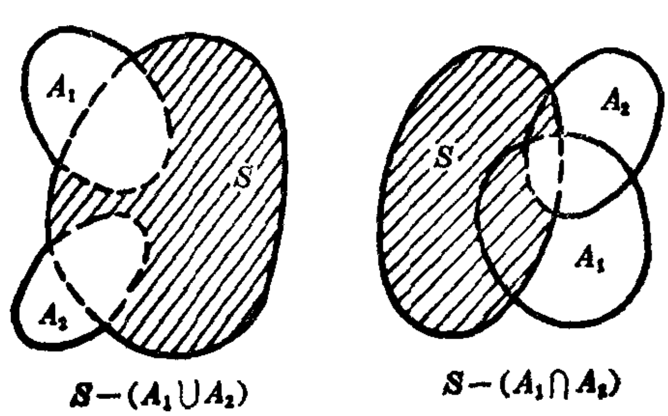
下面介绍两个有用的公式——和通关系式：

设 $S$ 是任意一个集，$\{A_\alpha|\alpha\in N\}$ 是任一族集，那末有

12° $S-\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha=\bigcap\limits_{\alpha\in N}(S-A_\alpha)$； (1.1)

13° $S-\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in N}(S-A_\alpha)$. (1.2)

用文字叙述，就是：和集（关于 $S$）的余集等于每个集（关于 $S$）的余




$S-(A_1\cup A_2)$　　　　$S-(A_1\cap A_2)$

图 1.2

集的通集(12°)，而通集(关于 $S$)的余集等于每个集(关于 $S$)的余集的和集(13°)(图 1.2).

现在来证明和通关系式(1.1)和(1.2).

首先，(1.1)式左边是属于 $S$ 而不属于任何一个 $A_\alpha(\alpha\in N)$ 的元素所成的集，因而它属于每一个集 $S-A_\alpha(\alpha\in N)$，所以左边是右边的子集；完全类似地可以说明右边也是左边的子集. 这样，(1.1)式两边的集相同. 类似地可以证明(1.2)式，希望读者自己进行分析和论证. 但为帮助读者熟悉论证和表达的方法，我们把证明过程详细写出来. 这是用集论方法论证时常用的方法. 读者可以仿此证明上面各条性质 1°——11°.

现证(1.1). 记 $S-\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$ 为 $P$，$\bigcap\limits_{\alpha\in N}(S-A_\alpha)$ 为 $Q$. 这样，只要证明 $P=Q$.

设 $x\in P$，按定义有 $x\in S$ 而且 $x\,\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$. 因此，对每个 $\alpha\in N$，$x\,\overline{\in}\, A_\alpha$，因而 $x\in S-A_\alpha(\alpha\in N)$. 即 $x\in Q$. 这就是说，凡 $P$ 中的元素都属于 $Q$，所以 $P\subset Q$.

反过来，设 $x\in Q$，那末对任何 $\alpha\in N$ 有 $x\in S-A_\alpha$，即 $x\in S$，而且 $x\,\overline{\in}\, A_\alpha(\alpha\in N)$，因此 $x\,\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$，所以 $x\in S-\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha=P$，这就是说，凡 $Q$ 中的元素必属于 $P$，所以 $Q\subset P$. 综合起来就得到

$$P=Q$$

证毕

(1.2)的证明是类似的，略去.

强调指出，(1.1)，(1.2)式中并不要求 $S$ 包含每个 $A_\alpha(\alpha\in N)$.

**3. 上限集与下限集** 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是任意一列集. 由属于上述集列中无限多个集的那种元素全体所组成的集称为这一列集的上限集，记做 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或 $\limsup\limits_{n}A_n$；而由属于集列中从某个

指标 $n_0(x)$（这个指标不是固定的，与元素 $x$ 有关）以后所有集 $A_n$ 的那种元素 $x$ 全体（即除去有限多个集外的所有集 $A_n$ 都含有的那种元素）组成的集称为这一列集的**下限集**，记做 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 或 $\liminf\limits_{n} A_n$. 显然，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{1.3}$$

**例 1**　设 $A_n(n=1,\ 2,\cdots)$ 是如下一列点集：

$$A_{2n+1}=\left[0,\quad 2-\frac{1}{2n+1}\right],\ n=0,1,2,\cdots$$

$$A_{2n}=\left[0,\quad 1+\frac{1}{2n}\right],\ n=1,2,\cdots$$

我们来确定 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集.

因为 $A_n\subset[0,2)(n=0,1,2,\cdots,)$，所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\subset[0,2)$（其实是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=[0,2)$）. 根据(1.3)，只要考察 $[0,2)$ 中点那些属于 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 或 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 即可. 显然，$[0,1]\subset A_n(n=0,1,2,\cdots,)$，所以 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n\supset[0,\ 1]$. 而对于 $(1,\ 2)$ 中的任何点 $x$，必存在自然数 $n_0(x)$，使当 $n>n_0(x)$ 时，

$$1+\frac{1}{2n}<x\leqslant 2-\frac{1}{2n+1}$$

即当 $n>n_0(x)$ 时，$x\overline{\in} A_{2n}$，但 $x\in A_{2n+1}$. 换句话说，对于开区间 $(1,\ 2)$ 中的 $x$，具有充分大奇数指标的集都含有 $x$，从而 $\{A_n\}$ 中有无限多个集含有 $x$，而充分大的偶数指标的集都不含有 $x$，即 $\{A_n\}$ 中不含有 $x$ 的集不是有限多个. 因此，

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n=[0,2),\quad \varliminf_{n\to\infty} A_n=[0,1]$$

**例 2**　设 $A_n=\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right]$，$n=1,2,\cdots$. 类似于例 1 中的讨论，

立即得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0, 1]$$

集列$\{A_n\}$ 的上限集与下限集都可以用集列$\{A_n\}$的"和"、"通"运算表示出来. 它们的表达式是:

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \tag{1.4}$$

现在证明第一式: 记 $P = \limsup_n A_n$, $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. 对于$P$中的任何元素$x$, 由上限集的定义, $x$ 属于$\{A_n\}$中无限个集, 不妨设 $x$ 同时属于集 $A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots (n_k < n_{k+1},\ k = 1, 2, \cdots)$. 因此, 对任何自然数 $n$, 当 $n_k > n$ 时, $x \in A_{n_k} \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$, 所以 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$, 我们得到 $P \subset Q$. 反过来, 在$Q$中任意取一个元素 $y$, 今证明在$\{A_n\}$中必有无限个集同时含有$y_0$. 事实上, 取 $n=1$, 因为$y \in \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, 所以必存在自然数 $n_1$ 使得 $y \in A_{n_1}$; 其次, 又因为 $y \in \bigcup_{m=n_1+1}^{\infty} A_m$, 所以必存在自然数 $n_2 > n_1$, 使得 $y \in A_{n_2}$; 这样的手续一直进行下去, 得到一列自然数$\{n_k\}$, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 而集 $A_{n_1}$, $A_{n_2}$, $\cdots$, $A_{n_k}$, $\cdots$等都含有元素 $y$, 因此, $y \in P$. 于是又有 $Q \subset P$. 总起来得到 $P = Q$.

读者可以完全类似地证明第二式. 证毕.

如果从有关集本身所具有的含义去理解, 等式(1.4)的成立是