高等学校试用教材

网络最优化

刘家壮 徐 源

高等教育出版社

高等学校试用教材

网络最优化

刘家壮　徐　源

高等教育出版社

内 容 提 要

本书介绍网络优化中的最基本概念及有实际背景的典型问题和方法，取材适当，深入浅出，适用面广，可以作为高等学校数学、计算机、管理等专业有关网络优化课程的试用教材.

(京)112号

高等学校试用教材

网络最优化

刘家壮 徐 源

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.625 字数 130 000

1991 年 8 月第 1 版 1991 年 8 月第 1 次印刷

印数 0 001—1 690

ISBN7-04-003487-5/O·1056

定价 2.30 元

序　　言

网络优化理论与方法近年来在国内外发展十分迅速，在计算机管理、工程设计等方面都有着广泛的应用，并且日益受到普遍重视，所以在高等院校的有关专业开设网络优化课程便成为势在必行，作者在多年教学实践的基础上逐步形成了这本书.

本书主要介绍网络优化的最基本概念、模型和算法．它不仅有国外一些新的典型模型和算法，而且还有国内近年来一些好的、有代表性的工作．作者试图在介绍具体模型和算法的同时，有意识地强调一些典型有效的思想方法．例如，第三章强调 Greedy 思想，第四章强调标号法，第五章强调广探和深探，第六章强调增广路思想，第七章强调交错路思想，第八章强调近似算法．其目的在于提高读者的分析问题和解决问题的能力.

另外，本书在介绍各种算法的同时还注意对算法复杂性的分析，并且在每一章最后都附有一定数量的习题，其目的在于提高读者对算法实用性的认识和增强读者实际动手的能力.

本书可以用于 40—60 学时的网络优化课程．为了使它有一定弹性，各章尽可能自成体系，讲授者可根据实际情况选择自己的重点.

由于作者水平所限，书中难免会有许多缺点和错误，恳切地希望广大读者批评指正.

作者

1990 年 8 月于济南

目　录

第一章　最优化及最优化算法

§1　非线性规划与线性规划

在数学分析课程中，我们讨论过求多元函数最小值(或最大值)的问题．问题的提法是这样的：

给定n维欧氏空间R^n的一个区域Ω，和在Ω上定义的函数$f(x)$，$x\in\Omega$．求$f(x)$在Ω上的最小值．

通常，我们用下面的数学形式表示上述问题：

$$\text{求：}\left.\begin{array}{ll}\mathrm{Min}\ f(x) & \\ x\in\Omega & (\Omega\subseteq R^n)\end{array}\right\}\tag{1.1.1}$$

当$f(x)$在闭区域Ω上连续，且在Ω内可微时，最小值一定存在，且在区域内的稳定点或边界上达到．所谓稳定点，就是指$f(x)$所有偏导数都为0的点．

在数学分析课程中，我们还进一步讨论了条件极值问题．这个问题的数学形式如下：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{求：}\ \mathrm{Min} f(x) & \\ x\ \text{满足：} & h_1(x)=0 \\ & h_2(x)=0 \\ & \quad\vdots \\ & h_r(x)=0 \\ & x\in\Omega\subseteq R^n\end{array}\right\}\tag{1.1.2}$$

(1.1.2)式与(1.1.1)式的差别在于对x取值范围附加了一组等式约束．通常，我们用拉格朗日乘子法把条件极值问题化为一般的极值问题．

比条件极值问题更一般的提法是：除了对x附加等式约束外，

再加上一组不等式约束. 它的数学形式如下:

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{求: } \mathrm{Min} f(x) & \\
x\text{满足: } g_i(x) \geqslant 0 & i=1,2,\cdots,s \\
\qquad\qquad h_j(x)=0 & j=1,2,\cdots,r \\
\qquad\qquad x \in R^n &
\end{array}\right\} \tag{1.1.3}
$$

研究(1.1.3)这一类问题解法的数学分支叫做非线性规划. 非线性规划是运筹学分支规划论的一个重要研究方向. 我们之所以取名"非线性", 因为一般说来 $f(x)$、$g_i(x)$、$h_j(x)$大都是非线性函数.

非线性规划是计算机出现后, 近几十年才蓬勃发展起来的新兴数学分支. 由于它在各类实际问题中有广泛应用, 所以发展十分迅速. 目前,大量取名为"最优化"的论著,主要是讨论非线性规划的.

问题(1.1.3)中, x 需要满足的条件, 我们称为约束条件. 通常认为不等式约束条件 $g_i(x) \geqslant 0$ 比等式约束条件 $h_j(x)=0$ 更为基本. 因为一个等式约束条件 $h_j(x)=0$, 可以用两个不等式约束条件

$$
\begin{cases} h_j(x) \geqslant 0 \\ h_j(x) \leqslant 0 \end{cases}
$$

来代替. 因此,非线性规划的标准形式有时也写作(1.1.4)式:

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{求: } \mathrm{Min} f(x) & \\
\text{约束条件: } g_i(x) \geqslant 0 & i=1,2,\cdots,s \\
\qquad\qquad x \in R^n &
\end{array}\right\} \tag{1.1.4}
$$

满足约束条件的 x 值,称为该非线性规划问题的可行解,函数 $f(x)$称为目标函数. 使目标函数达到最小值的可行解, 称为最优解. 一个规划问题的最优解, 可能不是唯一的, 但在解规划问题时,任意找到一个最优解,我们就认为问题解决了. 一般不要求把

所有的最优解都找出来.

非线性规划问题的可行解全体,组成 R^n 的一个区域 Ω,如果把约束条件看作区域Ω的定义方式,那么(1.1.3)、(1.1.4)式都可以看作(1.1.1)式的特例. 但是这个特例在某种意义上说具有普遍意义,因为区域Ω的给定,通常就是用一组数学式子来表示的. 但非线性规划所讨论的内容和采用的方法,要比数学分析中相应部分深刻得多,重点也偏重于寻求能快速地求出最优解的方法.

非线性规划中有一种特殊情况特别受到重视. 当区域Ω是凸区域,同时目标函数是凸函数时,这样的非线性规划称为凸规划. 凸规划有这样一个特性,它的局部极值点就是它的整体极值点. 在本课程中,我们不再进一步对非线性规划和凸规划进行讨论了.

在(1.1.4)式中,当函数 $f(x)$是线性函数,而且所有的 $g_i(x)$也都是线性函数时,该规划问题称为线性规划. 线性规划虽然是凸规划的一种特殊情况,但它往往被看作是规划论的另一个重要分支,从非线性规划中独立出来,因为它的研究内容和采用的方法,与其他非线性规划问题有很大区别,而且线性规划在实际应用中又特别重要. 曾有人做过统计,与解其他数学问题所耗费的计算机计算时间相比,用于解线性规划问题所耗费的机器时间占绝对领先地位.

线性规划的标准形式通常写作(1.1.5)式:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Max } cx \\ &\text{约束条件: } Ax \leqslant b \\ &\qquad\qquad\quad x \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.1.5}$$

其中 x 是 n 维列向量:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

c 是 n 维行向量：$c=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$

A 是 $m\times n$ 矩阵：

$$A=(a_{ij})_{m\times n}$$

b 是 m 维列向量：

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

式子 cx 即线性目标函数．线性规划中求最大值和求最小值没有什么本质的区别．因为 x 如果是 $\max\ cx$ 的最优解，那么它也是 $\min(-cx)$ 的最优解．

矩阵表示式 $Ax\leqslant b$ 只是 m 个线性不等式约束的简单写法，它没有什么本质上的新东西．等式约束与不等式约束的联系在前面已经讨论过一些，进一步的讨论我们就不涉及了．值得指出的是不等式约束的"$\leqslant$"号不能改为"$<$"号，否则可行解区域由闭的变成为开的，最优解的存在性就要发生疑问了．

可行解的非负性 $x\geqslant 0$，只是为了讨论的需要而引入的．线性规划的理论中已经证明，这样的规定并不破坏(1.1.5)式的一般性，也就是说，任何一个不包含非负性约束的线性规划，可以通过一些简单的变换，把它归结为(1.1.5)式的形式．

约束条件 $Ax\leqslant b, x\geqslant 0$ 所决定的可行解全体，决定了 R^n 的一个凸区域，我们称为该线性规划决定的多面体．n 维空间的多面体概念是二维空间的凸多边形、三维空间的凸多面体的概念的自然推广．可以类似地定义多面体的面和顶点的概念．详细的讨论我们就不做了．我们仅指出，线性规划约束条件所决定的多面体的顶点个数是有限的，而且仅根据数学分析的理论我们就能断言，线性规划的最优解一定在某个顶点达到．

这样我们就找到了线性规划与非线性规划的一个主要的差别. 为了找到线性规划的最优解，我们只要在有限个作为顶点的可行解中寻找就足够了，即把连续寻优变成了离散寻优. 基于这种想法，Dantzig 在 1947 年发现了解决线性规划问题的单纯形方法. 直到目前为止，就实用性而言，单纯形方法还是解决线性规划问题最好的方法.

对于"网络最优化"课程来说，线性规划的重要性还在于它是解决网络最优化问题的一种重要手段. 在下一节我们将简单地说明一下这个问题. "线性规划"本身是高等院校数学系的一门选修课，我们在这里就不进一步讨论了.

§ 2 组合最优化问题

在有限个可行解集合中找出最优解，这类问题称为组合最优化问题.

设 F 是有限集，c 是 F 到 R(实数)的映射，即 c 是定义在 F 上的一个函数. 求 $f\in F$，使得对于任意的 $y\in F$，有

$$c(f)\leqslant c(y)$$

成立.

上述问题我们简记为:

$$\text{求: } \left.\begin{array}{l} \operatorname{Min} c(f) \\ f\in F \end{array}\right\} \tag{1.2.1}$$

组合最优化问题中，最优解的存在性是不成问题的，唯一性我们不感兴趣，我们唯一关心的是如何迅速地把最优解找出来.

组合最优化问题的应用是十分广泛的. 下面我们举出一些实际应用的例子.

(一) 最短路问题

给定 n 个城市 $1, 2, \cdots, n$. 已知连接城市 i 和 j 的道路长度

为 a_{ij}(如果 i 与 j 之间无直接相连的道路，则规定 $a_{ij}=+\infty$). 现在要求找一条连接城市 1 和城市 n 的最短道路. 这个问题称为最短路问题。最短路问题的可行解集合 F 是所有可能的连接城市 1 和城市 n 的道路，它通过其他城市 $2, 3, \cdots, n-1$ 不超过一次. 这样的道路显然只有有限条. 函数 $c(f)$ 是道路 f 的长度，它等于各段道路 a_{ij} 之和.

（二）最小连接问题

给定 n 个城市. 现在需要架设通讯线路，把这 n 个城市都连接起来. 假定架设连接城市 i 和城市 j 的通讯线路所需费用为 a_{ij}，问应该在哪些城市之间架设线路，既能使所有城市之间都能连通，又要总的架设费用最小？我们后面将说明，这个问题等价于后面将讨论的最小树问题.

（三）分配问题

准备分配 n 个工人去干 n 项工作，每人干一项工作. 假定工人 i 去干工作 j 得到的收益为 a_{ij}，问这 n 个工人的工作应如何安排才能使总的收益最大. 这里总的收益是指每个工人工作收益之和. 很明显，每一种工作分配方案相当于一个 n 阶的排列，因此可行解的个数恰好为 $|F|=n!$.

我们可以用数学式子来描述分配问题：引入 n^2 个0-1 变量 x_{ij}. 当工人 i 分配于工作 j 时，令 $x_{ij}=1$，否则 $x_{ij}=0$. 则分配问题可写成下面的形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{求}\quad \mathrm{Max}\sum_{i,j}a_{ij}\ x_{ij}\\
&\text{约束条件：}\ \sum_{i}x_{ij}=1\quad (j=1,2,\cdots,n)\\
&\qquad\qquad\quad \sum_{j}x_{ij}=1\quad (i=1,2,\cdots,n)\\
&\qquad\qquad\quad x_{ij}\ \text{取 0 或 1}
\end{aligned}\right\}\qquad(1.2.2)$$

很显然，约束条件$\sum_i x_{ij}=1$表示每一项工作只能分配给一个人；$\sum_j x_{ij}=1$表示每个人只能去干一项工作.

（四）运输问题

某种物资(例如水泥)有m个产地,可供给量分别为$b_1,b_2,\cdots,b_m$. 现在要运往n个需要单位，每个单位的需求量分别为$c_1,c_2,\cdots,c_n$，不妨设供销平衡，即$\Sigma b_i=\Sigma c_j$. 已知从产地i运往销地j的单位运费为a_{ij},问如何设计运输方案,使总运费最少.

一般我们总是假定供给量、需求量及运输量都是整数,因为水泥总是论吨或至少论包出售. 在运输量是整数的假设下，运输问题就是一个组合最优化问题. 我们设从产地i运往销地j的运量为x_{ij},则运输问题可以用以下的式子来描述:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{求} & \operatorname{Min}\sum_{ij} a_{ij}x_{ij} \\ \text{约束条件:} & \sum_i x_{ij}=c_j \quad (j=1,2\cdots,n) \\ & \sum_j x_{ij}=b_i \quad (i=1,2,m) \\ & x_{ij}\geqslant 0, x_{ij}\text{取整数}\end{array}\right\} \tag{1.2.3}$$

（五）服务点设置问题

一个乡有n个村庄，现在打算在乡中建一所医院. 为了方便群众就医,医院所在的村庄希望满足这样的条件:该村到离它最远的村庄的距离尽可能地短. 记a_{ij}为村庄i到村庄j的距离,则

$$d_i=\max_j\{a_{ij}\}$$

表示村庄i离最远村庄的距离. 我们希望选择建医院的村庄i_0满足

$$d_{i_0}=\min_i d_i=\min_i\max_j\{a_{ij}\}$$

这个问题明显是一个组合最优化问题.因为可行解只有n个.

这类问题有时也叫做最小一最大问题.

（六）中国邮递员问题

一个邮递员负责投递某个街区的邮件. 现在需要为他设计一条最短的线路，从邮局出发，经过投递区内每条街道至少一次，最后返回邮局. 一般说来，为了经过每条街道至少一次，有些街道可能需要重复通过. 如果限制每条街道不得通过三次或三次以上(可以证明某段街道通过三次或三次以上的投递路线一定是可以简化的)，那么所有可能的投递路线的总数就是有限的，也就是说中国邮递员问题的可行解个数是有限的，因此它是一个组合最优化问题. 这个问题是我国管梅谷教授在1960年首先提出的，所以在国际上被称为“中国邮递员问题”. 中国邮递员问题已被公认为重要的组合最优化问题之一.

（七）旅行售货员问题

某公司的商品推销员打算从城市1出发，走遍城市2，3，…，n，去推销商品，最后回到城市1. 问如何安排他的旅行路线，使走的路线的总长度最短(有时我们加上“经过每个城市恰好一次”这样的限制). 这个问题称为旅行售货员问题.

旅行售货员问题的研究已经有四十多年的历史了，是组合最优化问题中另一个重要的研究课题. 比较一下旅行售货员问题和中国邮递员问题是很有趣的，它们的提法看上去很相似，但实际上有本质的区别. 我们以后还要提到这个问题.

（八）背包问题

有 n 样物品，它们的重量分别为 $w_1, w_2, \cdots, w_n$(公斤)，价值分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 现在有一个背包，可以装 b 公斤的东西. 问选择哪几样东西装入背包，可以使背包内东西的价值最大. 这个问题也叫做包裹问题.

用 x_i 表示物品 i 是否装入背包. 当物品装入背包时令 $x_i=1$，

否则令 $x_i=0$. 则背包问题可以用下面的式子来表示:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{求} & \text{Max}\sum\limits_i a_i x_i \\ \text{约束条件:} & \sum\limits_i w_i x_i \leqslant b \\ & x_i \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1\end{array}\right\} \tag{1.2.4}$$

(九) 划分问题

有 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 设法把这 n 个数分成两组, 使这两组数和的差的绝对值最小.

用数学式子来表示, 求 $I\subseteq\{1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $\left|\sum\limits_{i\in I} a_i - \sum\limits_{i\notin I} a_i\right|$ 最小.

(十) 装箱问题

有 n 样物品, 体积分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 现在用体积为 b 的箱子装运这些物品, 问应该如何装箱才能使所有的箱子个数最少. 这里显然应该有这样的限制: 所有物品的体积都不超过 b(否则这样的物品就无法装箱), 且每个箱子中装入物品的总体积也不能超过 b.

上面简单地介绍了一些组合最优化的问题. 这些问题只是已研究过的组合最优化问题的很少一部分. 但仅从这很少一部分也可以看出组合最优化问题在实际问题中的广泛应用. 在经济管理等很多领域中, 组合最优化方法都是一种有效的手段, 可以帮助我们提高效率、节省开支, 因此这是一个实用性很强的新兴应用数学分支.

在本课程中, 不打算全面地讨论各种组合最优化问题. 我们只准备讨论一些与图和网络有关的组合最优化问题. 它们属于组合最优化中最简单、最基本的一类, 我们称它们为网络最优化. 关于图和网络的概念, 我们在下一章再详细介绍. 上面举的十个例子, 大多数都可以归结为网络最优化问题(有些本身就是网络最优化问题).

细心的读者可能发现，前面介绍的(1.2.2)、(1.2.3)和(1.2.4)式与线性规划的形式很接近. 它们也有线性的目标函数和线性的约束条件，只是比线性规划多了一个限制：自变量的整数性限制或 0-1 限制. 它们属于规划论研究的另一个课题：整数线性规划(自变量只允许取0-1的规划叫做0-1线性规划，它是整数线性规划的特殊情况). 如果去掉整数限制，我们得到一个相应的线性规划. 很明显，整数线性规划的可行解都是它相应线性规划的可行解. 有时会出现一种特殊而重要的情况：线性规划的多面体的每一个顶点，所有的坐标都恰好是整数. 这样，线性规划在顶点上的最优解就一定是对应整数规划的最优解. 因此，这类特殊的整数线性规划，就可以用解线性规划的方法来解决. 有不少的网络最优化问题，都可以表示为这类特殊的整数线性规划，因此，线性规划的理论与方法，就成为解网络最优化问题的最重要的工具之一. 但是，学习本课程的同学可能没有接触过线性规划，我们只能在"网络最优化"课程中尽量避免采用线性规划的方法，而把相应内容留到"线性规划"课程中去讲授. 但这使得本课程某些方面讲授的内容的深度受到限制.

§3 问题与算法

经典数学主要研究问题的存在性、唯一性、稳定性等方面的问题，对于纯粹的数值计算关心较少，而对于组合最优化问题更很少涉及. 对有些问题，例如如何将 n 个数按大小顺序排队，如何找出 n 个数中的中位数(数值大小恰好位于这 n 个数中间的数)等，更不去讨论. 产生这种情况的主要原因之一就是人们不具备有效的数值计算能力. 历史上，计算 π，计算对数曾耗费了某些人毕生的精力，这是众所周知的事实. 于是，人们不得不设法避开计算量庞大的问题.

计算机的出现使人们的计算能力大大增强．科学技术的发展使得许多组合最优化问题的重要性日益显示出来，而计算机又使这些问题的具体求解有了可能．同时在计算机发展过程中又提出了不少需要解决的组合最优化问题．这样，组合最优化这个运筹学分支在计算机发展的同时，也蓬勃地发展起来．因此组合最优化的基本内容是与计算机有紧密联系的．

为了进一步说明的方便，我们先把下面将要用到的"实例"与"问题"两个概念明确一下。(在汉语中，"问题"这个词的涵义太广泛了，所以我们必须把它限制一下．)一个要求解决的具体问题我们称为一个实例．联系(1.2.1)式，当给定了集合F和给定了函数c时，我们就说给出了一个实例．实例是能够具体着手进行求解的具体问题．

某些具有共同性质的实例的集合我们称为一个"问题"．第二节所举的十个例子都是问题．问题本身并不存在求解的问题，需要求解的是问题所包含的实例．

组合最优化研究的对象是组合最优化问题．主要内容是研究适合于计算机的计算方法．该方法能够普遍适用于某个问题所包含的每个实例，求出该实例的一个解．这个计算方法我们就称为适用于该问题的一个"算法"．

一般地说"算法"就是一组有穷的规则．对于属于它解决范围内的每个实例，任何人只要会正确地执行规则要求的操作，并遵循规则的指示一步一步地前进，在有限步后就能得到该实例的解．

因此，一个"合格"的算法必须包含下面四个特性：

第一：操作的可行性．规则中包含的每个操作必须是现有计算机能够实际执行的．

第二：确定性．对算法有效范围内的每个实例，在算法的每一步，必须能够明确地确定唯一的下一步是什么，直到算法执行