管理、决策与信息系统丛书

离散事件动态系统

极大代数方法

陈文德　齐向东　著

科学出版社

管理、决策与信息系统丛书

离散事件动态系统

极大代数方法

陈文德　齐向东　著

科学出版社

1994

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统论述在离散事件动态系统中占重要地位的极大代数方法.

全书共分三章. 内容包括: 建模方法,特征问题,系统周期分析, 实现理论,能达能观性,用反馈实现周期配置,稳定性,优化,干扰解耦,在轧钢厂的应用等方面.

本书取材于作者在科研前沿领域的成果,内容新颖,自成体系, 方法易懂,并有工程应用的专门章节与实例.

本书可供高等院校管理决策、自动控制、计算机、信息科学与应用数学等专业的本科生、研究生参考,也可供从事这方面工作的广大科技人员阅读.

管理、决策与信息系统丛书

离散事件动态系统

极大代数方法

陈文德 齐向东 著

责任编辑 李淑兰 鞠丽娜

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994 年 7 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1994 年 7 月第一次印刷 印张：3 7/8

印数：1—1 500 字数：91 500

ISBN 7-03-004093-7/TP・353

定价：5.60 元

序　言

管理、决策与信息系统是本世纪中发展起来的研究新领域.它从系统科学、数学和经济学中吸取了一些理论和方法,从而得到了飞速的发展.计算机科学和技术的发展,不仅为它在实践中的应用创造了条件,也为其理论探讨提供了工具.与此同时,系统科学、数学和计算机科学也从它的研究中发现了新问题,吸取了新养分.为了促进这个领域的发展,中国科学院管理、决策与信息系统开放研究实验室决定编写这套丛书.这套丛书不求全而求新,以反映我们的研究成果为主.

回顾管理理论的发展历史,我们可以发现一个趋势:系统的概念和方法越来越多地用于其中,并成为管理理论发展的第三阶段的重要特征.管理理论的第一阶段形成于本世纪初,以 F. W. Taylor 为代表,倡导科学的管理,他们针对提高工厂劳动生产率的问题提出了标准化原理.管理理论的第二阶段,从本世纪二三十年代开始,以行为科学为特点,主要代表有 A. H. Maolow, K. Lewin, R. Jannenbaum 和 D.McGregor 等人.他们研究人的需要、动机、激励和定向发展;研究正式和非正式的团体的形成、发展和成熟;研究个人在团体中的地位、作用,领导方式和领导行为等.管理理论的第三阶段出现在第二次世界大战后,这一阶段有各种学派,例如社会系统学派、决策理论学派、系统管理学派、管理科学学派和经验主义学派等.他们从不同角度强调系统的概念、理论和方法.这三个发展阶段并非截然分开,而是互相渗透的.不论管理有多少学派和多少技巧,我们大致可以分成三种模式:机械模式、生物模式和社会模式.生物模式认为,组织像一个生物,有头脑机构,有职能部分和分支机构;一个企业的目标可以分解,各部门完成其中的一部分.在这种模式下,目标管理得以发展.社

会模式认为，各级组织都是一个交互作用的系统，它们有共同的目标、交互作用和信息联系，管理者是交互作用的中心. 目前，美国有一学派强调交互式管理（interactive management)，强调以系统方法来管理。这正是它不同于传统管理的地方. 在实践上，传统管理大致分为三类：回顾式（reactive）管理、被动式（inactive）管理、预测式（preactive）管理. 回顾式管理是在自下而上地总结过去经验的基础上，去发现单位的弱点，找出克服它的措施，并在预算允许的条件下，逐个地实施. 被动式管理的特点是危机管理，是"救火队"，领导疲于处理各种各样的当前问题. 预测式管理的各种决策基于对今后的经济、技术、顾客行为和各种环境的预测. 这三类管理可以混合成各种样式的管理，正像红、黄、蓝可以组成各种颜色一样. 交互式管理强调系统的方法，认为某企业出现的市场问题绝不仅仅是个市场问题，而跟 R&D、生产、原材料供给和人事等等有关，是系统的问题，是整个企业的问题. 回顾式管理的弱点就是缺乏系统的观点. 交互式管理强调要设计可见的未来，创造一条尽可能实现它的道路，这是"救火队"所不能做到的，但它又不把一切都寄托于预测. 交互式管理还强调"全员参与"和"不断改进". 我们认为，交互式管理是社会模式的一种. 目前日本出现了"3C 管理"，核心就是竞争（competition）、合作（cooperation）和协调（coordination）.

决策理论学派是以 E. W. Simon 为代表从社会系统学派中发展起来的. 它认为决策贯穿于管理的全过程，管理就是决策. 决策的优劣在很大程度上依赖于决策者的智慧、素养和经验. 计算机技术的发展不仅使人们能够快速地解决决策中的复杂计算问题，而且可以有效地进行决策过程中的信息处理和分析等工作，从而达到提高决策质量的效果. 今天正处在不断发展阶段的决策支持系统（DSS）和管理信息系统（MIS）正是集管理理论、系统理论和信息技术三大成就的交叉学科，它们已为解决一些复杂决策问题提供了有力的工具. 粗略地说，决策问题或者管理问题大致可分为三个层次：战略决策、结构决策和运行决策. 战略决策是指

与确定组织发展方向和远景有关的重大问题的决策．结构决策是指组织决策，运行决策是指日常管理．

从信息论的观点看，整个管理过程就是一个信息的接收、传输、处理和增功与利用的过程．管理就是根据信息而进行的有效的控制行为．这些行为表现的形式为计划、组织、协调、反馈与控制．计算机信息处理，用于管理走过了三个阶段：数据处理（EDP），管理信息系统和决策支持系统．作为管理信息系统和决策支持系统的支持环境，相对独立于计算机科学的软件的开发，需要研究和建立各类管理信息系统独特的支持软件系统和开发环境，例如分布式数据库管理系统和分布式知识库管理系统；面向用户、通用性较强和面向特殊用户的模型库、方法库管理系统；以及一些专门的用户接口语言．

展望未来，我们认为管理、决策与信息系统这个交叉学科的研究领域，将会出现以下的发展趋势：

1. 更加重视人的行为的研究，企业的管理将不仅强调竞争，而且应在竞争的前提下注重合作与协调；

2. 宏观经济的非线性建模与决策分析，将与非线性数学的研究互相促进取得进展；

3. 计算机技术的飞跃发展，将为管理与决策提供更高的支持平台，例如数据库技术、人工智能、多媒体技术、智能化用户接口和网络技术的应用；

4. 在管理理论研究的基础上，在大量开发决策支持系统之后，利用计算机技术可能形成在一定范围内真正实用的决策支持系统；

5. 分布式系统模式将会有更广泛的应用；

6. 一些新的理论、方法和技术将会出现．

从这些展望中我们不难发现以下几个特点：（1）利用信息科学与数学中的最新成就，研究管理与决策中的问题并取得应用成果；（2）通过观察管理与决策系统发现其规律，研究管理与决策中的问题并取得应用成果；（3）通过观察管理与决策系统发现其规

律，形成数学与信息科学中的研究课题．这也是我们这套丛书的特色之一．

在这套丛书的编写中，我们在注重学术水平的同时，又注意其实用价值．因此这套丛书也有一定的适用面．丛书的作者们将竭尽努力把自己在有关领域中的最新研究成果和国外发展动态写得通俗易懂，以便使更多的读者用已掌握的有关理论和方法去解决他们工作中的实际问题．这是我们组织这套丛书的宗旨，也是我们的希望．

本丛书可供从事管理与决策工作的领导干部和管理人员、大专院校有关专业的师生以及技术人员学习、参考．

许国志　邓述慧

一九九三年五月

前　言

现代科学技术产生了一大批复杂的人造动态系统，例如：计算机集成制造系统（CIMS），柔性制造系统（FMS），某些流水生产线，计算机与通信网，交通控制系统，随机服务系统等．这类系统的运行不是由微分方程决定的，而是由离散事件错综复杂的相互作用决定的，并带有异步与并发特性，这类系统称为离散事件动态系统．1986年，几十位国际著名的控制系统专家，在“对于控制的挑战”一文[1]中指出：“重要而有挑战性的研究课题就是如何把以往对于微分方程描述的动态系统行之有效的分析、控制与优化技术进行修改，再应用到离散事件动态系统中．”著名控制系统专家何毓琦（Y.C. Ho），W. M. Wonham 和 G.J. Olsder 教授等人转入了这一领域．目前，这一新的科研前沿领域正处于蓬勃发展的上升时期，并已形成了多种研究方法．

本书是作者在中国科学院系统科学研究所工作期间写成的．限于作者的科研领域及书的篇幅，书中仅介绍极大代数方法．本书第一章的1.1节、1.6节、1.7.4到1.7.6小节，第二章（除2.7到2.9节外），第三章由陈文德研究员执笔，其余章节由齐向东助理研究员执笔．

极大代数方法早在60年代初就被英国的R.A. Cuninghame-Green教授[2]用来描述与分析工业过程，1979年他在《极小极大代数》[2]一书中系统总结了极大代数的数学理论．法国学派[3]在70至80年代对双子（dioid）代数结构及双子上的线性代数做了系统研究，极大代数是双子的特例．法国自动控制与应用数学专家G. Cohen博士等[4-8]人在上述各科学家工作的基础上，从80年代初期开始，以极大代数为工具，系统研究了离散事件动态系统（DEDS）的线性系统理论．DEDS本来是复杂的非线性系统，但

经过适当的建模，G. Cohen 等人把它看成了建立在极大代数上的线性系统. G. Cohen 博士等[6]人的论文于 1985 年在著名的刊物 IEEE, Trans. AC上发表后，引起了控制理论界广泛的关注与兴趣. 荷兰控制理论专家 G.J. Olsder 教授[9,10]在这个领域做了大量重要的工作;G. Cohen[8,7] 等人则继续他们的工作,其中涉及到了极大代数以外的几类双子的应用,并开拓了 2-D 域方法,“频率”域方法等. 我国学者[11-24] 从 80 年代后期至今也在这个领域做了大量的研究工作. 目前,极大代数方法已成为 DEDS 研究方法三个层次的代数层次中的一个主要方法，并有重要理论价值与应用前景.

本书作者[25]在 1984 年提出了准域这一代数结构,并研究了准域上的系统理论,包括能达能观性，实现理论等[26,27,28]. 准域与双子既有联系又有区别,它们都以极大代数为特例[29].在这个基础上又系统研究了极大代数方法[30-44]. 本书第一章介绍了 G. Cohen 等人在 DEDS 极大代数建模方面的两种方法（1.3 与 1.4 节），以及 G.J. Olsder 在实现理论方面的重要工作（1.7 节）. 文献[2,6]中对于 A 为不可约阵时给出了完整的特征值，特征向量，周期分析与动态方程的解的理论. 我们在他们所取得成果的基础上，研究了 A 为一般可约阵时的上述理论，1.5 与 1.6 节中介绍了我们的理论成果. 1.7 节的后半部分还介绍了我们在实现理论方面的研究成果. 本书第二章介绍关于 DEDS 的控制理论. 2.2 节介绍了 G. Cohen 等人[5]与我国学者[18,19]提出的两类能达能观性概念，本书作者证明了它们是同一概念的两个侧面并给出了判据，以后各节基本上是介绍本书作者的研究成果. 2.3 节中给出了基于 2.2 节能达能观的标准结构及其应用. 2.4 节系统严密地研究了各类周期配置(即极点配置)问题,给出了充要条件与算法. 2.5 节定义了两类稳定性，并给出了判据，这与 1.6 节密切相关. 2.6 节研究了干扰解耦及带周期配置的干扰解耦问题，并给出了充要条件. 2.7 节与 2.9 节证明了带工件托盘的系统是一致稳定的，而不带托盘的系统一般是多周期的. 2.8 节把达到最高生产率时,求最少托

盘数的最优化问题化成了整数规划问题. 本书第三章讲述了前两章的方法和理论在太原钢铁公司热轧流水线调度与控制方案中的应用[38]. 我们用极大代数方法建立了确定性模型, 并进行了周期分析与周期配置,在此基础上,用求微商方法得到了无阻塞条件下的最优调度与控制方案. 综上所述, 本书的主要内容是介绍 G. Cohen 等人与 G. J. Olsder 的工作及本书作者基于他们的工作所取得的研究成果. 由于篇幅有限, 国内学者的许多成果没有介绍. 本书作者的研究工作以多周期的 DEDS 为主要对象, 它也是由 G. Cohen 等人在文献[5]中首先研究的对象, 我们进一步系统研究了它. 研究结果表明, 它比单周期系统在理论上更加丰富,在实践中更有应用价值 (见本书第三章). 我们的研究方法主要是采用图论[45,46]与代数标准形方法[37]相结合, 这一方法上的特点充分显示了极大代数在离散的图, DEDS 与连续实数元素构成的矩阵 ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$) 之间的桥梁作用. 我们相信: 极大代数方法将在 DEDS 的理论与应用中发挥重要作用.

这里特别要指出的是: 本书中总结的科研成果部分地得到国家自然科学基金的资助.

由于我们学识水平所限,书中错误和不妥之处在所难免,恳切希望读者给予批评指正.

陈文德　齐向东

1993 年 8 月

目　录

第一章　离散事件动态系统的建模与分析

1.1 引　　言

离散事件动态系统（DEDS）的第一个重要问题是建模．建模有多种方法[11,15]，极大代数方法建模的优点是可以建成与传统线性系统理论的（A,B,C）模型相对应的模型，只不过这里不是传统的域上的线性系统，而是极大代数这种特殊的没有减法的代数结构上的线性系统．DEDS 本身是极为复杂的非线性系统，因而 G.Cohen 等[6]人把极大代数的建模方法称为伪线性方法．在本章 1.2 节中介绍了最低限度所需的数学知识，在 1.3 与 1.4 节中介绍了 G.Cohen 等[5,6]人提出的两种极大代数的建模方法．这两种富有创造性与广泛影响的方法在国内外多次被采用，但在某些方面尚未完善，如：对于极为一般的制造系统如何用 Petri 网与极大代数方法建模还是一个有待研究的问题．

实现理论既是控制理论的一部分，也可看作是一个建模问题．如：已知待设计系统的单位脉冲响应阵列（其某些性能指标要求），要求设计构造出这个系统的（A,B,C）模型，这就是实现问题．最小实现的构造方法是国内外公认的一个难题[5,24]．在本章 1.7 节中首先介绍了 G. J. Olsder[9,10] 在实现理论方面的重要贡献，然后介绍了本书作者[36]得到的能实现的充要条件与向量周期序列最小实现的维数与构造方法，这个结果与传统线性系统理论中最小实现的 Hankel 阵秩条件相类似．构造方法是图论方法与解极大代数上线性方程组方法的结合．关于实现理论的其它一些成果，如：G.Cohen[5] 得到了存在稳定实现的充要条件，文献[24]中研究了以多项式阵 A,B,C 为目标的实现理论，文献[27]中得到了准域上系统最小实现的充分条件及算法（极大代数是一类特殊

准域），限于篇幅，这里不一一介绍。

DEDS 的另一个重要问题是分析. 已知一个 DEDS 需分析与评价它的性能. 对于制造系统，粗糙地说：周期指的是完成一个或一批工件所需花费的时间或平均时间，它是一个决定生产率的非常重要的性能指标. 因此本书关于 DEDS 的分析围绕着周期这一中心问题. 周期与 A 的特征值有密切联系，本章 1.5 节对一般可约的方阵 A 给出了完整的关于特征值与特征向量的理论，特征向量在如何尽早使系统进入稳态的问题上有用. 本章 1.6 节给出了可约阵 A 为周期阵的充分条件，提出了分块周期阵的概念，给出了其充分条件，在这个基础上，分析了 DEDS 内含的与输出的周期，并进一步给出了动态方程的解. 这些结果在理论上（见 1.7 节）与工程应用中（见第三章）都是有用的，是本书作者[30,42]在文献[2，6]中关于不可约阵A的有关成果的基础上得到的. 可约阵对应的大多数是多周期系统，这种系统在工程中常见（见第三章）. 单周期与多周期系统在某种意义下对应于传统的 SISO 与 MIMO 系统.

1.2 极大代数与图论的基础知识

1.2.1 极大代数

设 R 是所有实数的集合，$\varepsilon \triangleq -\infty$，令 $\bar{R} = R \cup \{\varepsilon\}$，在 $\bar{R}$ 上定义加法$\oplus$与乘法. 如：

$$a \oplus b = \max\{a, b\},\ a \cdot b = a + b, \forall a, b \in \bar{R}$$

其中$+$是一般意义下的加法，乘号$\cdot$通常省略. 令 $D = \{\bar{R}, \oplus, \cdot\}$，则 D 称为一个极大代数，ε 和 0 分别是 D 的加法零元和乘法单位元.

用 $D^{m\times n}$ 表示极大代数上所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合. 设 $A, B \in D^{m\times n}$，$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$，矩阵的加法定义为

$$A \oplus B = (a_{ij} \oplus b_{ij})$$

如果 $A \in D^{m\times p}$，$B \in D^{p\times n}$，则矩阵的乘法定义为

$$AB = (c_{ij})$$

其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} {}_{\oplus} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} \oplus a_{i2}b_{2j} \oplus \cdots \oplus a_{ip}b_{pj}$$

求和号 $\sum_{\oplus}$ 可简记为 $\sum$. 相应地,方阵 A 的 k 次幂为

$$A^k = AA^{k-1}$$

设 $E \in D^{n\times n}$,且

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \cdots \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \cdots \varepsilon \\ \cdots & \cdots\cdots \\ \varepsilon & \varepsilon \cdots 0 \end{bmatrix}$$

则 E 是 D 上的 n 阶单位矩阵。设 $A \in D^{n\times n}$,若存在 $B \in D^{n\times n}$, 满足

$$AB = BA = E$$

则称矩阵 A 可逆, B 称为 A 的逆矩阵, A 的逆通常记为 A^{-1}. 设 $a \in \overline{R}, A \in D^{m\times n}$, 则纯量与矩阵相乘定义为

$$aA = (aa_{ij})$$

为方便起见,用 $(A)_{ij}$ 表示 A 的第 i 行第 j 列上的元素,而 $(A)_{i\cdot}$ 与 $(A)_{\cdot j}$ 分别表示 A 的第 i 行和第 j 列。

1.2.2 有向图与关联矩阵

一个有向图是一个二元组 (U,V), U 是图中所有点的集合, V 是所有弧的集合,可用自然数 $1,2,\cdots,n$ 对图中所有 n 个点进行编号,用有序数对 (ij) 或 ij 表示点 i 到点 j 的弧,这里 i 和 j 可以是同一个点。

从点 i_0 到点 i_k 的一条有向通道是点与弧的一个交替序列 $i_0,(i_0i_1),i_1,\cdots,i_k$,简记为 $i_0i_1\cdots i_k$。有向通道的长度是它上面所有弧的条数,所以 $i_0i_1\cdots i_k$ 的长度为 k. 如果 $i_k = i_0$, 即 i_k 和 i_0 是同一个点,那么 $i_0i_1\cdots i_k$ 称为一条闭通道。如果 $i_0i_1\cdots i_k$ 中所有点都不相同,则称它为一条有向路. 如果一条闭通道上所有

点都不相同，则称它为一条回路．在不致引起混乱的情况下，有向通道与有向路通称为路，而闭通道与回路通称为回路．如果点 i 到其自身有一条弧 (ii)，则称 (ii) 为一条自回路．

从点 i_0 到点 i_k 的一条半通道仍然是点与弧的一个交替序列 $i_0, x_1, i_1, \cdots, x_k, i_k$，但每一条弧 x_j 可能是 $(i_{j-1}i_j)$，也可能是 $(i_j i_{j-1})$．同样地可以定义半闭通道、半路和半回路．

一个有向图称为强连通的，如果对任意两点 i 和 $j(i \neq j)$，从 i 到 j 以及从 j 到 i 都有路，特别地，只含一个点的有向图也看作是强连通的；它称为单连通的，如果对任意两点 i 和 $j(i \neq j)$，或者 i 到 j 有路，或者 j 到 i 有路，或者两个方向的路都存在；它称为弱连通的，如果任意两点 i 和 $j(i \neq j)$ 之间存在一条半通道．弱连通图也称为连通图．

设 (U,V) 是一个有向图，在 U 上定义一个关系 R：首先规定 $(ii) \in R$，而当 $i \neq j$ 时，$(ij) \in R \Longleftrightarrow$ 从 i 到 j 以及从 j 到 i 都有路．容易验证 R 是一个等价关系，因此存在 U 的一个划分，把 U 分成 $U_1, U_2, \cdots, U_\omega$，每个 U_i 都对应一个子图 G_i，G_i 称为图 (U,V) 的一个强连通支，注意，G_i 可能只含一个点，这时它或者是一条自回路，或者仅仅是一个没有自回路的点．类似地，可以定义一个有向图的弱连通支，弱连通支也称为连通支．

设有向图 (U,V) 有 ω 个强连通支 $G_1, G_2, \cdots, G_\omega$，如果从 G_i 到 G_j 至少存在一条弧 (pq)，其中 p 是 G_i 上的点，q 是 G_j 上的点，则称从 G_i 到 G_j 有路，当然，如果 G_i 到 G_j 有路，则 G_j 到 G_i 一定无路，否则 G_i 和 G_j 可以合并为一个强连通支．把每个 G_i 看作一个点 i，或者说把 G_i 凝成一个点 i，不妨称它为凝点 i，如果 G_i 到 G_j 有路，则认为凝点 i 到凝点 j 有一条弧 (ij)，这样所有凝点以及凝点之间的弧就构成一个图，称此简化图为图 (U,V) 的凝图，显然凝图中没有回路．

给有向图 (U,V) 的每条弧 (ij) 赋以权重 $a_{ij}, a_{ij} \in R$，就得到一个赋权有向图．在赋权有向图中，一条路的权重等于它上面所有弧的权重之乘积，这里乘积是极大代数意义下的．路的平均

权重等于它的权重除以其长度，例如，路 $i_0i_1\cdots i_k$ 的平均权重为 $(a_{i_0i_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}i_k})/k$.

设 G_i 是赋权有向图 (U,V) 的一个强连通支，α 是 G_i 中的一条回路，α 的平均权重为 $W(\alpha)$，令 $W_m(G_i)=\max\limits_{\alpha\subset G_i}\{W(\alpha)\}$，如果 $W(\alpha)=W_m(G_i)$，则称 α 为 G_i 的一条临界回路。每个强连通支都有自己的临界回路(如果有回路的话).

对任意一个含有 n 个点的赋权有向图 (U,V)，都存在一个矩阵 $A\in D^{n\times n}$ 与之对应，其中

$$(A)_{ij}=\begin{cases}\text{弧 }(ij)\text{ 的权重}, & \text{如果 } i \text{ 到 } j \text{ 有弧}\\ \varepsilon, & \text{否则}\end{cases}$$

矩阵 A 称为图 (U,V) 的关联矩阵.

相反地，对任意一个 $A\in D^{n\times n}$，都存在一个赋权有向图 $G(A)$ 与之对应，$G(A)$ 中有 n 个点，当 $(A)_{ij}\neq\varepsilon$ 时，点 i 到点 j 存在一条弧，其权重为 $(A)_{ij}$，当 $(A)_{ij}=\varepsilon$ 时，点 i 到点 j 不存在弧. 图 $G(A)$ 称为矩阵 A 的关联图.

这样所有含 n 个点的赋权有向图组成的集合与 $D^{n\times n}$ 之间就存在一个一一对应关系。有时为了说明问题简明其见，在上下文能看清含义的情况下，$G(A)$ 与 A 通用.

如果图 $G(A)$ 是强连通的，则称 A 为不可约的，否则称 A 为可约的。特别地，当 $G(A)$ 只含一个点时，不管是否存在一条自回路，都认为它是强连通的，对应地，A 是不可约的.

定理 1.2.1 设 $A\in D^{n\times n}$，则对所有 i，$j(1\leqslant i, j\leqslant n)$ 及 $r\geqslant 1$，有

$$(A^r)_{ij}=\sum_p W_p \tag{1.2.1}$$

其中 p 是 $G(A)$ 中从点 i 到点 j 的任意一条长为 r 的路，W_p 表示其权重。换句话说，式(1.2.1)的意义是：A^r 的第 i 行第 j 列上的元素等于图 $G(A)$ 中从点 i 到点 j 的长为 r 的最重路的权重.