



高等学校统编教材

陀螺仪器原理

黄惟一 主编

3

国防工业出版社

陀螺仪器原理

黄惟一 主编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书主要讲授陀螺仪的基本理论和各种陀螺仪器。书中对陀螺方位仪、陀螺罗经、陀螺地平仪、微分陀螺仪、积分陀螺仪和平台罗经等陀螺仪器的组成方式、基本原理、工作特性、各种误差以及减小误差的途径和方法均作了详细介绍。

本书为高等院校陀螺导航专业教材，也可供从事陀螺仪器研制的工程技术人员参考。

陀 螺 仪 器 原 理

黄 惟 一 主 编

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张 14 $\frac{3}{4}$ 341 千字

1987年6月第一版 1987年6月第一次印刷 印数：0,001—1,000册

统一书号：15034·3244 定价：2.45元

前 言

本书系根据 1982~1985 年全国船舶类陀螺导航专业教材会议通过的《陀螺仪器原理》大纲编写的,供高等院校陀螺导航专业使用。讲授约 70 学时。

全书除绪论外共分七章。第一章陀螺仪基本理论是讲述陀螺仪的基本特性及其运动方程的建立和分析。这一章是本课程的基础理论。第二章定位陀螺仪器概述是介绍如何利用陀螺仪来解决运动物体的定位问题,为以后理解怎样把陀螺仪变为陀螺仪器打好基础。这一章是沟通陀螺仪和陀螺仪器的桥梁。从第三章到第七章是按陀螺方位仪、陀螺罗经、陀螺地平仪、微分陀螺仪和积分陀螺仪以及平台罗经的次序来介绍各种陀螺仪器的工作原理和特性,分析各种误差产生的原因及其消减的途径和方法。

本书除用力学观点来分析陀螺仪的基本特性以及各种陀螺仪器的工作原理和误差分析外,还用自动学观点把陀螺仪作为自动控制回路中的一个环节,给出各种陀螺仪器的方块图,以使用自动调节原理的方法来分析各种陀螺仪器的特性。

本书在编写上力求避免繁琐的数学公式推导,而着重物理实质的阐述。通过对各种陀螺仪器的介绍,使读者从中学会分析问题的方法,为今后从事陀螺仪器的设计和研究工作打好理论基础。

本书由南京工学院黄惟一主编,其中绪论、第一、二章由黄惟一编写;第四章由童钧芳编写;第三、五、六、七章由薛友伦编写。本书承海军工程学院翁维开同志主审,对书稿提出了许多宝贵意见;此外,海军工程学院等单位的有关同志还提供了不少参考资料,在此一并表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中难免有不妥和错误之处,恳请广大读者和使用本书的师生指正。

编 者

目 录

绪论	1
第一章 陀螺仪基本理论	4
§ 1-1 陀螺仪的定义、分类及其基本特性	4
§ 1-2 陀螺力学基础	8
§ 1-3 陀螺仪基本特性的力学解释	15
§ 1-4 陀螺仪运动方程	22
§ 1-5 陀螺仪的运动分析	26
§ 1-6 双自由度陀螺仪的传递函数	32
§ 1-7 陀螺仪的漂移	35
§ 1-8 双自由度陀螺仪的特性方程	45
第二章 定位陀螺仪器概述	48
§ 2-1 地球的自转和自由陀螺仪的视运动	48
§ 2-2 陀螺仪漂移测试方法简介	52
§ 2-3 参考坐标系及其变换	55
§ 2-4 航行体的定位和导航	61
§ 2-5 航行体运动速度对陀螺仪运动的影响	62
第三章 陀螺方位仪	65
§ 3-1 陀螺方位仪的功用、组成及工作原理	65
§ 3-2 陀螺方位仪的运动方程	67
§ 3-3 陀螺方位仪的使用误差	74
第四章 陀螺罗经	79
§ 4-1 陀螺罗经的基本原理	79
§ 4-2 单转子液体连通器陀螺罗经	87
§ 4-3 双转子摆式陀螺罗经	113
§ 4-4 电磁力矩控制的陀螺罗经	132
第五章 陀螺地平仪	159
§ 5-1 径向修正陀螺地平仪的组成及工作原理	159
§ 5-2 陀螺地平仪的修正装置及其特性	160
§ 5-3 陀螺地平仪在静基座上的运动方程	163
§ 5-4 陀螺地平仪的使用误差及其补偿方法	166
第六章 微分陀螺仪和积分陀螺仪	170
§ 6-1 微分陀螺仪的功用、组成和作用原理	176
§ 6-2 微分陀螺仪的运动方程和静态特性	177
§ 6-3 微分陀螺仪的传递函数及其动态特性	180
§ 6-4 转弯指示器的运动分析	182
§ 6-5 积分陀螺仪的构成及作用原理	185

§ 6-6	积分陀螺仪的运动方程及误差分析	184
§ 6-7	积分陀螺仪的传递函数及其动态特性	187
§ 6-8	积分陀螺仪的应用	189
§ 6-9	浮子式陀螺仪的构造原理	191
第七章	平台罗经	193
§ 7-1	由两个双自由度陀螺构成的平台罗经的工作原理	193
§ 7-2	平台罗经的运动方程及方块图	198
§ 7-3	主陀螺的运动方程、误差及其补偿	203
§ 7-4	副陀螺的运动方程、误差及其补偿	211
§ 7-5	平台罗经的误差补偿信号	214
§ 7-6	由单自由度陀螺及加速度计组成的平台罗经	216
§ 7-7	由单自由度陀螺及加速度计组成的平台罗经的使用误差及其补偿	226
参考文献		230

绪 论

陀螺仪是一种既古老而又很有生命力的仪器，从第一台真正实用的陀螺仪器问世以来已有大半个世纪，但直到现在，陀螺仪仍在吸引着人们对它进行研究，这是由于它本身具有的特性所决定的。陀螺仪最主要的基本特性是它的稳定性和进动性。人们从儿童玩的地陀螺中早就发现高速旋转的陀螺可以竖直不倒而保持与地面垂直，这就反映了陀螺的稳定性。研究陀螺仪运动特性的理论是绕定点运动刚体动力学的一个分支，它以物体的惯性为基础，研究旋转物体的动力学特性。

陀螺仪器原理是人们为解决运动物体的定位和控制问题，在生产实践中不断发展起来的一门应用科学，它以陀螺仪理论为基础，综合利用陀螺仪的稳定性和进动性来解决工程技术中有关的实际问题，例如确定航行物体相对地球表面的姿态。

陀螺仪器最早是用于航海导航，但随着科学技术的发展，它在航空和航天事业中也得到广泛的应用。陀螺仪器不仅可以作为指示仪表，而更重要的是它可以作为自动控制系统中的一个敏感元件，即可作为信号传感器。根据需要，陀螺仪器能提供准确的方位、水平、位置、速度和加速度等信号，以便驾驶员或用自动导航仪来控制飞机、舰船或航天飞机等航行体按一定的航线飞行，而在导弹、卫星运载器或空间探测火箭等航行体的制导中，则直接利用这些信号完成航行体的姿态控制和轨道控制。作为稳定器，陀螺仪器能使列车在单轨上行驶，能减小船舶在风浪中的摇摆，能使安装在飞机或卫星上的照像机相对地面稳定等等。作为精密测试仪器，陀螺仪器能够为地面设施、矿山隧道、地下铁路、石油钻探以及导弹发射井等提供准确的方位基准。由此可见，陀螺仪器的应用范围是相当广泛的，它在现代化的国防建设和国民经济建设中均占重要的地位。

在陀螺仪理论和陀螺仪器的发展史上，许多科学家付出了辛勤的劳动，并作出了卓有成效的贡献。

1758年俄国卓越的数学家和物理学家欧拉(Euler)发表了“刚体绕定点运动理论”的名著，导出了刚体绕定点运动的动力学方程，为陀螺仪理论奠定了基础。

1788年法国数学家拉格朗日(Lagrange)发表了“分析力学”的名著，从而加深了对陀螺现象及其特性的理解，并促进了对陀螺仪理论的研究。

十九世纪中叶，航海事业得到了很大的发展，钢质舰船开始问世，用磁罗盘导航已不能保证航行的安全，这就促使人们对新型导航仪器的研制进行探索。1852年法国著名的物理学家富科(Foucault)在巴黎科学院作了关于陀螺仪应用方面的报告，并提出三个陀螺仪样品：自由陀螺仪、机械罗经和纬度指示器。这是陀螺仪在技术上应用的开始。富科的报告在历史上是第一个提出利用绕定点高速旋转的对称刚体——陀螺仪来制作导航仪器的重要文献。由于当时技术水平的限制，富科的实验未能完满地证实他的想法，这些样品不能在实际中使用。但是，富科的这些想法对陀螺仪器原理的建立作出了卓越的贡献。

最早的陀螺仪器是航海陀螺罗经, 1865 年德雷珀 (Draper) 应用双自由度陀螺仪制成了第一个航海陀螺罗经, 这种罗经所用的陀螺马达是转速为 3000r/min 的直流电机。由于理论上和结构上都不完善, 这种罗经只能在实验室内测出航向, 而不能在舰船上使用。

1870 年出现了鱼雷, 并在各国海军中相继应用。1888 年奥勃利 (Orbeli) 应用一个双自由度陀螺仪来控制鱼雷的航向, 因而提高了鱼雷的命中率。这是陀螺仪应用技术的第一个成就。

1838 年法国将军弗勒里埃 (Flelia) 利用陀螺仪制成了人工地平仪即陀螺垂直器。它可以在夜晚或有雾看不清水天线时, 与六分仪合用观察星座以确定船位。这是陀螺仪应用技术的第二个成就。

陀螺应用技术的第三个成就是航海陀螺罗经的研制成功。二十世纪初, 由于电动机、高速轴承等都发展到一定水平, 为陀螺仪的制造提供了较好的条件。1908 年和 1909 年德国人安休兹 (Anshütz) 和美国人斯佩里 (Sperry) 先后制成了单转子陀螺罗经。但是这些罗经在舰船摇摆时产生巨大的误差。1923 年德国青年数学家舒勒 (Schuler) 提出自由振荡周期为 84.4min 的摆可以不受加速度干扰的影响。从此人们致力于制造自由振荡周期为 84.4min 的陀螺仪。1911 年斯伯里公司开始生产 MK-1 型单转子陀螺罗经。1912 年安休兹公司生产了三转子陀螺罗经, 在克服陀螺罗经的摇摆误差上取得了显著成效。斯佩里公司则仍在单转子基础上向前发展, 并于 1918 年起开始采用液体摆与陀螺房偏心相连的结构, 并使液体摆中因摇摆而引起的液体振荡与摇摆振荡在相位上相差 $1/4$ 周期, 从而也大大减小了罗经的摇摆误差。1926 年, 安休兹公司在著名科学家爱因斯坦的参加下, 制成了液浮式双转子陀螺罗经, 这种结构形式一直保存到现在。

1936 年出现了陀螺稳定器, 它首先在舰船上用来稳定测距仪, 以后还用来稳定探照灯和雷达天线等。

随着自动控制技术和计算机技术的迅速发展, 二十世纪五十年代出现了用浮子式陀螺仪制成的自由振荡周期为 84.4min , 在机动的航行体上能正确指示铅垂线的惯性平台。并在此基础上研制出了惯性导航系统。惯性导航系统是不依赖于外界的信号, 而利用安装在惯性平台上的加速度计, 测出航行体的加速度, 经两次积分后就能获得航行体运动位置的测量系统。

进入二十世纪五十年代以来, 陀螺罗经的控制方法也从古典摆式 (刚性摆和液体摆) 发展到电磁摆式, 出现了电控罗经。并在此基础上发展成既能提供地理子午面基准, 又能提供水平面基准的综合性导航仪器——平台罗经。

与此同时, 各种新型陀螺仪也在不断出现, 除液浮陀螺仪外, 气浮陀螺仪、静电陀螺仪、磁悬浮陀螺仪、挠性陀螺仪、激光陀螺仪、光纤陀螺仪、粒子陀螺仪等都在被用到实际的陀螺仪器中去。如 1978 年挪威罗伯逊 (Robertson) 公司已正式生产用挠性陀螺仪制成的 SKR-80 型罗经。

我国是世界上文化科学发展最早的国家之一。我国古代创造发明的指南车是世界上最早的导航仪器, 四、五千年以前陀螺就被应用在儿童玩具之中。但是, 由于封建社会的长期统治和近百年来帝国主义的侵略, 以致一般工业都得不到发展, 因此在旧中国就

根本没有陀螺仪器的生产。解放以来，在党和有关工业部门的领导和规划下，我国的陀螺仪器工业已初具规模，并得到了较快的发展，不少型号的陀螺仪器已经正式生产，新品种的试制和相应的设计研究工作正在不断开展。然而，由于生产陀螺仪器的技术要求很高，而且随着科学技术事业的不断发展，会对陀螺仪器提出愈来愈高的要求。因此，我们必须继续在理论研究和生产工艺等方面作许多工作，为发展我国的陀螺仪器事业而努力奋斗。

“陀螺仪器原理”是一门专业基础理论课。本教材是从力学和自动学的观点，用数学分析方法来研究陀螺仪的基本特性和陀螺仪器的工作原理。要求学生能够分析和研究陀螺现象，掌握陀螺仪的基本特性和运动规律，并能列写和分析陀螺仪器的运动方程；还要熟悉和掌握各种不同用途的陀螺仪器的工作实质，并能对各种陀螺仪器的工作特性和使用误差进行分析和研究，为能够正确选用所设计陀螺仪器的主要参数打好理论基础。

第一章 陀螺仪基本理论

§ 1-1 陀螺仪的定义、分类及其基本特性

一、陀螺仪的定义

凡是绕回转体的对称轴高速旋转的物体都可称为陀螺。所谓回转体是物体相对于对称轴的质量分布有一定的规律，是动对称的。常见的陀螺是一个高速旋转的转子。回转体的对称轴叫做陀螺转子主轴，或称极轴。转子绕这个轴的旋转称为陀螺转子的自转。

把高速旋转的陀螺安装在一个悬挂装置上，使陀螺主轴在空间具有一个或两个转动自由度，就构成了陀螺仪。所以，我们把陀螺及其悬挂装置的总体叫做陀螺仪。应当指出，所谓高速旋转是指转子绕极轴的自转角速度远大于转子绕不与极轴相平行的其它轴的旋转角速度。

在航海、航空、航天技术以及地质勘探和石油凿井等重要国民经济部门，陀螺仪得到了广泛的应用，这是因为陀螺仪具有两个最主要的特性——稳定性和进动性。利用这两个特性，能使陀螺主轴保持在给定的方位，从而能反映安装陀螺仪的载体相对给定方位的角位移或角速度。这样，在各种载体的导航和稳定系统中，陀螺仪就成为载体角位移初始信息的传感器。我们把陀螺仪能够保持给定的方位，并能够敏感载体角位移或角速度变化的功能称为陀螺效应。

应当明确地指出，把陀螺仪定义为陀螺及其悬挂装置的总体是经典的定义，是有局限性的。因为科学技术的发展已表明有许多物理现象可以用来保持给定的方位，并能够测量载体的转动，即能产生陀螺效应。这就是说产生陀螺效应不一定要有高速旋转的物体。因此，广义地讲，凡能产生陀螺效应的装置都可叫做陀螺仪。

图 1-1-1 是一个供实验用的转子陀螺仪，组成陀螺仪的悬挂装置是采用如图中所示的万向支架。万向支架是由外环和内环所组成，而且内环的轴线 oy 与外环的轴线 oZ 相互垂直并交于 o 点，内环可以绕内环轴 oy 相对外环自由转动，外环可以带着内环一起绕外环轴 oZ 相对底座自由转动。陀螺转子装在万向支架的内环里，而且转子主轴的轴线 ox 与内环轴线 oy 相互垂直并交于 o 点，转子可以绕其主轴 ox 相对内环转动。这样，转子除可绕 ox 轴旋转外，转子连同内环一起可绕 oy 轴相对外环转动，转子连同内环和外环一起可绕 oZ 轴相对底座转动，对转子来说，它就具有三个转动自由度，因此从运动学的观点来看，可以把这种陀螺仪叫做三自由度运动陀螺仪。但是从动力学的观点来看，在外力矩作用下，转子主轴 ox 绕内环轴 oy 和绕外环轴 oZ 的转

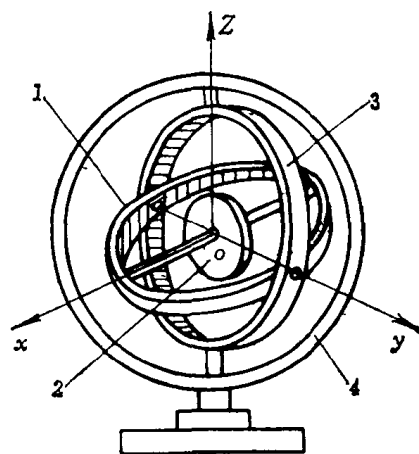


图1-1-1 转子陀螺仪

1—内环；2—转子；3—外环；4—底座。

动是确定 ox 轴在空间方位的两个独立参数，这两个独立参数与陀螺仪的进动性有关，所以把图 1-1-1 所示的陀螺仪叫做双自由度进动陀螺仪就更为恰当。在本教材中，这种陀螺仪就称为双自由度进动陀螺仪，简称双自由度陀螺仪。不难想到，通过万向支架，双自由度陀螺仪的转子主轴可以指向宇宙空间的任意方位。由于转子可绕 ox 、 oy 和 oZ 三根轴转动，显然，转子的运动规律本质上就是刚体绕定点的转动问题。转子在空间转动所绕的定点就是上述三轴的交点 o ，通常我们把 o 点称为陀螺仪的支架中心。

二、陀螺仪的分类

陀螺仪发展到现在已是种类繁多，它们主要是根据结构特点和工作原理来进行分类的，常见的分类方法有以下四种：

1. 按陀螺转子主轴所具有的进动自由度数目可分为双自由度陀螺仪和单自由度陀螺仪。图 1-1-1 所示的陀螺仪就是双自由度陀螺仪。若把双自由度陀螺仪的外环去掉，而把内环轴直接支承在底座上，则转子主轴对底座只有一个进动自由度，这样就成为如图 1-1-2 所示的单自由度陀螺仪。

2. 按陀螺仪重心的几何位置不同可分为平衡陀螺仪和重力陀螺仪。平衡陀螺仪是指陀螺仪重心与支架中心相重合的双自由度陀螺仪。这种陀螺仪的转子主轴无方位选择性，在任何一个位置都能平衡。因此，这种陀螺仪又称为无定位陀螺仪。不受任何外力矩作用的平衡陀螺仪称为自由陀螺仪。实际上完全不受外干扰力矩作用的自由陀螺仪是没有的。因此，自由陀螺仪应被理解为外力矩极为微小的平衡陀螺仪。重力陀螺仪是指陀螺仪重心与支架中心有某一偏移的双自由度陀螺仪。常用到的重心偏移的几种情况如图 1-1-3 所示，图中 o 点为陀螺仪的支架中心， G 点为重心，其中 (a) 和 (b) 的陀螺转子主轴是水平放置，而 (c) 的主轴是垂直放置。(a) 的重心沿转子主轴偏离支架中心，(b) 的重心沿与转子主轴相垂直的赤道轴偏离支架中心，(c) 也是沿转子主轴偏离支架中心。这些陀螺仪可以保持其转子主轴在某一定方位，因此又称为定位陀螺仪。

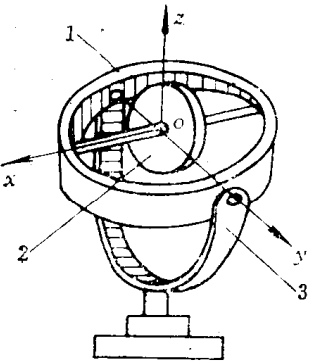


图1-1-2 单自由度陀螺仪
1—环架；2—转子；3—底座。

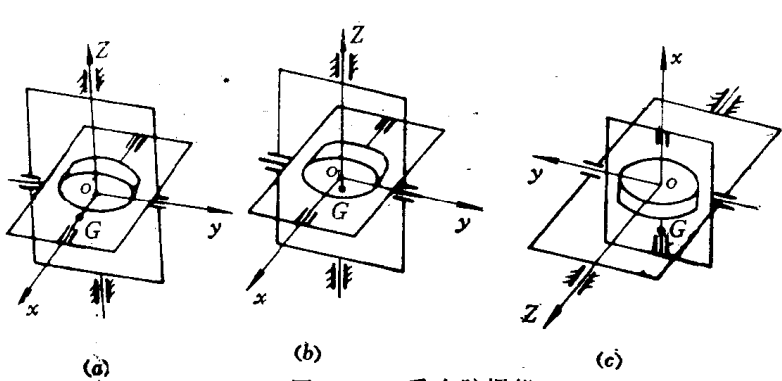


图1-1-3 重力陀螺仪
(a) 沿主轴水平偏移；(b) 沿赤道轴偏移；(c) 沿主轴垂直偏移。

3. 按陀螺仪的支承方式不同可分为框架陀螺仪、液浮陀螺仪、气浮陀螺仪、静电陀螺仪和挠性陀螺仪等等。框架陀螺仪是指如图 1-1-1 所示的用万向支架来悬挂陀螺转子的陀螺仪，这种陀螺仪的内外环通常是用滚珠轴承来支承的，由于轴承中存在着较大的摩擦，使框架陀螺仪的精密度较低。液浮、气浮、静电和挠性陀螺仪就是为了减小支承摩擦所发展起来的不同的支承方式的陀螺仪。图 1-1-4 是液浮陀螺仪的示意图，陀螺转子安装在密封的圆球内，圆球相当于框架陀螺的内环，圆球在液体中呈中性悬浮，使框架

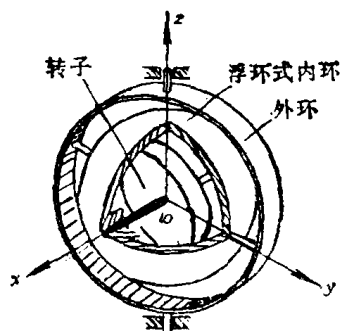


图1-1-4 双自由度液浮陀螺仪示意图

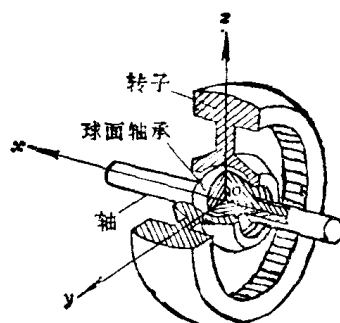


图1-1-5 双自由度气浮陀螺仪示意图

轴不承受力而只起定位作用，这样就会消除或减小框架轴上的摩擦力矩，以利于提高陀螺仪的精度。图 1-1-5 是气浮陀螺仪的示意图，转子上的内圆球面与轴上的外圆球面构成球面轴承，两个球面之间的间隙只有几微米。当转子绕自转轴高速旋转后，在球面轴承的间隙内形成具有一定刚度的气膜，产生气体动压。如果转子相对支承中心偏移时，则间隙变小一侧的气体动压增大，而间隙变大一侧的气体动压减小，使转子回到中心位置，起到支承转子的作用。球面支承除能使转子绕其主轴 ox 高速旋转外，还允许绕垂直于 ox 轴的两个正交轴 oy 和 oz 作小角度转动，即陀螺主轴具有两个转动自由度。图 1-1-6 是静电陀螺仪的示意图，转子是由铝或铍做成空心或实心球体，被放置在超高真空的陶瓷球腔内。球腔壁经过金属化处理后开出沟槽，使球腔面分割成六个支承面构成三对电极。转子与支承电极间的间隙有几十微米。当电极接通高电压时，电极与转子之间形成很强的静电场，由于静电感应作用，电极对转子产生吸力。如果转子相对球腔中心偏移时，利用电桥平衡电路，或借助于电路的谐振特性来自动调节电极的电压，使间隙变小一边的电极电压减小，从而减小静电吸力；同时间隙变大一边的电极电压增大，从而增大静电吸力，使转子回到中心位置。静电支承除能使转子绕其主轴 ox 高速旋转外，还允许主轴 ox 轴绕垂直于它的两个正交轴 oy 和 oz 有转动自由度，即陀螺主轴具有两个转动自由度。图 1-1-7 是挠性陀螺仪的示意图，转子借助挠性接头与驱动轴相连。挠性接头是一种无摩擦的弹性支承，分细颈式和动力调谐式两种，动力调谐式的挠性接头是由内扭杆、平衡环和外扭杆组成。挠性接头一方面将驱动轴的高速旋转运动传递给转子，另一方面又允许转子主轴 ox 绕垂直于它的两个正交轴 oy 和 oz 作小角度转动，这

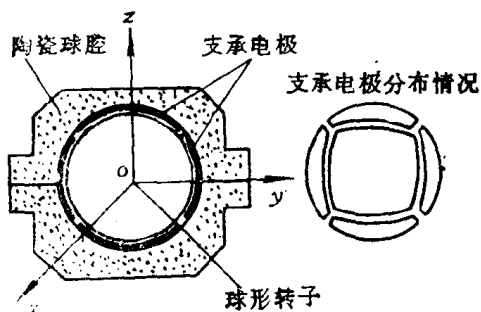
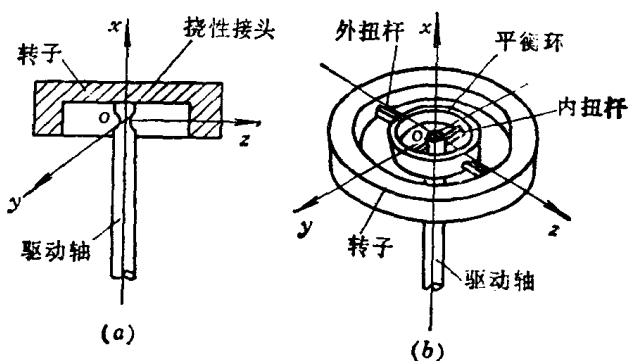


图1-1-6 静电陀螺仪示意图

图1-1-7 挠性陀螺仪示意图
(a) 细颈式；(b) 动力调谐式。

是因为挠性接头沿 oy 和 oz 轴的扭转刚度很小, 即很柔软。所以这种陀螺仪的主轴也具有两个转动自由度。

4. 按产生陀螺效应的原理不同可分为转子陀螺仪、振动陀螺仪、粒子陀螺仪、激光陀螺仪和光纤陀螺仪等等。上述各种陀螺仪都属于转子陀螺仪, 它们是利用高速旋转的转子来产生陀螺效应。振动陀螺仪是利用两个对称的高频振动物体(如音叉)代替高速旋转的转子来产生陀螺效应。粒子陀螺仪是利用基本粒子(如电子)的磁矩在磁场作用下, 或某些物质(如电介质)的分子在电场作用下来产生陀螺效应。激光陀螺仪是利用同一光源的两束激光在三角环形或方形回路中沿相反方向循环时, 因载体的转动使两束激光的振荡波长不一样而有频率差来产生陀螺效应。在激光陀螺仪中采用光纤作为闭合环形光路即可构成光纤陀螺仪。

以上介绍了各种不同结构特点和工作原理的陀螺仪, 但它们的动力学表现是一致的。由于目前应用比较广泛的陀螺仪仍然是转子陀螺仪。因此本教材主要论述用转子陀螺仪构成的各种陀螺仪器。

三、陀螺仪的基本特性

对图 1-1-1 所示双自由度平衡陀螺仪进行的实验表明, 当转子没有自转时, 转子和内、外环的运动性质与一般刚体没有什么不同, 当我们缓慢地转动底座时, 由于底座上的轴承中存在着摩擦, 使转子和内、外环将随着底座一起转动。对于外界给予内、外环的常值力矩或脉冲力矩的反应, 也与一般刚体一样, 即内、外环将沿力矩作用的方向转动。但是, 当转子绕主轴 ox 高速旋转时, 陀螺仪就会表现出不同于一般刚体的特性。从技术的角度来说, 双自由度陀螺仪有以下三个基本特性:

1. 稳定性 当转子绕其主轴高速旋转时, 我们转动如图 1-1-1 所示陀螺仪的底座, 陀螺仪主轴 ox 将在惯性空间保持初始方位不变。这一特性常被称为陀螺仪的定轴性。陀螺仪的稳定性还表现在它能抵抗外界的冲击干扰作用。当转子高速旋转, 且在陀螺仪上有瞬时脉冲力矩作用时, 陀螺仪主轴 ox 将在原来位置附近作高频微幅振荡, 主轴相对初始位置只有微小的偏离。这种高频微幅振荡叫做陀螺仪的章动。应当指出, 以上所说的“保持初始方位不变”和“只有微小的偏离”都说明陀螺仪的运动和一般刚体运动相比是具有很好的稳定性。

2. 进动性 当转子高速旋转, 陀螺仪沿 ox 轴具有角动量 $\vec{H}$ 后, 如沿陀螺仪外环轴 oz 上作用一个常值力矩 $\vec{M}_z$, 欲使陀螺仪绕 oz 轴转动, 但实际上陀螺仪并不绕 oz 轴转动, 而是以角速度 ω_z 绕与 oz 轴相垂直的陀螺仪内环轴 oy 转动, 转动的方向如图 1-1-8(a) 所示, 使主轴 ox 以最短的途径向外力矩向量 $\vec{M}_z$ 靠拢。如沿陀螺仪的内环轴 oy 上作用一常值力矩 $\vec{M}_y$, 陀螺仪并不绕 oy 轴而是以角速度 ω_y 绕与 oy 轴垂直的陀螺仪外环轴 oz 转动, 转动的方向如图 1-1-8(b) 所示, 力图使主轴 ox 以最短的途径向外力矩向量 $\vec{M}_y$ 靠拢。在外力矩作用下, 陀螺仪主轴转动方向与外力矩向量方向不一致, 而是与外力矩向量垂直, 并使或力图使主轴以最短途径向外力矩向量靠拢的特性, 叫做陀螺仪的进动性。

3. 陀螺反力矩 如果在图 1-1-8(a) 中沿外环轴 oz 作用的外力矩 $\vec{M}_z$ 是由人的手推外环而得到的, 那么人的手上就会感觉到有阻力, 而且手对外环施加的力越大, 感觉到的阻力也越大。由陀螺仪的进动特性可知, 此时外环并不转动而保持在原来的位置

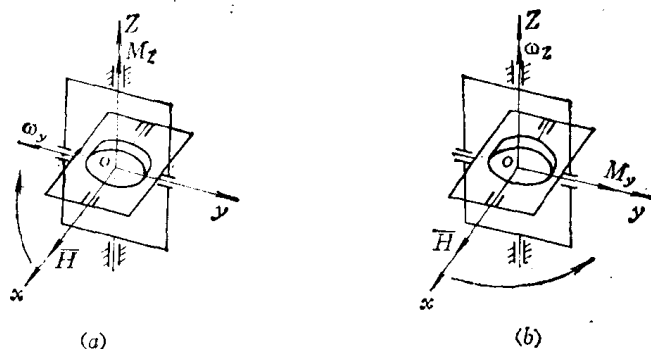


图1-1-8 陀螺仪的进动性

(a) 绕内环轴进动; (b) 绕外环轴进动。

上。这种由感觉到的阻力所形成的力矩就叫做陀螺反力矩, 简称陀螺力矩, 它和人的手作用在陀螺仪上的力矩大小相等, 方向相反。根据陀螺仪的进动特性, 可以理解成陀螺力矩是由陀螺仪进动而产生的, 它作用在施力物体上 (人的手上), 而不是作用在陀螺上。

陀螺仪具备的上述特性, 粗看起来, 似乎是反常的, 但是只要利用力学基础知识加以分析, 就可以看出, 这些现象是完全符合力学规律的。而且正是因为陀螺仪具有这些特性, 它才可能被用来制成各种不同用途的陀螺仪器和装置。

§ 1-2 陀螺力学基础

如前所述, 陀螺仪的运动本质上是刚体绕定点转动的问题, 需要有关的力学基础知识。这里, 不打算全面复习, 而只是有选择地回顾和补充一些与分析陀螺仪的特性和研究陀螺仪的运动直接有关的力学基础知识, 便于以后的应用。

一、哥氏加速度

哥氏加速度是研究陀螺仪产生陀螺力矩的理论基础。在研究刚体内质点的复合运动时, 如牵连运动为旋转运动, 则刚体内质点的加速度与牵连运动为平移运动的情况相比, 除了有相对加速度和牵连加速度之外, 还有一项附加加速度, 就叫做哥氏加速度。

在研究质点或刚体的复合运动时, 必须有两个坐标系, 一个为固定坐标系, 一个为动坐标系。现在研究动坐标系为旋转运动时的复合运动。图1-2-1中, $IXYZ$ 为固定坐标系, $oxyz$ 为动坐标系, $\vec{r}_0$ 为质点 P_1 在 $oxyz$ 坐标系中的位置向量, $\vec{r}_i$ 为同一质点 P_1 在 $IXYZ$ 坐标系中的位置向量, $\vec{\omega}$ 为动坐标系 $oxyz$ 相对固定坐标系 $IXYZ$ 的旋转角速度向量。当考虑相对运动时, 可假设动坐标系的角速度 $\vec{\omega} = 0$, 在时间间隔 Δt 内, 质点在动坐标系 $oxyz$ 内由 P_1 到 P' , $\overline{P_1P'}$ 为质点的相对位移。当考虑牵连运动时, 可假设质点 P_1 在动坐标系中的位置不

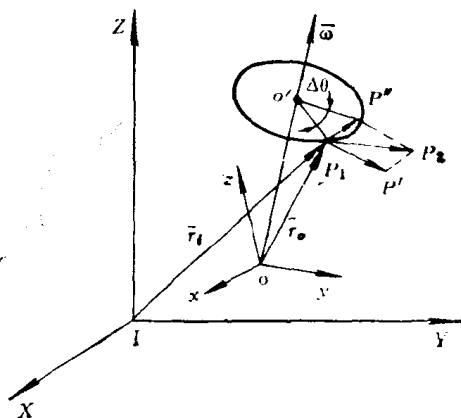


图1-2-1 质点的复合运动

变, 在时间间隔 Δt 内, 质点由 P_1 到 P'' , $\overline{P_1 P''}$ 为质点的牵连位移。此时动坐标系 $oxyz$ 相对固定坐标系 $IXYZ$ 转过的角位移为 $\Delta\theta = \omega \Delta t$ 。质点的绝对位移为 $\overline{P_1 P_2} = \overline{P_1 P'} + \overline{P_1 P''}$ 。当 $\Delta\theta$ 很小时, 由图 1-2-1 可得下列近似关系式

$$\begin{aligned} |\overline{P_1 P''}| &= (o' P_1) \Delta\theta = r_o \sin(\hat{\omega} \cdot \hat{r}_o) \Delta\theta \\ &= \omega r_o \sin(\hat{\omega} \cdot \hat{r}_o) \Delta t = |(\hat{\omega} \times \hat{r}_o) \Delta t| \end{aligned}$$

如令 $\overline{P_1 P_2} = \Delta \bar{r}_i$, $\overline{P_1 P'} = \Delta \bar{r}_o$, 则有

$$\Delta \bar{r}_i = \Delta \bar{r}_o + (\hat{\omega} \times \hat{r}_o) \Delta t$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 可得

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d\bar{r}_o}{dt} + \hat{\omega} \times \bar{r}_o \quad (1-2-1)$$

如果动坐标系的原点 o 与固定坐标系的原点 I 相重合, 则有 $\bar{r}_i = \bar{r}_o$, 并令它们都等于 $\bar{r}$ 。

为区别 $\bar{r}$ 相对不同坐标系的变化率, 用 $\frac{d\bar{r}}{dt}$ 表示对固定坐标系的变化率, 即绝对变化率; 用 $\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$ 表示对动坐标系的变化率, 即相对变化率, 由此式 (1-2-1) 可写为

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \hat{\omega} \times \bar{r} \quad (1-2-2)$$

式 (1-2-2) 称为哥氏方程, 也叫哥氏转动坐标定理, 可叙述如下: 在固定坐标系中, 某一向量函数对时间的变化率 (绝对变化率) 等于同一向量在动坐标系中对时间的变化率 (相对变化率) 与动坐标系对固定坐标系的旋转角速度向量和该向量本身的向量积进行向量相加。

应当指出, 在研究牵连运动为旋转运动的复合运动中, 哥氏方程是一个重要的辅助公式。式 (1-2-2) 中的 $\bar{r}$ 为一位置向量, 我们可以用其它任一向量, 如速度向量 $\bar{v}$ 、角动量向量 $\bar{H}$ 等, 来代替向量 $\bar{r}$, 这时式 (1-2-2) 的关系仍然是正确的。

由于 $\bar{r}$ 是质点 P_1 的矢径, 因此, 式 (1-2-2) 实际上就是质点 P_1 的绝对速度的表达式, 可表示为

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e \quad (1-2-3)$$

式中 $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ —— 绝对速度;

$\bar{v}_r = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}$ —— 相对速度;

$\bar{v}_e = \hat{\omega} \times \bar{r}$ —— 牵连速度。

式 (1-2-3) 表明质点的绝对速度等于其相对速度与牵连速度的向量和。

为求质点的加速度, 可把式 (1-2-3) 对时间求导, 考虑到 $\bar{v}_e = \hat{\omega} \times \bar{r}$, 并继续利用哥氏方程, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} &= \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d\bar{v}_e}{dt} = \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \hat{\omega} \times \bar{v}_r + \frac{d}{dt}(\hat{\omega} \times \bar{r}) \\ &= \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \hat{\omega} \times \bar{v}_r + \frac{d\hat{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \hat{\omega} \times \bar{v}_r + \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \bar{r}) \\ &= \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \frac{d\hat{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \bar{r}) + 2\hat{\omega} \times \bar{v}_r \end{aligned} \quad (1-2-4)$$

式中 $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ ——绝对加速度;

$\frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} = \vec{a}_r$ ——相对加速度;

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{a}_{e\tau}$ ——牵连切向加速度;

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_{en}$ ——牵连向心加速度;

$2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = \vec{a}_k$ ——哥氏加速度。

考虑到牵连加速度 $\vec{a}_e = \vec{a}_{e\tau} + \vec{a}_{en}$, 式 (1-2-4) 可写为

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k \quad (1-2-5)$$

式 (1-2-5) 称为哥氏定理, 可叙述如下: 当牵连运动为转动时, 质点的绝对加速度等于它的相对加速度、牵连加速度与哥氏加速度的向量和。

应当特别注意, 哥氏加速度的表达式为

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r \quad (1-2-6)$$

哥氏加速度的大小 $a = 2\omega v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}_r})$, 方向垂直于牵连角速度 $\vec{\omega}$ 与相对速度 $\vec{v}_r$ 所组成的平面, 如图1-2-2所示使 $\vec{\omega}$ 沿最短途径握向 $\vec{v}_r$ 的右手旋进方向即为 $\vec{a}_k$ 的方向。由式 (1-2-6) 容易看出, 当相对速度 $\vec{v}_r$ 与牵连角速度 $\vec{\omega}$ 相平行时, $\vec{a}_k = 0$ 。

应该注意到, 在利用哥氏方程推导式 (1-2-4) 时, 所得哥氏加速度的表达式 $\vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ 是由两个 $\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ 合并而成的, 这表示产生哥氏加速度是由两方面的原因引起的, 下面来分析它们的物理实质。

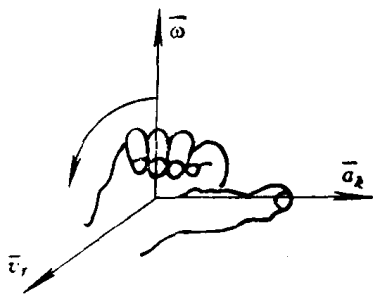


图1-2-2 哥氏加速度的方向

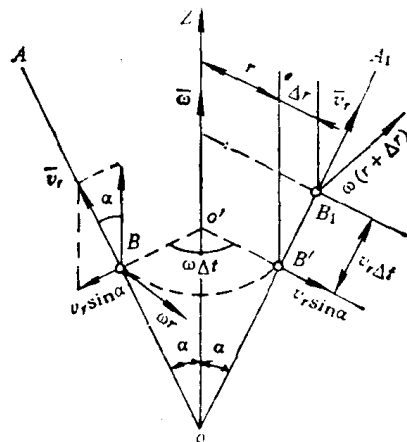


图1-2-3 牵连运动和相对运动的相互影响

在图 1-2-3 中, 设管子 OA 以等角速度 $\vec{\omega}$ 绕 OZ 轴作牵连旋转运动, 而质量为 m 的小球 B 以等速度 $\vec{v}_r$ 沿管子作相对直线运动。管子在经过时间间隔 Δt 后, 从 OA 转到 OA_1 , 并始终保持与 OZ 轴成 α 角, 而小球则从 B 运动到 B_1 。在这种情况下, 小球 B 的哥氏加速度 $\vec{a}_k$ 可表示如式 (1-2-6), 为 $\vec{a}_k = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, 由于管子 OA 与轴线 OZ 始终保持 α 角, 所以哥氏加速度的大小可写为

$$\vec{a}_k = 2\omega v_r \sin \alpha = \omega v_r \sin \alpha + \omega v_r \sin \alpha$$

现在根据上式来说明哥氏加速度的物理意义。在图 1-2-3 中, 把 $\vec{v}_r$ 分解为一个与 $\vec{\omega}$ 相垂直的分量 $v_r \sin \alpha$ 和一个与 $\vec{\omega}$ 相平行的分量 $v_r \cos \alpha$ 。只有与 $\vec{\omega}$ 相垂直的分量 $v_r \sin \alpha$ 才能产生哥氏加速度。

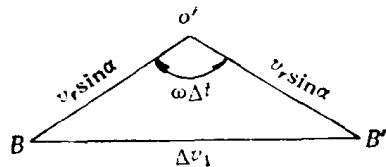


图1-2-4 牵连运动对相对运动的影响

第一项 $\omega v \sin \alpha$ 的存在是由于牵连角速度 $\bar{\omega}$ 使相对速度 $v \sin \alpha$ 产生方向改变, 也就是如图1-2-4所示由原来的 $o'B$ 方向, 在经过 Δt 时间间隔后, 改变到 $o'B'$ 方向。 $v \sin \alpha$ 的方向改变, 说明必有加速度存在, 由图1-2-4可知速度的增量为

$$\Delta v_1 = 2v \sin \alpha \sin \frac{\omega \Delta t}{2}$$

用 Δt 除上式两边, 并稍加整理后取极限, 可得加速度为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega v \sin \alpha \left(\frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}} \right) = \omega v \sin \alpha$$

这就是第一项哥氏加速度的大小, 其方向垂直于 $\bar{\omega}$ 和 $\bar{v}$ 所组成的平面, 并由右手旋进规则确定其指向。

第二项 $\omega v \sin \alpha$ 的存在是由于相对速度 $\bar{v}$, 使牵连线速度 ωr 产生大小改变, 也就是如图1-2-3所示由原来的 ωr , 在经过 Δt 时间间隔后, 改变为 $\omega(r + \Delta r)$ 。这个线速度大小的改变, 又说明必有加速度存在, 由图1-2-3可知速度的增量为

$$\Delta v_2 = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega \Delta r = \omega v \Delta t \sin \alpha$$

用 Δt 除上式两边, 并取极限, 可得加速度为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = \omega v \sin \alpha$$

这就是第二项哥氏加速度的大小, 显然, 其方向也是垂直于 $\bar{\omega}$ 和 $\bar{v}$ 所组成的平面, 并由右手旋进规则确定其指向。

应当指出, 牵连线速度 ωr 也具有方向的改变, 但这个改变不是由 $\bar{\omega}$ 与 $\bar{v}$ 的相互影响, 而是由 $\bar{\omega}$ 本身引起的, 这是旋转运动的向心加速度。因此, ωr 的方向改变表示有牵连向心加速度 $a_{en} = \omega^2 r$ 存在。

根据以上的讨论可以看出, 小球 B 的哥氏加速度是由于牵连角速度 $\bar{\omega}$ 与相对速度 $\bar{v}$ 的相互影响而产生的, 即相对速度 $\bar{v}$ 由于牵连角速度 $\bar{\omega}$ 而改变了方向, 以及牵连线速度 ωr 由于相对速度 $\bar{v}$ 而改变了大小。这就是哥氏加速度产生的物理实质。

作为例子, 我们来分析陀螺仪运动时转子内各质点的加速度。在图1-2-5中, 设转子绕自转轴 ox 的正向 (在图中 ox 轴垂直图画, 并指向读者, 用 $\odot$ 表示) 以等角速度 Ω 相对内环转动, 转子又连同内、外环绕外环轴 oZ 的正向以等角速度 ω 相对底座转动。显然, 角速度 Ω 使转子内的各质点产生相对运动, 而角速度 ω 使转子内的各质点产生牵连转动。为分析方便, 取距转子中心 O 为 r 的四个对称位置的质点 I、II、III、IV 为研究对象, 来分析转子内的质点所具有的加速度。由于转子以等角速度 Ω 绕自转轴 ox 转动,