

感应电法勘探中的电磁场

[苏联] $\frac{A. B. \text{維利金}}{F. C. \text{弗兰托夫}}$ 著

謝学融 译

中国工业出版社

本汇编叙述了水平层状介质和球状、柱状以及板状导体中场的电磁感应的理论问题。研究了关于地面和空中低频感应式电法勘探的一系列具体问题。

书中向读者介绍刊载于英、美、荷兰、意大利、加拿大、日本、捷克斯洛伐克、波兰等国杂志上的有关文章。

本书是为从事电法勘探的地球物理探矿工程师和科研人员写的。它也适于作为地球物理勘探专业高年级学生的教材。

本书由谢学融同志翻译，由罗延钟同志校对第一、二、四、五、六章，杨旭同志校对第三章，全书经薛琴副教授详细审阅复校。

А. В. Велкин и Г. С. Фрянов
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, ПРИМЕНЕНИЕ
В ИНДУКЦИОННЫХ МЕТОДАХ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ
ГОСПТЕХИЗДАТ ЛЕНИНГРАД, 1962.

感应电法勘探中的电磁场

谢学融译

地质部地质书刊编辑部编辑 (北京四环路市大营地质局院内)

中国工业出版社出版 (北京性麟阁路10号)

北京市书刊出版业营业许可出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ ·印张 $12^{9/16}$ ·字数304,000

1965年5月北京第一版·1965年5月北京第一次印刷

印数0001—2,670·定价(科五)1.70元

统一书号: 15165·3694 (地质-304)

緒 言

近几年来，感应电法勘探不論是在金属或是在构造地球物理学中都获得越来越大的发展。正由于此，在国内外期刊上发表了大量有关各种感应法理論问题的文章。本汇编向讀者介绍的是国外学者的一些著作，这些著作不是广大地球物理学界經常能看到的。

本汇编供已經掌握电法勘探基本理論的讀者参閱，这些基本理論在布尔西安 (Бурсиан, 1933, 1936)、扎博罗夫斯基 (Заборовский, 1943, 1960)、亚庫博夫斯基和利亚霍夫 (Якубовский, Ляхов, 1956) 等人的教科书中都有着詳尽的叙述。

本汇编所涉及的时期是从 1950 到 1960 年。編者尙未听说有总结此期間内国外学者的理論研究的著作。布赫海姆 (Buchheim, 1952) 曾經作过有关电法勘探感应法理論的基本研究的简短汇报，但是这个汇报局限于 1940—1946 年間的著作。杰科斯基 (Jakosky, 1950)、罗特 (E. Rothé, J. Rorté, 1952)、伊弗和克伊斯 (Eve, Keys, 1954)、赫拉迪克 (Hladik, 1956) 等人的书中也同早些时候的弗里奇 (Fritsch, 1949) 和海兰德 (Herland, 1949) 的专著一样，对感应法的理論都沒有作詳細的叙述。因此，本汇编的資料只得都取材于国外杂志上的文章。

在引用电磁場理論的基本原理方面，国外学者多半援引斯迈瑟 (Smythe, 1954)、斯特勒滕 (Stratton, 1948)、莫尔斯与費什巴赫 (Morse, Feshbach, 1960) 和舍耳庫諾夫 (Schelkunoff, 1943) 等人的书。这些书除最后一本以外，都已譯成俄文。有很多过时的参考文献，都换用了較新的文献。在編写本汇编时作为資料的文章的引文，已分別归入本汇编相应章节之中。

除了人民民主国家的学者之外，国外学者通常不引用苏联

完成的著作，虽然苏联地球物理界从廿年代开始，也就是从电法勘探产生的时候起，即着手研究感应电法勘探的所有方法。为了在一定程度上弥补这一缺陷，本汇编列出了苏联著作的书刊目录，而且在许多情况下都在正文内加了附注。

对解题的方法我们给予重视。数学计算通常不作特别的压缩。在汇编中列有各种图表和数字计算的个别例子。

公式所采用的单位为论文作者所选择的单位，即MKS制和高斯制单位。国外学者采用的符号与术语在好些情况下都换用了苏联文献上惯用的符号与术语。编辑此汇编时，在期刊文章里所发现的一些错误都纠正过来了。

本汇编是由两部分组成的。第一部分研究了均匀半无限空间和水平层状介质存在时的磁偶极子和无限长电缆激发的场。第二部分谈到的是有关计算具有平板状、球形和柱状等导体上空的二次场的问题。还分析了场的形成、线框的互感和根据观察结果对电性的确定等问题。

本汇编所讨论的理论适用于地面和空中的感应式电法勘探（其中包括旋转磁场法、无限长电缆法和天线的辐射电阻法），同样也适用于井中的电法勘探及其它方面。

本汇编不讨论大地电流法的理论，因为有关这种地球物理勘探方法的主要问题，已在不久前出版的别尔季切夫斯基（Бердичевский, 1960）的专著中阐述了。

汇编的编者完成了翻译工作。读者对本汇编中的缺点与错误所提的意见请投寄：г. Ленинград, ул. Ломоносова, 22, Ленинградское отделение Гостехиздата 或 г. Ленинград, ул. Весельная, 6 ВИТР.

本汇编学术编辑舍英曼（С. М. Шейнманн）对完成手稿有很大帮助，编者在此对他深表谢忱。

目 录

緒 言

第一編 均匀半空間和水平层状介质

第一章 在平面界面半无限导体中的电磁感应	1
§ 1. 場的基本方程, 边界条件, 建立解的原則	1
§ 2. 第一类型的解	5
§ 3. 第二类型的解	7
§ 4. 导电介质中电流的自由衰減	9
§ 5. 不同类型的一次場	13
1. 周期性的一次場	13
2. 常数 λ 等于零的情形	15
3. 非周期性的一次場	17
§ 6. 作为导电球体的极限情形的平面导电介质	19
第二章 磁偶极子和均匀半空間	22
§ 1. 垂直偶极子	23
1. 两种介质分界面上的垂直磁場和切向磁場	23
2. 空气和地球分界面上的径向磁場和垂直磁場	25
3. 介质表面上和介质中的垂直磁場	30
4. 小圓繞框的輻射电阻	32
§ 2. 水平偶极子	41
1. 垂直磁場	41
2. 水平磁場	43
3. 位于导电半空間內的偶极子的場	45
§ 3. 圓形水平繞框(迴綫)	55
1. 靠近繞框近区的垂直磁場	55
2. 圓繞框(迴綫)中心的垂直磁場。半空間电导率的确定	59
§ 4. 繞框的互阻抗	66
1. 在地面上的繞框	66

2. 在空气中的繞圈	77
§ 5. 垂直磁偶极子的不稳定場	79
1. 忽略位移电流和場在空气中传播的时间的情形	80
2. 考虑位移电流和場在空气中传播的时间的情形	82
第三章 磁偶极子和水平层状介质	99
§ 1. 垂直偶极子·布哈塔恰利亚的解	100
1. 二层介质的一般解	100
2. 电阻率差别不大的两层介质	106
3. 在絕緣基底上的导电层	108
4. 三层介质中的二次場的勢	110
§ 2. 垂直偶极子。韦特的解	111
1. 二层介质的一般解	111
2. 上层介质的电导率不大的情形	115
3. 介质层和基底的电导率差别不大的情况	116
4. 导电薄地层	118
§ 3. 迴綫中心的垂直磁場	123
1. 二层和三层介质上空的圆形迴綫	123
2. 解释	125
3. 計算矩形迴綫情形中的觀电导率	128
§ 4. 垂直磁偶极子。上层介质的电性按任意規律随深度变化的情形	132
1. 一般解	133
2. 計算函数 $\mu(z)$ 、 $\sigma(z)$ 、 $\epsilon(z)$	141
§ 5. 垂直偶极子。斯利席特尔和克諾波夫的解	150
§ 6. 导电薄地层上空的水平磁偶极子	163
§ 7. 綫框阻抗	165
1. 在二层介质上空綫框間的互阻抗	165
2. 在薄地层上空綫框間的互阻抗	170
3. 綫框的自阻抗	171
§ 8. 垂直磁偶极子的非稳定場	173
1. 薄地层	173
2. 二层介质。基底的电导率接近于上层介质的电导率	175
3. 綫框和水平短导綫之間的互阻抗	185
4. 网綫框的互阻抗	187

第四章 在地面上空的无限长电缆及水平层状介质	191
§ 1. 均匀半空间	192
1. 垂直磁场和水平磁场	192
2. 二次电流的分布	199
3. 平行于分界面流动的非周期性的总电流	201
§ 2. 二层介质	202
1. 第二层介质具有理想导体的性质	202
2. 介质层和基底都具有有限的电阻率	204
§ 3. 三层介质	213
§ 4. M 层介质的解	222
1. 一般解	222
2. 作为层状介质特殊情况的均匀半空间	225
3. 薄地层	228
4. 任意多层及二层介质的特殊情况	231

第二編 简单几何形状的导体中的电磁感应

第五章 旋轉体中的电磁感应	235
§ 1. 均匀场中的导电球体	236
1. 场的垂直和径向分量	236
2. 确定球体的埋藏深度、磁导率、半径和电导率	243
§ 2. 磁偶极子存在时的导电球体	249
1. 一般解	250
2. 方位磁偶极子	254
3. 径向偶极子	258
4. 在 $\frac{\mu_i}{\mu_a} = 1$ 条件下的二次场	259
5. 在 $\frac{\mu_i}{\mu_a} \neq 1$ 条件下的二次场	264
§ 3. 在螺线管状线圈场中的导电球体	268
1. 低频时螺线管的一次场	268
2. 导电球体的二次场	269
§ 4. 电缆场中的导电圆柱体	276
§ 5. 磁偶极子存在时的导电圆柱体	283
第六章 薄板中的电磁感应	296

§ 1. 二維繞射問題解的方法	291
1. 平面波的角譜	291
2. 積分法	296
3. 兩個基本的積分方程	299
4. 投射在半無限平板上的平面波	301
5. 方法在繞場源和准三維問題情況下的推廣	305
§ 2. 在理想導電半平面上求解偶極子場繞射問題的方法	307
1. 分析方法	307
2. 偶極子的繞射場	311
3. 解的簡化	315
§ 3. 磁偶極子存在時的理想導電半平面。特塞爾的解	321
1. 一般公式	321
2. 長波情況的近似公式	325
§ 4. 磁偶極子存在時的理想導電半平面。韋斯勒的解	337
§ 5. 磁偶極子存在時電導率及厚度皆有限的半無限平板	344
1. 磁偶極子存在時的無限平板	344
2. 半無限薄平板問題的解	352
§ 6. 磁偶極子存在時厚度很小、電導率很大的半無限平板	354
§ 7. 脈沖點源場中的理想導電半平面	358
§ 8. 導電薄平板存在時的繞框場的模型實驗	363
1. 相似條件與量的量綱	363
2. 模型實驗的裝置	364
3. 垂直導體的模型實驗工作	364
4. 水平導體的模型實驗工作	370
參考文獻	379
人名對照表	390

第一編 均勻半空間和水平层状介质

第一章 在平面界面半无限 导体中的电磁感应

〔蒲賴斯(Price), 1950〕

在第一章中，我們要討論在平面界面半无限导体中电流的感应和形成的基本理論。这个問題的一系列著名的重要研究工作是由索末菲 (Sommerfeld, 1926)、布尔西安与佛克(Бурсиан和Фок, 1926, 1933, 1936)、舍尔曼(Шерман, 1932)、斯蒂法內斯庫(Stefanescu, 1934, 1936, 1947, 1950)和其他一些人完成的。在蒲賴斯(1950)的著作中，作了建立不依赖于場源形式去計算二次場的概括理論的嘗試，他的著作奠定了本章的基础。与上述的学者們不同，蒲賴斯不采用借助赫茲矢量或矢量势表达的麦克斯韦方程的普通变换式。在第二、三和四章里，将以計算偶极子与电纜場源为例來說明蒲賴斯的原理。

§ 1. 場的基本方程，边界条件，建立解的原則

在連續介质中場矢量滿足麦克斯韦方程，此方程采用高斯单位制时，具有下列形式^①：

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} (4\pi \mathbf{i} + \dot{\mathbf{D}}), \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{i} = -\dot{\rho}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho. \quad (1.3)$$

① 上面带点的符号表示被研究的量对時間的导数。

如果介质均匀且各向同性，那么

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.4)$$

式中 σ 、 ϵ 和 μ 为常量， \mathbf{H} 为磁场强度， \mathbf{B} 为磁感应强度， \mathbf{E} 为电场强度， \mathbf{D} 为电感应强度， \mathbf{i} 为传导电流密度， σ 是电导率， μ 为磁导率， ϵ 为介电常数， ρ 为电荷体密度。从 (1.1) 和 (1.4) 式中得出，

$$\operatorname{div} \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \mathbf{D} + \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = 0, \quad (1.5)$$

由此

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} t},$$

也就是说，当时间 t 增大时，电荷体密度的初始值减小 ($\sigma \neq 0$)。随着时间的消失， ρ 变得十分小，以致在最一般情况下，可以认为 ρ 等于零^①，并且

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (1.6)$$

由 (1.1) 和 (1.2) 取旋度之后，求得场的所有分量都满足波动方程

$$\nabla^2 W = \frac{\mu}{c^2} \left(4\pi\sigma \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) W, \quad (1.7)$$

这里 W 指的是 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 或 \mathbf{H} 的任意分量。现在讨论方程 (1.7) 的特殊情况。在导体中，当场依赖于时间变化充分缓慢时，跟 $4\pi\sigma W$ 相比，可忽略 $\epsilon \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ 项。于是 (1.7) 方程归结为感应方程

$$\nabla^2 W = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (1.8)$$

在电介质中，电导率 σ 是可忽略的小量或等于零，因而 (1.7) 式归结为波动方程的另一形式

$$\nabla^2 W = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (1.9)$$

① 比较详尽的解释可以在布尔西安 (1936, 第 6 页) 或扎博罗夫斯基 (1960, 第 25 页) 的教程中找到——原编者。

由此可以得出，电磁場在电介质中以速度 $\sqrt{\frac{c}{\epsilon\mu}}$ 传播。在所討論的場变化相当緩慢时，可以忽略方程式 (1.9) 的右端，所以在电介质中

$$\nabla^2 W = 0. \quad (1.10)$$

在 (1.8) 和 (1.10) 式中作出的上述假設，意即在电介质中就象在导体中那样，可以忽略位移电流的場。从 (1.1) 式中可看出，在同样条件下在电介质中的 $\text{rot} \mathbf{H} = 0$ 。因此，可以利用标量势 Ω 来近似地計算 \mathbf{H} 。这样一来

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \Omega, \quad (1.11)$$

这里 Ω 满足拉普拉斯方程，因为 $\text{div } \mathbf{H} = 0$ 。

如果 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 用矢量势 \mathbf{A} 和标量势 U 来表示，

$$\mu \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} - \text{grad } U, \quad (1.12)$$

那么在下列条件下， \mathbf{A} 和 U 满足基本方程 (1.7) 或近似方程 (1.8) 和 (1.9)，

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{\mu}{c} \left(4\pi\sigma + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) U = 0. \quad (1.13)$$

解答用 \mathbf{A} 和 U 来表示。但是，利用 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的表示式比較簡單，因为 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 总是有限的，虽然在一般的形式中， \mathbf{A} 不經常是有限值。

在两介质的分界面上， \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的切向分量和 \mathbf{B} 的法向分量是連續的。对 \mathbf{A} 和 U 說来，相应的边界条件归结为 \mathbf{A} 和 $\text{grad } U$ 的切向分量的連續性。 \mathbf{D} 和 \mathbf{i} 的法向分量一般是不連續的。它們在分界面的法綫方向上的总和分別等于 $4\pi\hat{\sigma}$ 和 $-\hat{\sigma}$ （原书誤为 $-\hat{\sigma}$ ——譯者），这里 $\hat{\sigma}$ 为电荷面密度。

为了計算外場在任意形状导体中激发的电流或計算导体中电流系統的自由衰減^①，我們求方程式 (1.8) 和 (1.10) 式的解，

① 电流系統的自由衰減是一个不受外部場源影响的过渡过程——原編者。

这些解将满足边界条件。

設在直角坐标系中，导体占据了 $z < 0$ 的半空間，并且它的界面与 $z = 0$ 的平面重合。令磁場源位于 $z > h > 0$ 的范围之内。不导电且无磁性的介质占据 $0 < z < h$ 的中間区域。满足边界条件的微分方程式的基本解，象将要証明的一样，应该有两种类型。

对第一类型来說，导体中相应的电流系統在导体外部激起磁場；对第二类型来說，外部磁場不存在。当討論外部磁場源的作用时，只利用第一类型的解。可以証明，满足微分方程和边界条件的，同时也包含一次場^①的部分在内的解，都属于第一类型。如果在求得的另外一个解中，也包含有相应的一次場成分，那么由于方程式的綫性关系，这些解的差就是当一次場为零时的方程式的解。因此，这个差表示导体中的电流的自由衰减。在一般的情况下，自由衰减可用第二类型的解来确定。如果初始电流密度处处等于零，那么自由衰减的现象就不存在。一般解用下列形式来求是很方便的。

$$\mathbf{E} = Z(z, t) \mathbf{T}(x, y), \quad (1.14)$$

这里 Z 仅取决于变化的時間 t 。把 (1.14) 式代入 (1.6)、(1.8) 和 (1.10) 式之后，我們求得：

$$Z \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \right) + T_z \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial y^2} = \frac{1}{Z} \left(\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right) \mathbf{T}, (z < 0) \quad (1.16a)$$

和

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial y^2} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \mathbf{T}. (z > 0). \quad (1.16b)$$

在 (1.16a) 或 (1.16b) 式的右端， \mathbf{T} 前面的系数与 x 和 y 无关，因此可以把它当作常数，这一常数用符号 $-\lambda^2$ 表示，于是

① 国外学者常利用“感应場” (inducing field) 和“被感应場” (induced field) 等术语，我国学者很少用它。俄文中最通用的相应术语是“一次場”和“二次場”——原編者。

将有

$$\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial y^2} + \lambda^2 \mathbf{T} = 0. \quad (1.17)$$

和

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda^2 Z - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial Z}{\partial t} = 0, \quad (z < 0) \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \lambda^2 Z = 0, \quad (z > 0). \quad (1.19)$$

象在 (1.19) 中看到的一样, 常数 λ^2 实质上是正数。

从 (1.15) 式中得知, 或者是

$$T_z = 0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0, \quad (1.20)$$

或者是

$$\frac{1}{T_z} \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z} = -\alpha, \quad (1.21)$$

式中 α 为任意常数 (实数或复数)。下面分别分析对应于方程 (1.20) 和 (1.21) 的两种情况。

§ 2. 第一类型的解

在第一种情况中, 对于矢量 \mathbf{T} 的分量, 象在 (1.20) 式中看到的一样, 可以写成

$$\mathbf{T} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0 \right), \quad (2.1)$$

式中 P 为 x 和 y 的函数, 根据 (1.17) 式它应满足方程式

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \lambda^2 P = 0. \quad (2.2)$$

在电介质中由 (1.19) 式可求得

$$Z = A^*(t)e^{\lambda z} + B^*(t)e^{-\lambda z},$$

从而

$$\mathbf{E} = [A^*(t)e^{\lambda z} + B^*(t)e^{-\lambda z}] \left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0 \right). \quad (z > 0). \quad (2.3)$$

由于在平面 $z=0$ 上 \mathbf{E} 的切向分量的連續性, 在导体內將有

$$\mathbf{E} = Z(z, t) \left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0 \right), (z < 0), \quad (2.4)$$

式中

$$Z(-0, t) = A^*(t) + B^*(t). \quad (2.5)$$

从 (1.2) 中得到对应的磁場:

$$\mu \dot{\mathbf{H}} = -c \left(\frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial y}, \lambda^2 Z P \right), (z < 0) \quad (2.6)$$

和

$$\dot{\mathbf{H}} = -c \lambda \text{grad} \{ [A^*(t)e^{\lambda z} - B^*(t)e^{-\lambda z}] P \}, (z > 0). \quad (2.7)$$

这些表示式都满足边界条件。由于在 $z=0$ 表面上的 \mathbf{B} (或 $\dot{\mathbf{B}}$) 的法向分量的連續性, 我們重新得到了条件 (2.5)。 \mathbf{H} 的切向分量的連續性引出关系式:

$$Z'(-0, t) = \lambda \mu [A^*(t) - B^*(t)], \quad (2.8)$$

式中 Z' 表示 $\frac{\partial Z}{\partial z}$ 。

上边对場矢量引出的表示式称为第一类型的解。如果要討論外部一次磁場的作用, 就需要利用第一类型的解。实际上, 当 z 达到很大的負值时, 导体中的場强度應該趋近于零, 也就是

$$\text{当 } z \rightarrow -\infty \text{ 时,} \quad Z(z, t) \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

其次, 总磁場^①的标量势在 $0 < z < h$ 的区域內将满足拉普拉斯方程, 因此它能够用下列形式的函数和来表示:

$$\Omega = -[A(t)e^{\lambda z} + B(t)e^{-\lambda z}]P(x, y), \quad (2.10)$$

式中 λ 为实正数或零^②, 而 P 满足方程式 (2.2)。在极坐标中, 函数 $P(x, y)$ 可以写成貝塞尔函数和三角函数的乘积 $J_n(\lambda r) \cos(n\phi + \phi_0)$ 。給定在 $z > 0$ 区域內的任意函数 Ω , 在运用傅立叶定理

① 实际上存在的磁場 B 是一次場和二次場之和。在苏联文献上經常称之为“总和的”。蒲賴斯和苏联以外各国学者对这种場采用的术语是“全部的”(“total”)——原編者。

② $\lambda=0$ 的情况在第 4 节中討論。

和傅立叶-貝塞尔积分之后，就可以借助这种形式的函数表示出来。例如，当磁极安置于点 (x_0, y_0, z_0) 上时，点 (x, y, z) 上的势，可以在 $0 < z < z_0$ 区域内用李普希兹积分来表示

$$m \int_0^{\infty} e^{(z-z_0)\lambda} J_0(r\lambda) d\lambda,$$

式中 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ 。其次，在 (2.10) 式中包含 $e^{\lambda z}$ 的項对应于 $z \geq h$ 区域内的場源，即給定的一次場。包含 $e^{-\lambda z}$ 的項对应于場源位于 $z < 0$ 域內的場，也就是导体中二次电流的場(和磁感应的場，如果 $\mu \neq 1$ 的話)。因此，可以把在 (2.10) 式中的 $A(t)$ 看成已知的函数，将它同 (2.7) 式比較，我們便得到

$$c\lambda A^*(t) = -\dot{A}(t), \quad c\lambda B^*(t) = \dot{B}(t), \quad (2.11)$$

因此 $A^*(t)$ 也是已知的。

方程式 (2.5)、(2.8) 和 (2.9) 連同 (1.18) 式都借助于給定的函数 $A(t)$ 来单值地确定 $B^*(t)$ 和 $Z(z, t)$ 。这时，如果初始条件—— $B(t)$ 的初始值是已知的，那么在这个条件下二次場将完全被确定。这样一来，二次場和电流分布为第一类型的解所表示。在这些解中，矢量 E 的分量 E_z 处处为零，因而 i_z 也是如此。因此全部二次电流都平行于导体表面流动。

§ 3. 第二类型的解

当滿足方程式 (1.21) 时，我們来討論解的第二种方案。从方程 (1.21) 中看出， Z 应当具有下列形式：

$$Z = C(t)e^{\alpha z}. \quad (3.1)$$

从而，根据方程式 (1.18) 在导体內有

$$(\alpha^2 - \lambda^2)C(t) = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{C}(t),$$

即

$$C(t) = C_0 e^{-\beta t}, \quad (3.2)$$

式中

$$\beta = \frac{c^2(\lambda^2 - \alpha^2)}{4\pi\sigma\mu}. \quad (3.3)$$

若利用 (1.21) 和 (1.17) 式, 則可証明

$$T_x = \frac{\alpha}{\lambda^2} \frac{\partial T_z}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y}, \quad T_y = \frac{\alpha}{\lambda^2} \frac{\partial T_z}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial x},$$

式中 P_1 是 x 和 y 的函数, 并滿足方程式 (2.2)。包含 P_1 的表示式引向第一类型的解, 因此它們可以省略。由此, 写出 $T_z = \lambda P$ 之后, 我們获得导体內部 E 的第二类型的解

$$E = C_0 e^{-\beta t + \alpha z} \left(\frac{\alpha}{\lambda} \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\partial P}{\partial y}, \lambda P \right). (z < 0) \quad (3.4)$$

在导体外部, z 滿足方程式 (1.19)。把这方程式的解同 (3.1) 式比較之后, 我們看到, 当 $z > 0$ 时, $\alpha = \pm \lambda$ 。这样对于 E 将有下列表示式

$$E = \text{grad}[A_1(t)e^{\lambda z} + B_1(t)e^{-\lambda z}]P(x, y). (z > 0) \quad (3.5)$$

对于导体內部的磁場, 我們求得

$$\mu \dot{H} = -\text{crot } E = -cC_0 e^{-\beta t + \alpha z} \left(\lambda - \frac{\alpha^2}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0 \right). \\ (z < 0) \quad (3.6)$$

因为 E 是梯度矢量, 所以在导体外部 ($z > 0$),

$$\dot{H} = 0. \quad (3.7)$$

因此, 与第二类型的解有关的交变电流的分布, 使导体外部的磁場不存在。因此第二类型的解不用来計算交变外磁場所感应出来的电流。

談到边界条件, 那末 \dot{B} 的法綫分量是連續的, 因为在 $z < 0$ 域內, \dot{B} 的法向分量等于零。为了 \dot{H} 的切向分量的連續性, 必須使 \dot{H} 的切向分量在 $z = 0$ 处等于零。为此, 当 α 为实数时, 應該取 C_0 等于零。在一般情况中, 應該把 α 和 C_0 当作复数, 因此, 在 $z = 0$ 时, 需要把表示式 $C_0 e^{-\beta t + \alpha z} \left(\lambda - \frac{\alpha^2}{\lambda} \right)$ 的实数部分当作零。

假設 $C_0 = A_0 + iB_0$ 和 $\alpha = \tau + i\nu$ 之后，我們求得 A_0 和 τ 等于零。这时，数值 β 将是实数，而且是正值。其次，取出表示式 (3.4) 和 (3.6) 的实数部分之后，得到：

$$\mathbf{E} = -B_0 e^{-\beta t} \left(\frac{\nu}{\lambda} \cos \nu z \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\nu}{\lambda} \cos \nu z \frac{\partial P}{\partial y}, \lambda P \sin \nu z \right). \quad (z < 0) \quad (3.8)$$

和

$$\mu \dot{\mathbf{H}} = c B_0 \left(\lambda + \frac{\nu^2}{\lambda} \right) e^{-\beta t} \sin \nu z \left(\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{\partial P}{\partial x}, 0 \right). \quad (z < 0) \quad (3.9)$$

后一表示式满足等式 $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ 和 $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ ，这两等式与 (1.21) 式等价。还須满足 \mathbf{E} 的切向分量的連續性条件。根据 (3.5) 和 (3.8) 式，我們求得关系式

$$A_1(t) + B_1(t) = -B_0 e^{-\beta t} \frac{\nu}{\lambda}. \quad (3.10)$$

这里， $A_1(t)$ 相当于外部起源的电場，而 $B_1(t)$ 相当于分布在导体表面上的电荷的場，因为由方程式 (1.5) 和 (1.6) 知道体电荷等于零。如果假設給定在 $t=0$ 时刻的初始条件，那么在 (3.8) 和 (3.9) 式中遇見的所有参数将不依赖于 $A_1(t)$ 地被确定出来。特别是時間因子 $e^{-\beta t}$ 将与 $A_1(t)$ 无关，并且方程式 (3.10) 仅用于确定对应于 $B_1(t)$ 的面电荷。

由此可以指出，导体内部的場和电流按指数規律衰减，它保持着固有的形式，而不依赖于外电場。这样就可以忽略位移电流 \mathbf{D} 的磁效应。当 $\epsilon \mathbf{E}$ 与 $4\pi\sigma \mathbf{E}$ 可比拟时，位移电流的磁效应只有在場迅速变化的情况下才能被察觉。

获得的解称为第二类型的解，并且与按确定的形式分布在导体内的电流的衰减相对应。

§ 4. 导电介质中电流的自由衰减^①

① 戈耳登 (Gordon, 1951a) 补充蒲賴斯的研究：他在发现波动方程与热传导方程的形式相似的同时，并研究了外部电場和磁場感应生成的电流系統的自由衰减——原編者。