[redacted]感应电法勘探中的电磁场

〔苏联〕A. Б. 維利金
Г. С. 弗兰托夫 著

謝学融譯

中国工业出版社

本汇編叙述了水平层状介质和球状、柱状以及板状导电体中場的电磁感应的理論問題。研究了关于地面和空中低頻感应式电法勘探的一系列具体問題。

书中向讀者介紹刊載于英、美、荷兰、意大利、加拿大、日本、捷克斯洛伐克、波兰等国杂志上的有关文章。

本书是为从事电法勘探的地球物理探矿工程师和科研人員写的。它也适于作为地球物理勘探专业高年級学生的教材。

本书由謝学融同志翻譯，由罗延鈡同志校对第一、二、四、五、六章，楊旭同志校对第三章，全书經薛琴訪教授詳細审閱复校。

А. Б. Великин и Г. С. Франтов
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ
В ИНДУКЦИОННЫХ МЕТОДАХ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ
ГОСТОПТЕХИЗДАТ ЛЕНИНГРАД. 1962.

* * *

感应电法勘探中的电磁場

謝学融 译

*

地质部地质书刊編輯部編輯（北京西四羊市大街地质部院內）

中国工业出版社出版（北京佳麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店經售

*

开本850×1168 1/32・印张12 9/16・字数304,000

1965年5月北京第一版・1965年5月北京第一次印刷

印数0001—2,670・定价（科五）1.70元

*

統一书号：15165・3694（地质-304）

緒　言

近几年来，感应电法勘探不論是在金属或是在构造地球物理学中都获得越来越大的发展。正由于此，在国内外期刊上发表了大量有关各种感应法理論問題的文章。本汇編向讀者介紹的是国外学者的一些著作，这些著作不是广大地球物理学界經常能看到的。

本汇編供已經掌握电法勘探基本理論的讀者参閱，这些基本理論在布尔西安（Бурсиан，1933，1936）、扎博罗夫斯基（Заборовский，1943，1960）、亚庫博夫斯基和利亚霍夫（Якубовский，Ляхов，1956）等人的教科书中都有着詳尽的叙述。

本汇編所涉及的时期是从 1950 到 1960 年。編者尙未听說有总結此期間內国外学者的理論研究的著作。布赫海姆（Buchheim，1952）曾經作过有关电法勘探感应法理論的基本研究的簡短汇报，但是这个汇报局限于 1940—1946 年間的著作。杰科斯基（Jakosky，1950）、罗特（E. Rothé，J. Rorté，1952）、伊弗和克伊斯（Eve，Keys，1954）、赫拉迪克（Hladik，1956）等人的书中也同早些时候的弗里奇（Fritsch，1949）和海兰德（Heiland，1949）的专著一样，对感应法的理論都沒有作詳細的叙述。因此，本汇編的資料只得都取材于国外杂志上的文章。

在引用电磁場理論的基本原理方面，国外学者多半援引斯迈瑟（Smythe，1954）、斯特勒滕（Stratton，1948）、莫尔斯与費什巴赫（Morse，Feshbach，1960）和舍耳庫諾夫（Schelkunoff，1943）等人的书。这些书除最后一本以外，都已譯成俄文。有很多过时的参考文献，都換用了較新的文献。在編写本汇編时作为資料的文章的引文，已分別归入本汇編相应章节之中。

除了人民民主国家的学者之外，国外学者通常不引用

完成的著作，虽然苏联地球物理界从廿年代开始，也就是从电法勘探产生的时候起，即着手研究感应电法勘探的所有方法。为了在一定程度上弥补这一缺陷，本汇編列出了苏联著作的书刊目录，而且在許多情况下都在正文內加了附注。

对解題的方法我們給予重視。数学計算通常不作特别的压縮。在汇編中列有各种图表和数字計算的个别例子。

公式所采用的单位为論文作者所选择的单位，即 MKS 制和高斯制单位。国外学者采用的符号与术語在好些情况下都换用了苏联文献上慣用的符号与术語。編輯此汇編时，在期刊文章里所发現的一些錯誤都糾正过来了。

本汇編是由两部分組成的。第一部分研究了均匀半无限空間和水平层状介质存在时的磁偶极子和无限长电纜激发的場。第二部分談到的是有关計算具有平板状、球形和柱状等导电体上空的二次場的問題。还分析了場的形成、綫框的互感和根据观察結果对电性的确定等問題。

本汇編所討論的理論适用于地面和空中的感应式电法勘探（其中包括旋轉磁場法、无限长电纜法和天綫的輻射电阻法），同样也适用于井中的电法勘探及其它方面。

本汇編不討論大地电流法的理論，因为有关这种地球物理勘探方法的主要問題，已在不久前出版的別尔季切夫斯基（Бердичевский，1960）的专著中闡述了。

汇編的編者完成了翻譯工作。讀者对本汇編中的缺点与錯誤所提的意見請投寄：г. Ленинград，ул. Ломоносова，22，Ленинградское отделение Гостоптехиздата 或 г. Ленинград，ул. Весельная，6 ВИТР.

本汇編学术編輯舍英曼（С. М. Шейнманн）对完成手稿有很大帮助，編者在此对他深表謝忱。

目　录

第二編　簡单几何形状的导电体中的电磁感应

第一編　均匀半空間和水平层状介质

第一章　在平面界面半无限导体中的电磁感应

〔蒲賴斯(Price), 1950〕

在第一章中，我們要討論在平面界面半无限导体中电流的感应和形成的基本理論。这个問題的一系列著名的重要研究工作是由索末非（Sommerfeld, 1926)、布尔西安与佛克(Бурсиан和Фок, 1926, 1933, 1936）、舍尔曼（Шёрман, 1932）、斯蒂法內斯庫（Stefanescu, 1934, 1936, 1947, 1950）和其他一些人完成的。在蒲賴斯（1950）的著作中，作了建立不依賴于場源形式去計算二次場的概括理論的尝試，他的著作奠定了本章的基础。与上述的学者們不同，蒲賴斯不采用借助赫兹矢量或矢量势表达的麦克斯韦方程的普通变換式。在第二、三和四章里，将以計算偶极子与电纜場源为例来說明蒲賴斯的原理。

§1. 場的基本方程，边界条件，建立解的原則

在連續介质中場矢量滿足麦克斯韦方程，此方程采用高斯单位制时，具有下列形式❶：

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}(4\pi\boldsymbol{i}+\dot{\boldsymbol{D}}),\tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}},\tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{i}=-\dot{\rho},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho.\tag{1.3}$$

---

❶ 上面带点的符号表示被研究的量对时間的导数。

如果介质均匀且各向同性，那么

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{i}=\sigma\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{1.4}$$

式中 σ、ε 和 μ 为常量，$\boldsymbol{H}$为磁場强度，$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度，$\boldsymbol{E}$ 为电場强度，$\boldsymbol{D}$ 为电感应强度，$\boldsymbol{i}$ 为传导电流密度，σ是电导率，μ 为磁导率，ε 为介电常数，ρ 为电荷体密度。从（1.1）和(1.4)式中得出，

$$\operatorname{div}\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\boldsymbol{D}+\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{D}}=0, \tag{1.5}$$

由此

$$\rho=\rho_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t},$$

也就是說，当时間t增大时，电荷体密度的初始值减小($\sigma\neq 0$)。随着时間的消失，ρ 变得十分小，以致在最一般情况下，可以認为 ρ 等于零❶，并且

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0. \tag{1.6}$$

由（1.1）和（1.2）取旋度之后，求得場的所有分量都滿足波动方程

$$\nabla^2 W=\frac{\mu}{c^2}\left(4\pi\sigma\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)W, \tag{1.7}$$

这里 W 指的是 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 的任意分量。現在討論方程(1.7)的特殊情况。在导体中，当場依賴于时間变化充分緩慢时，跟 $4\pi\sigma W$ 相比，可忽略 $\varepsilon\frac{\partial W}{\partial t}$项。于是（1.7）方程归結为感应方程

$$\nabla^2 W=\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t}. \tag{1.8}$$

在电介质中，电导率 σ 是可忽略的小量或等于零，因而(1.7)式归結为波动方程的另一形式

$$\nabla^2 W=\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{1.9}$$

---

❶ 比較詳尽的解释可以在布尔西安（1936，第6頁)或扎博罗夫斯基（1960，第25頁）的教程中找到——原編者。

由此可以得出，电磁場在电介质中以速度$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$传播。在所討論的場变化相当緩慢时，可以忽略方程式（1.9）的右端，所以在电介质中

$$\nabla^2 W=0. \tag{1.10}$$

在（1.8）和（1.10）式中作出的上逃假設，意即在电介质中就象在导体中那样，可以忽略位移电流的場。从（1.1）式中可看出，在同样条件下在电介质中的 $\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=0$。因此，可以利用标量势$\Omega$来近似地計算$\boldsymbol{H}$。这样一来

$$\boldsymbol{H}=-\mathrm{grad}\ \Omega, \tag{1.11}$$

这里Ω滿足拉普拉斯方程，因为 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{H}=0$。

如果$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$用矢量势$\boldsymbol{A}$和标量势U来表示，

$$\mu\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A},\ \ \boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}-\mathrm{grad}U, \tag{1.12}$$

那么在下列条件下，$\boldsymbol{A}$和U滿足基本方程(1.7)或近似方程(1.8)和（1.9），

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}+\frac{\mu}{c}\left(4\pi\sigma+\varepsilon\ \frac{\partial}{\partial t}\right)U=0. \tag{1.13}$$

解答用$\boldsymbol{A}$和U来表示。但是,利用$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的表示式比較簡单，因为$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$总是有限的，虽然在一般的形式中，$\boldsymbol{A}$不經常是有限值。

在两介质的分界面上，$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的切向分量和$\boldsymbol{B}$的法向分量是連續的。对$\boldsymbol{A}$和U說来，相应的边界条件归結为$\boldsymbol{A}$和 $\mathrm{grad}\ U$的切向分量的連續性。$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{i}$的法向分量一般是不連續的。它們在分界面的法綫方向上的总和分别等于$4\pi\hat{\sigma}$和$-\hat{\sigma}$（原书誤为$-\hat{\sigma}$——譯者），这里$\hat{\sigma}$为电荷面密度。

为了計算外場在任意形状导体中激发的电流或計算导体中电流系統的自由衰减❶，我們求方程式（1.8）和（1.10)式的解，

❶ 电流系統的自由衰减是一个不受外部場源影响的过渡过程——原編者。

这些解将满足边界条件。

設在直角坐标系中，导体占据了 $z<0$ 的半空間，并且它的界面与 $z=0$ 的平面重合。令磁場源位于 $z>h>0$ 的范围之內。不导电且无磁性的介质占据 $0<z<h$ 的中間区域。满足边界条件的微分方程式的基本解，象将要証明的一样，应該有两种类型。

对第一类型来說，导体中相应的电流系統在导体外部激起磁場；对第二类型来說，外部磁場不存在。当討論外部磁場源的作用时，只利用第一类型的解。可以証明，满足微分方程和边界条件的，同时也包含一次場❶的部分在內的解，都属于第一类型。如果在求得的另外一个解中，也包含有相应的一次場成分，那么由于方程式的綫性关系，这些解的差就是当一次場为零时的方程式的解。因此，这个差表示导体中的电流的自由衰减。在一般的情况下，自由衰减可用第二类型的解来确定。如果初始电流密度处处等于零，那么自由衰减的現象就不存在。一般解用下列形式来求是很方便的。

$$\boldsymbol{E}=Z(z,t)\boldsymbol{T}(x,y), \tag{1.14}$$

这里 Z 仅取决于变化的时間 t 。把（1.14）式代入(1.6)、(1.8)和（1.10）式之后，我們求得：

$$Z\left(\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}\right)+T_z\frac{\partial Z}{\partial z}=0, \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial y^2}=\frac{1}{Z}\left(\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{T},(z<0) \tag{1.16a}$$

和

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial y^2}=-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\boldsymbol{T}.(z>0). \tag{1.16b}$$

在（1.16a）或（1.16b）式的右端，$\boldsymbol{T}$ 前面的系数与 x 和 y 无关，因此可以把它当作常数，这一常数用符号 $-\lambda^2$ 表示，于是

❶ 国外学者常利用“感应場”(inducing field) 和“被感应場” (induced field)等术語，我国学者很少用它。俄文中最通用的相应术語是“一次場”和“二次場”——原編者。

将有

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}}{\partial y^2}+\lambda^2 \boldsymbol{T}=0. \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}-\lambda^2 Z-\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t}=0,\ (z<0) \tag{1.18}$$

和

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}-\lambda^2 Z=0,\ (z>0). \tag{1.19}$$

象在（1.19）中看到的一样，常数 λ^2 实质上是正数。

从（1.15）式中得知，或者是

$$T_z=0 \text{ 和 } \frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}=0, \tag{1.20}$$

或者是

$$\frac{1}{T_z}\left(\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}\right)=-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial z}=-\alpha, \tag{1.21}$$

式中 α 为任意常数（实数或复数）。下面分别分析对应于方程（1.20）和（1.21）的两种情况。

§2. 第一类型的解

在第一种情况中，对于矢量 $\boldsymbol{T}$ 的分量，象在（1.20）式中看到的一样，可以写成

$$\boldsymbol{T}=\left(\frac{\partial P}{\partial y},\ -\frac{\partial P}{\partial x},\ 0\right), \tag{2.1}$$

式中 P 为 x 和 y 的函数，根据（1.17）式它应满足方程式

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\lambda^2 P=0. \tag{2.2}$$

在电介质中由（1.19）式可求得

$$Z=A^*(t)e^{\lambda z}+B^*(t)e^{-\lambda z},$$

从而

$$\boldsymbol{E}=[A^*(t)e^{\lambda z}+B^*(t)e^{-\lambda z}]\left(\frac{\partial P}{\partial y},\ -\frac{\partial P}{\partial x},0\right).\ (z>0). \tag{2.3}$$

由于在平面 $z=0$ 上$\boldsymbol{E}$的切向分量的連續性，在导体內将有

$$\boldsymbol{E}=Z(z,t)\left(\frac{\partial P}{\partial y},\ -\frac{\partial P}{\partial x},\ 0\right),(z<0), \tag{2.4}$$

式中

$$Z(-0,t)=A^*(t)+B^*(t). \tag{2.5}$$

从 (1.2) 中得到对应的磁場：

$$\mu\dot{\boldsymbol{H}}=-c\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\ \frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\partial Z}{\partial z}\ \frac{\partial P}{\partial y},\ \lambda^2 ZP\right),(z<0) \tag{2.6}$$

和

$$\dot{\boldsymbol{H}}=-c\lambda\ \mathrm{grad}\{[A^*(t)e^{\lambda z}-B^*(t)e^{-\lambda z}]P\},\ (z>0). \tag{2.7}$$

这些表示式都滿足边界条件。由于在$z=0$表面上的$\boldsymbol{B}$(或$\dot{\boldsymbol{B}}$)的法向分量的連續性，我們重新得到了条件 (2.5)。$\boldsymbol{H}$的切向分量的連續性引出关系式：

$$Z'(-0,t)=\lambda\mu[A^*(t)-B^*(t)], \tag{2.8}$$

式中Z'表示 $\dfrac{\partial Z}{\partial z}$。

上边对場矢量引出的表示式称为第一类型的解。如果要討論外部一次磁場的作用，就需要利用第一类型的解。实际上，当 z 达到很大的負值时，导体中的場强度应該趋近于零，也就是

当$z\to-\infty$ 时，　　$Z(z,t)\to 0.$ (2.9)

其次，总磁場❶ 的标量势在 $0<z<h$ 的区域内将滿足拉普拉斯方程，因此它能够用下列形式的函数和来表示：

$$\Omega=-[A(t)e^{\lambda z}+B(t)e^{-\lambda z}]P(x,y), \tag{2.10}$$

式中 λ 为实正数或零❷，而P滿足方程式 (2.2)。在极坐标中，函数 $P(x,y)$ 可以写成貝塞尔函数和三角函数的乘积 $J_n(\lambda r)\cos(n\phi+\phi_0)$。給定在 $z>0$ 区域內的任意函数 Ω，在运用傅立叶定理

---

❶ 实际上存在的磁場 B 是一次場和二次場之和。在苏联文献上經常称之为“总和的”。蒲賴斯和苏联以外各国学者对这种場采用的术語是“全部的”(“total”) ——原編者。

❷ $\lambda=0$ 的情况在第4节中討論。

和傅立叶-貝塞尔积分之后，就可以借助这种形式的函数表示出来。例如，当磁极安置于点(x_0,y_0,z_0)上时，点(x,y,z)上的势，可以在 $0<z<z_0$ 区域内用李普希茲积分来表示

$$m\int_0^\infty e^{(z-z_0)\lambda}J_0(r\lambda)d\lambda,$$

式中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$。其次，在（2.10）式中包含 $e^{\lambda z}$ 的項对应于 $z\geqslant h$ 区域內的場源，即給定的一次場。包含 $e^{-\lambda z}$的項对应于場源位于 $z<0$ 域內的場，也就是导体中二次电流的場（和磁感应的場，如果 $\mu\neq1$ 的話）。因此，可以把在（2.10）式中的 $A(t)$ 看成已知的函数，将它同（2.7）式比較，我們便得到

$$c\lambda A^*(t)=-\dot{A}(t),\quad c\lambda B^*(t)=\dot{B}(t),\tag{2.11}$$

因此 $A^*(t)$ 也是已知的。

方程式（2.5）、（2.8）和（2.9）連同（1.18）式都借助于給定的函数 $A(t)$ 来单值地确定 $B^*(t)$和 $Z(z,t)$。这时，如果初始条件——$B(t)$的初始值是已知的，那么在这个条件下二次場将完全被确定。这样一来，二次場和电流分布为第一类型的解所表示。在这些解中，矢量$\boldsymbol{E}$的分量 E_z 处处为零，因而 i_z 也是如此。因此全部二次电流都平行于导体表面流动。

§3. 第二类型的解

当滿足方程式（1.21）时，我們来討論解的第二种方案。从方程（1.21）中看出，Z 应当具有下列形式：

$$Z=C(t)e^{\alpha z}.\tag{3.1}$$

从而，根据方程式（1.18）在导体內有

$$(\alpha^2-\lambda^2)C(t)=\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\dot{C}(t),$$

即

$$C(t)=C_0e^{-\beta t},\tag{3.2}$$

式中

$$\beta=\frac{c^2(\lambda^2-\alpha^2)}{4\pi\sigma\mu}. \tag{3.3}$$

若利用（1.21）和（1.17）式，則可証明

$$T_x=\frac{\alpha}{\lambda^2}\ \frac{\partial T_z}{\partial x}+\frac{\partial P_1}{\partial y},\quad T_y=\frac{\alpha}{\lambda^2}\ \frac{\partial T_z}{\partial y}-\frac{\partial P_1}{\partial x},$$

式中 P_1 是 x 和 y 的函数，并滿足方程式（2.2）。包含 P_1 的表示式引向第一类型的解，因此它們可以省略。由此，写出 $T_z=\lambda P$ 之后，我們获得导体內部 $\boldsymbol{E}$ 的第二类型的解

$$\boldsymbol{E}=C_0e^{-\beta t+\alpha z}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\ \frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\alpha}{\lambda}\ \frac{\partial P}{\partial y},\ \lambda P\right).(z<0) \tag{3.4}$$

在导体外部，Z 滿足方程式（1.19）。把这方程式的解同（3.1）式比較之后，我們看到，当 $z>0$ 时，$\alpha=\pm\lambda$。这样对于 $\boldsymbol{E}$ 将有下列表示式

$$\boldsymbol{E}=\mathrm{grad}[A_1(t)e^{\lambda z}+B_1(t)e^{-\lambda z}]P(x,y).(z>0) \tag{3.5}$$

对于导体內部的磁場，我們求得

$$\mu\dot{\boldsymbol{H}}=-\mathrm{crot}\ \boldsymbol{E}=-cC_0e^{-\beta t+\alpha z}\left(\lambda-\frac{\alpha^2}{\lambda}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial y},\ -\frac{\partial P}{\partial x},\ 0\right).$$

$$(z<0) \tag{3.6}$$

因为 $\boldsymbol{E}$ 是梯度矢量，所以在导体外部（$z>0$），

$$\dot{\boldsymbol{H}}=0. \tag{3.7}$$

因此，与第二类型的解有关的交变电流的分布，使导体外部的磁場不存在。因此第二类型的解不用来計算交变外磁場所感应出来的电流。

談到边界条件，那末 $\dot{\boldsymbol{B}}$ 的法綫分量是連續的，因为在 $z<0$ 域內，$\dot{\boldsymbol{B}}$ 的法向分量等于零。为了 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 的切向分量的連續性，必須使 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 的切向分量在 $z=0$ 处等于零。为此，当 α 为实数时，应該取 C_0 等于零。在一般情况中，应該把 α 和 C_0 当作复数，因此，在 $z=0$ 时，需要把表示式 $C_0e^{-\beta t+\alpha z}\left(\lambda-\frac{\alpha^2}{\lambda}\right)$ 的实数部分当作零。

假設 $C_0=A_0+iB_0$ 和 $\alpha=\gamma+i\nu$ 之后，我們求得 A_0 和 γ 等于零。这时，数值 β 将是实数，而且是正值。其次，取出表示式（3.4）和（3.6）的实数部分之后，得到：

$$\boldsymbol{E}=-B_0e^{-\beta t}\left(\frac{\nu}{\lambda}\cos\nu z\frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\nu}{\lambda}\cos\nu z\frac{\partial P}{\partial y},\ \lambda P\sin\nu z\right).\quad (z<0)\qquad (3.8)$$

和

$$\mu\dot{\boldsymbol{H}}=cB_0\left(\lambda+\frac{\nu^2}{\lambda}\right)e^{-\beta t}\sin\nu z\left(\frac{\partial P}{\partial y},-\frac{\partial P}{\partial x},0\right).\ (z<0)\qquad (3.9)$$

后一表示式满足等式 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$ 和 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$，这两等式与（1.21）式等价。还須满足 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量的連續性条件。根据（3.5）和（3.8）式，我們求得关系式

$$A_1(t)+B_1(t)=-B_0e^{-\beta t}\frac{\nu}{\lambda}.\qquad (3.10)$$

这里，$A_1(t)$ 相当于外部起源的电場，而 $B_1(t)$ 相当于分布在导体表面上的电荷的場，因为由方程式（1.5）和（1.6）知道体电荷等于零。如果假設給定在 $t=0$ 时刻的初始条件，那么在（3.8）和（3.9）式中遇見的所有参数将不依賴于 $A_1(t)$ 地被确定出来。特别是时間因子 $e^{-\beta t}$ 将与 $A_1(t)$ 无关，并且方程式（3.10）仅用于确定对应于 $B_1(t)$ 的面电荷。

由此可以指出，导体內部的場和电流按指数規律衰減，它保持着固有的形式，而不依賴于外电場。这样就可以忽略位移电流 $\dot{\boldsymbol{D}}$ 的磁效应。当 $\varepsilon\boldsymbol{E}$ 与 $4\pi\sigma\boldsymbol{E}$ 可比拟时，位移电流的磁效应只有在場迅速变化的情况下才能被察覺。

获得的解称为第二类型的解，并且与按确定的形式分布在导体內的电流的衰減相对应。

§ 4. 导电介质中电流的自由衰減❶

❶ 戈尔登（Gordon，1951a）补充蒲賴斯的研究：他在发現波动方程与热传导方程的形式相似的同时，并研究了外部电場和磁場感应生成的电流系統的自由衰減——原編者。