常微分方程

下 册

CHANG
WEI
FEN
FANG
CHENG

湖南科学技术出版社

常微分方程

下 册

贺建勋　王志成

湖南科学技术出版社

常微分方程
贺建勋　王志成
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1981年9月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：17.375　字数：399,000
印数：1——4,700
统一书号：13204·40　　定价：1.80元

目　录

第七章 数值解法基础*)

常微分方程的数值解法范围很广，要在一章篇幅作个介绍相当困难。为了使读者在这方面打下基础并引起兴趣，我们着重介绍一阶方程初值问题的常用解法以及与数值计算有关的问题。至于方程组的问题、高阶方程边值问题等等的解法，有的是常用解法的推广或综合；有的则需要作特殊处理。由于篇幅关系，只好从略。但我们相信学过这一章，对数值解法有了基本了解、打下了基础，去阅读有关那些问题的专著就比较容易了。

现在考虑一阶常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & (0.1) \\ y(x_0) \equiv y_0 = a, & (0.2) \end{cases}$$

这里(0.1) 右方的$f(x,y)$为实变量x及y的函数，其定义域可设为R：$\{a \leqslant x \leqslant b;\ -\infty < y < \infty\}$，而$x_0 \in [a,b]$。

当$f(x,y)$取特别简单形式，如$f(x,y)=\lambda y$，则从 (0.1)的一般解$y(x)=ce^{\lambda x}$显然可定出任意常数$c=ae^{-\lambda x_0}$使之满足初始条件 (0.2)。对于某些特殊形式的函数$f(x,y)$，前几章的论述告诉我们，有各种求积方法用来寻找方程 (0.1) 的显式解，从而得出初值问题的解。但是这种可积类型实在有限，在描述自然现象的方程中绝大多数是不能求得其显式解的；另一方面，实际又常常要求知道解$y(x)$在各个x的数值。因此，即使有些问

*) 本章由林坚冰同志执笔。

题能求得显式解（例如上例所得的指数函数），计算解的数值也还需要借助于有关的理论（如逼近论）或工具（如函数表）．总之，无论从理论或应用的角度来看，讨论这类定确问题的数值解法及其有关的理论是很有必要的．

为了要用有限的步骤或计算程序求得解$y(x)$在各个x的近似值，首先要在x所在的区间$[a,b]$上选取有限个具有一定代表性的节点．以初值问题（0.1）（0.2）为例，通常我们是以x_0为起点按等距离$h>0$选取往后的节点x_i：

(0.3) $\qquad x_i=x_0+ih,\ (i=1,2,\cdots,n),$

其中$x_n\leqslant b$．这个h称为步长．显然，当我们选定$a=x_0$而$b=x_n$时，则步长h与节点个数$(n+1)$之间具有简单的关系：

(0.4) $\qquad nh=b-a.$

当理论分析中取$h\to0$时，在一定的区间上节点个数与$\frac{1}{h}$是同阶的．

用记号y_i表示问题的准确解$y(x)$（假定它存在）在点$x=x_i$之值$y(x_i)$的近似值，即

$$y_i\approx y(x_i),\quad (i=1,2,\cdots n).$$

从而把求初值问题的解$y(x)$离散化为求这些数值解$\{y_i\}$．

其次，记$f_i=f(x_i,y_i)$．在通常的假定（例如，$f(x,y)$关于x，y为连续的；或更强一些，关于y还满足李普希兹条件）下，f_i也可看作$f(x_i,\ y(x_i))$的近似值，即

(0.5) $\qquad f_i=f(x_i,y_i)\approx f(x_i,y(x_i)),\ (i=0,1,2,\cdots,n).$

现在，要把原方程离散化为节点x_i上的关系式，除了按（0.5）近似替代（0.1）的右方外，还得用$\{y_i\}$的差商来近似替代（0.1）左方的导数$y'(x_i)$．例如，我们可用前差替代它，即

(0.6) $\qquad \dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}\approx y'(x_i),\ (i=0,1,\cdots,n-1).$

这样原方程就离散化为如下递推关系式：

$$(0.7)\qquad y_{i+1}-y_i=hf(x_i,y_i),\ (i=0,1,\cdots,n-1).$$

它不过是差分方程的一种特殊形式。结合初始条件（0.2)式，我们就可以一步一步向前算出$y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n$。(0.7)式就是通常所谓欧拉(Euler)公式。

要注意，对方程(0.1)的左方还可以用其它形式的差商来替代；同样对右方也可用$\{f_i\}$的种种组合来替代。这样就产生各种类型以及不同精确度的解法或算式。关于这些解法及其有关问题将在下一节开始介绍。下面先介绍有关的预备知识。

§1 预备知识

这一节只是对算法推导过程所需要的一些基本概念、公式、技巧以及有关的结论作个简要的说明。其目的在于使读者学习后几节的论证有个根据。其完整的论述可参看其它教材。

1.1 差分与差分方程

假定节点$x_i=x_0+ih$（$i=0,\pm1,\pm2,\cdots$）相应的函数值为$y_i=f(x_i)$，则各阶差分可递推地定义如下：

$$(1.1)\qquad \Delta^n y_i=\Delta^{n-1}y_{i+1}-\Delta^{n-1}y_i,\ (n=1,2,\cdots).$$

如果以$\boldsymbol{H}$表示对$f(x)$的自变量x向右移位一步长h的算符，即$\boldsymbol{H}f(x_i)=f(x_i+h)=f(x_{i+1})$或$\boldsymbol{H}y_i=y_{i+1}$；而从$\boldsymbol{I}$表示恒等算符，即$\boldsymbol{I}f(x)=f(x)$，则$n$阶差分与各节点的函数值$\{y_i\}$之间有如下的关系式：

$$
\begin{aligned}
(1.2)\qquad \Delta^n y_i&=(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{I})^n y_i\\
&=\boldsymbol{H}^n y_i-n\boldsymbol{H}^{n-1}y_i+\cdots+(-1)^n y_i\\
&=y_{i+n}-ny_{i+n-1}+\cdots+(-1)^n y_i.
\end{aligned}
$$

如果$f(x)$具有直到n阶的导数，则成为

(1.3) $\Delta^n y_i = h^n f^{(n)}(\xi), \qquad (x_i < \xi < x_{i+n})$.

这表明n次多项式所构成的函数表的n阶差分一定是常数；反之，当函数表的n阶差分为(或接近)常数，则此函数可(或近似)表示为n次多项式。

由记号Δ定义的各阶差分称为向前差分；除Δ外还可以引进向后差分∇，中心差分δ等算符。它们可分别递推定义如下：

(1.4) $\nabla^n y_i = \nabla^{n-1} y_i - \nabla^{n-1} y_{i-1}, \quad \nabla y_i = y_i - y_{i-1}$;

(1.5) $\delta^n y_i = \delta^{n-1} y_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{n-1} y_{i-\frac{1}{2}}, \quad \delta y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$.

不难推出它们以及$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{I}$之间的许多关系式。例如

(1.6) $\nabla^n y_i = \Delta^n y_{i-n}, \quad \Delta^n y_i = \nabla^n y_{i+n}$,

(1.7) $\Delta = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{I}, \quad \nabla = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}^{-1}, \quad \delta = \boldsymbol{E}^{\frac{1}{2}} - \boldsymbol{E}^{-\frac{1}{2}}$,

其中 $\boldsymbol{E}^{\frac{1}{2}}$表示自变量$x$向右移位半步长$\dfrac{h}{2}$；算符$\boldsymbol{E}^{-1}$或$\boldsymbol{E}^{-\frac{1}{2}}$则分别为$\boldsymbol{E}$或$\boldsymbol{E}^{\frac{1}{2}}$之逆，即自变量$x$向左移位$h$或$\dfrac{h}{2}$的运算。

假定K是一组连贯的整数，而$y(k)$是定义在K上的待定函数，则等式

(1.8) $F(k; y(k), \Delta y(k), \cdots, \Delta^n y(k)) = 0$

称为关于$y(k)$的**差分方程**，这里函数F是给定的。如果按递推定义或关系式(1.2)展开其中各阶差分，则差分方程(1.8)又可写成等价的形式：

(1.8)* $G(k; y(k), y(k+1), \cdots, y(k+n)) = 0$.

如果方程中$y(k)$与$y(k+n)$同时出现，则称它为**n阶差分方程**；如果至少有一个$y(k)$或$y(k+n)$不出现，则方程的阶数就小于n。对一切$k \in K$满足(1.8)*的序列$\{y(k)\}$称为这差分方程的**解**。

一般n阶线性差分方程可写成：

(1.9) $a_n(k) y(k+n) + a_{n-1}(k) y(k+n-1) + \cdots$

$$+a_0(k)y(k)=f(k).$$

只要给定n个初值，例如$y(0)=y_0,\cdots$，$y(n-1)=y_{n-1}$，则由$k=0$的(1.9)就可求出y_n；再取$k=1,2,\cdots$就可以接连定出y_{n+1}，$y_{n+2},\cdots$。如果$f(k)=0$ 则称(1.9)为**齐次的**；$f(k)\neq 0$时，它称为**非齐次的**。

非齐次线性差分方程与相应的齐次线性差分方程（左方一样，仅右方自由项取零）的解之间的关系，类似于非齐次线性微分方程与齐次线性微分方程的解之间的关系：

1）如果$\{y_i(k)\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$是齐次差分方程的n个特解，则其任意线性组合：

$$(1.10)\qquad Y_n(k)=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(k)=C_1y_1(k)+\cdots+C_ny_n(k)$$

也是齐次差分方程的解。

2）如果特解的朗斯基(Wronski)行列式：

$$(1.11)\qquad \begin{vmatrix} y_1(1) & y_1(2)\cdots y_1(n) \\ y_2(1) & y_2(2)\cdots y_2(n) \\ \cdots & \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ y_n(1) & y_n(2)\cdots y_n(n) \end{vmatrix}\neq 0,$$

则这组线性无关的$\{y_i(k)\}(i=1,\cdots,n)$构成齐次方程的基本解组，而任何一特解$Z(k)$都可以表示为：

$$(1.12)\qquad z(k)=C_1y_1(k)+\cdots+C_ny_n(k).$$

换句话说，一组解$\{y_i(k)\}(i=1,\cdots,n)$可构成齐次方程的通解的充要条件是其朗斯基行列式不等于零。

3）非齐次方程(1.9)的通解可用它的一个特解与相应的齐次方程的通解之和来表示。

最后考虑更简单的n阶常系数线性差分方程，也就是(1.9)

中左方各项的系数$a_i(k)$ $(i=0,\ 1,\cdots,n)$以及$b(k)$都是与k无关的常量，从而可记作$a_i(k)=a_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$，$b(k)=b$。于是非齐次与相应的齐次方程可分别写成

(1.13) $a_ny(n+k)+a_{n-1}y(n+k-1)+\cdots+a_0y(k)=b$,

(1.14) $a_ny(n+k)+a_{n-1}y(n+k-1)+\cdots+a_0y(k)=0$,

$$(a_n\neq 0,\ a_0\neq 0).$$

假设方程(1.14)的解可写成$y(k)=z^k$，$z\neq 0$。将它代入(1.14)就得出关于z的n次代数方程：

(1.15) $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$,

它称为方程(1.14)的**特征方程**，其根称为**特征根**.

如果方程有n个互异的特征根z_1，$z_2,\cdots z_n$，那末，z_1^k，z_2^k，$\cdots$，z_n^k是方程(1.14)的一组线性无关解. 于是，(1.14)的通解可表示为

(1.16) $$Y(k)=\sum_{i=1}^{n}C_i\cdot z_i^k,$$

其中C_i为任意常数. 如果有一特征根，例如z_1为m重，则在通解表达式(1.16)中，含z_1^k因子的部分一样有m个任意常数而且可表示为

$$(C_1+C_2k+\cdots+C_mk^{m-1})z_1^k.$$

如果有成对共轭复根，例如$z_1=re^{i\theta}$，$z_2=re^{-i\theta}$，则含z_1^k与z_2^k的部分可改写为

$$C_1r^k\cos k\theta+C_2r^k\sin k\theta.$$

总之这些结论及其证明与齐次线性微分方程的通解的种种形式的讨论都是相似的.

例1 设θ为一常数，则差分方程

$$y_{k+2}-2\cos\theta y_{k+1}+y_k=0$$

的特征方程为$z^2-2\cos\theta z+1=0$，其二根为共轭复根：$z=\cos\theta$

$\pm i\sin\theta=e^{\pm i\theta}$. 因此当$\theta\neq m\pi$时（$m$为整数），方程的通解可表示为

$$Y(k)=C_1\cos k\theta+C_2\sin k\theta.$$

当$\theta=(2m+1)\pi$时，特征根$z_1=-1$为重根；当$\theta=2m\pi$时，特征根$z_1=1$为重根，这时其通解可分别表示为：

$$Y(k)=(C_1+C_2k)(-1)^k;\ \ Y(k)=C_1+C_2k.$$

例2 求三阶齐次差分方程

$$y_k-y_{k+1}-y_{k+2}+y_{k+3}=0$$

的特解使初始值取$y_{-1}=0$，$y_0=1$，$y_1=2$。

由于特征方程为$1-z-z^2+z^3=0$的根为$z=-1, 1, 1$，方程的通解为$Y(k)=C_1(-1)^k+C_2+C_3k$。依初始条件可得：

$$\begin{cases}y_{-1}=y(-1)=-C_1+C_2-C_3=0,\\ y_0=y(0)=C_1+C_2=1,\\ y_1=y(1)=-C_1+C_2+C_3=2.\end{cases}$$

解出$C_1=0$，$C_2=C_3=1$。结果，其特解为

$$y(k)=1+k.$$

例3 求 $y_{k+2}-2\cos\theta y_{k+1}+y_k=2$的通解。

先求其特解当$\theta\neq 2m\pi$时，该方程有常数解C，即$(1-2\cos\theta+1)C=2$或$C=(1-\cos\theta)^{-1}$；当$\theta=2m\pi$时从$y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k=\Delta^2y_k=2$可知其特解可取$y(k)=k^2$。综合上述，这个方程的通解可分别表示如下：

当$\theta\neq m\pi$时，$y(k)=C_1\cos k\theta+C_2\sin k\theta+(1-\cos\theta)^{-1}$；

当$\theta=2m\pi$时，$y(k)=C_1+C_2k+k^2$；

当$\theta=(2m+1)\pi$时，$y(k)=(C_1+C_2k)(-1)^k+\dfrac{1}{2}$。

最后，我们介绍今后误差分析中会经常遇到的递推不等式。应用差分方程理论可证如下二引理：

引理1·1 如果正实数序列$\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$满足递推不等式：

(1.17) $e_{n+1}\leqslant\varphi e_n+q$, $n=0, 1, 2, \cdots$,

其中φ与q为非负常数，那末就有

(1.18) $\begin{cases}\text{当}\varphi=1\text{时，} e_n\leqslant e_0+nq,\\ \text{当}\varphi\neq1\text{时，} e_n\leqslant\varphi^n+e_0+q(\varphi^n-1)/(\varphi-1).\end{cases}$

特别当$\varphi=1+\alpha$，$\alpha>0$时，上面这不等式又可改写为

(1.19) $e_n\leqslant e_0 exp(n\alpha)+q[exp(n\alpha)-1]/\alpha$.

【证】 假定$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$为相应的差分方程

(1.20) $y_{n+1}=\varphi y_n+q$, $y_0=e_0$

的解．用归纳法不难证明：$e_n\leqslant y_n$对一切n都成立．

当$\varphi\neq1$时方程 (1.20) 有一特解 $-q/(\varphi-1)$，而相应的齐次方程$y_{n+1}=\varphi y_n$的通解为$y_n=C\varphi^n$，C为任意常数，因此方程(1.20)的通解为

$$y_n=C\varphi^n-q/(\varphi-1),\quad(\varphi\neq1).$$

再依初始条件$y_0=e_0$可得：$C=e_0+q/(\varphi-1)$,

代入上式就证明了$\varphi\neq1$的估计式．

当$\varphi=1$时，从$\Delta y_n=y_{n+1}-y_n=q$可得特解 $y_n=qn$；相应的齐次方程 $\Delta y_n=0$的通解为$y_n=C$。因此，方程(1.20)的通解为$y_n=C+qn$，结合初始条件可得解$y_n=e_0+qn$。这就证明了$\varphi=1$的情况。

如果$\varphi=1+\alpha$，$\alpha>0$，则从$\varphi=1+\alpha<exp\alpha$，$\varphi^n<exp(n\alpha)$，就不难推出估计式(1.19)。证毕。

引理1·2 如果正实数序列$\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$对于$n\geqslant m$满足递推不等式：

(1.21) $e_{n+1}\leqslant e_n+\varphi_0 e_n+\varphi_1 e_{n-1}+\cdots+\varphi_m e_{n-m}+q$,

其中$\varphi_r\geqslant0$ $(r=0,1,\cdots,m)$而$q\geqslant0$，那末对于一切$n\geqslant0$，都成立

(1.22) $e_n \leqslant [\delta + (q/\varphi)]e^{n\varphi} - (q/\varphi)$,

其中δ是不小于$\{e_r\}_{r=0}^{m}$的任意实数，而

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_m > 0。$$

〔注意：对于$\varphi = 0$的情况，$\varphi_i = 0, (i = 0, 1, \cdots, m)$，这不过是引理1.1中$\varphi = 1$的情况〕。

【证】 假设差分方程

$$y_{n+1} = (1 + \varphi)y_n + q, \quad y_0 = \delta$$

的解为$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$，那末就有

(1.23) $y_r \geqslant y_0 = \delta \geqslant e_r, \ r = 0, 1, \cdots, m$,

(1.24) $y_{n+1} \geqslant y_n, \quad n \geqslant 0$。

现在要用归纳法证明，对一切$n \geqslant 0$，$y_n \geqslant e_n$。依(1.23)可知，一定存在某一整数$M \geqslant m$，使得

$$y_n \geqslant e_n, \ (n \leqslant M)。$$

于是，从(1.24)可得

$$\begin{aligned} e_{M+1} &\leqslant e_M + (\varphi_0 e_M + \cdots + \varphi_m e_{M-m}) + q \\ &\leqslant y_M + (\varphi_0 y_M + \cdots + \varphi_m y_{M-m}) + q \\ &\leqslant y_M + \varphi y_M + q = y_{M+1}。\end{aligned}$$

根据归纳法与引理1.1后半，这表示对一切$n \geqslant 0$都成立

$$e_n \leqslant y_n \leqslant [\delta + (q/\varphi)]e^{n\varphi} - (q/\varphi)。$$

1.2 插值公式及其余项

在离散化微分方程的过程常常要用到插值技巧，因此下面先从一般的插值公式着手再导出有关等步长的结果。

假定在(x, y)平面给定$n+1$个数据点$(x_i, y_i)(i = 0, \cdots, n)$，其中$x_i$是互异的。现要找出一个不高于$n$次的多项式$p_n(x)$使

(1.25) $p_n(x_i) = y_i, (i = 0, 1, \cdots, n。)$

这$p_n(x)$就称为通过这些数据点的**插值多项式**。

如果y_i是某一函数$f(x)$在$x = x_i$的值：$y_i = f(x_i)$，则多项式