★ 工程数学丛书

# 概率论与数理统计

# Probability and Mathematical Statistics

● 华中理工大学数学系

CHEP 高等教育出版社

Springer 施普林格出版社

工程数学丛书

# 概率论与数理统计

华中理工大学数学系

刘次华　万建平



CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

（京）112 号

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 华中理工大学数学系 编著．— 北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，1999.8

（工程数学丛书）

ISBN 7-04-007598-9

Ⅰ．概… Ⅱ．华… Ⅲ．① 概率论-高等学校-教材 ② 数理统计-高等学校-教材 Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17642 号

书　　名　概率论与数理统计

作　　者　华中理工大学数学系

---

出版发行　高等教育出版社　施普林格出版社

社　　址　北京市东城区沙滩后街 55 号　邮政编码　100009

电　　话　010—64054588　传　　真　010—64014048

网　　址　http://www.hep.edu.cn

经　　销　新华书店北京发行所

印　　刷　北京民族印刷厂

开　　本　880×1270　1/32　版　　次　1999 年 8 月第 1 版

印　　张　9.75　印　　次　1999 年 8 月第 1 次印刷

字　　数　270 000　定　　价　15.00 元

---

# 序

在高等学校理工科专业的数学教育体系中,“工程数学”一直是属于具有重要地位的课程系列. 当前,革新之风正吹遍高等教育界;课程重组、内容改造与学时调整的呼声日益高涨. 在此形势下,工程数学课程经受了严峻的考验,它作为学习现代科学技术所不可缺少的重要基础课,其地位丝毫没有动摇.

然而,这绝不意味着现存的“工程数学”课程体系已经完美无缺;更不意味着数学教育界除了墨守成规之外别无所为.恰好相反,面对现代科学技术飞速发展的形势,面对教育界对数学训练质量的愈来愈高的期待,数学工作者革新“工程数学”课程的任务更为紧迫!正是意识到时代的需要与自己的职责,我们全力推出这套“工程数学”教材呈献给读者.

华中理工大学数学系几十年来一直在组织力量探索“工程数学”课程的新的内容体系与教学方法,先后编写了百余万字的教材与讲义.在多年使用过程中不断提炼,逐步趋于完善. 应该说,本套教材正是这一长期探索过程的产物,它凝结了华中理工大学数学系几代教师的心血.当然,具体执笔的教师对教材的最终成型作出了决定性的贡献.

本套教材先分《线性代数》、《概率论与数理统计》、《计算方法》和《复变函数与积分变换》四册出版. 编者在取材上充分考虑到新世纪对科技人员数学知识的要求;在内容处理上力求联系理工科专业的实际需要,注重培养学生的基本运算能力、分析问题与解决问题的能力;在表述上力求清晰易读,便于教学与自学.本套教材配备了较丰富的例题与习题,它们大多源于教师在自身教学中的积累,既具有明显的启发性,又具有典型的应用意义.书末所附的习题答案与提示供教师与学生在教学中参考. 本套教材可供高等学校理工科各专业(非数学)使用.

本套教材的编写自始至终得到华中理工大学教务处及数学系的支持,也得到华中理工大学数学系全体教师的协助与鼓励.高等教育出版

社 CHEP-Springer 编辑室的宝贵支持,使本套教材得以顺利出版. 对此,我们一并表示衷心的感谢.

刘次华

1999 年 4 月于武汉

# 前　　言

概率论与数理统计是高等学校理工科的必修课程，是学习现代科学技术的重要理论基础. 本书是以教育部最新颁布的高等学校工科数学课程教学基本要求为依据，在教学实践的基础上编写的，可作为高等学校理工科概率论与数理统计课程的教材，也可供工程技术人员参考.

全书共分二部分：概率论部分（第一章至第五章，由万健平编写），作为随机数学的基础知识，为读者提供了必要的理论基础. 数理统计部分（第六章至第九章，由刘次华编写）着重介绍了参数估计与假设检验的基本理论和方法，其中方差分析与回归分析（第九章）供有关专业选用.

本书在选材与讲叙上尽量做到联系理工科专业的实际，注重培养学生的基本运算能力，分析问题以及解决问题的能力. 书中的习题是在多次教学实践中不断积累、更新而成，既有启发性，又有广泛的应用性. 书末附有各章的习题答案与提示，以供读者参考.

本书在编写过程中得到胡适耕、周晓阳、叶鹰等同志的关心与帮助，并得到了华中理工大学教务处的大力支持. 在此一并表示衷心的谢意.

限于编者水平，书中不妥之处在所难免，希望广大读者批评指正.

编者

1999 年 4 月于武汉

# 目　　录

# 第一章　随机事件和概率

## §1.1　随机事件和样本空间

概率论是研究随机现象统计规律性的科学.在自然界和人类社会中存在两类不同现象,一类是确定性现象,即一旦某条件实现就必然发生的现象.例如,“在大气压等于 1 Pa 时,水加热到 100℃,必然会沸腾”;“直角三角形中,斜边边长的平方是另两直角边边长平方之和”等等.另一类现象是非确定性现象,即在一定条件实现后,可能产生也可能不产生的现象.人们称之为随机现象.例如,掷一枚硬币,是出现正面还是反面,其结果事先是不可确定的.从事某项科学研究工作,其结果可能成功,也可能失败.在数据测量方面也存在随机现象,如用同一台天平在相同条件下测量某一物体的重量,在一定精度要求下,每次称重的结果都略有差异.在射击方面,炮手利用同一门火炮向同一目标射击,无论怎样控制射击条件不变,各次弹着点总不尽相同.在经济学方面,未来市场的股票价格也不能确定.保险公司承接某项保险业务,其结果也难以确定.在生物学方面,某生物群体的增长、扩散、迁移也具不确定性.在医学方面,同样一种药,对患同一疾病的不同患者,疗效也是不一样的.可见随机现象俯拾皆是,它充满于我们的现实生活,经济活动,科学研究和工程技术活动之中.

概率论的任务是寻求随机现象发生的可能性,并对这种可能性的大小给出度量方式及其算法.

### §1.1.1　随机试验

尽管随机现象在一次观察中其结果不可把握,但在作出大量重复观察或试验时,又会呈现出一定的统计规律性.正是由于这种统计规律

性，才诱发了人们叩开概率论这扇学科大门的激情和冲动.

历史上有许多著名学者为了揭示随机现象的统计规律性作出了大量的试验. 例如，蒲丰等人曾将一枚硬币反复抛掷，观察出现正、反面的次数. 其试验数据如表 1.1：

表 1.1

| 人 名 | 投掷次数 $n$ | 正面出现次数 $n_{正}$ | 频率 $\frac{n_{正}}{n}$ |
|---|---|---|---|
| 蒲 丰 | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| 费希尔 | 10000 | 4979 | 0.4979 |
| 皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |

由上表提供的数据可知，当投掷总次数 $n$ 越来越大时，频率 $\frac{n_{正}}{n}$ 呈现向 $\frac{1}{2}$ 集中的趋势.

对投掷硬币试验的抽象化，可得到随机试验的概念. 概率论中讨论具有如下特点的试验：

(1) 可在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验可出现不同的结果，最终出现哪种结果，试验之前不能确定；

(3) 事先知道试验可能出现的全部结果. 具备上述三个特点的试验称为**随机试验**，用 $E$ 表示. 下面给出随机试验的例子：

$E_1$：掷一颗均匀对称的骰子，观察出现的点数；

$E_2$：记录一段时间内，某城市 110 报警次数；

$E_3$：从含有三件次品 $a_1,a_2,a_3$ 和三件正品 $b_1,b_2,b_3$ 的六件产品中，任取二件，观察出现正品、次品的情况；

$E_4$：从一批电脑中，任取一台观察无故障运行的时间；

$E_5$：设想平面上有一簇间距为 $a$ 的平行线，现反复用一枚长度为 $l$ ($l<a$)的针投掷下去，投掷 $n$ 次后，观察针与平行线相交的数目；

$E_6$：向坐标平面区域 $D: x^2+y^2\leqslant 100$ 内随机投掷一点(假设点必落在 $D$ 上)，观察落点 $M$ 的坐标.

由上述例子可知，随机试验是产生随机现象的过程，随机试验和随机现象是并存的. 通过随机试验，人们可揭示自然界的奥密.

### §1.1.2 随机事件

随机试验的每一个可能的结果称为一个**随机事件**，简称**事件**，一般用 $A$、$B$、$C$ 等表示. 例如，$E_1$ 的可能结果为{出现 1 点}，{出现 2 点}，…，{出现 6 点}，这些都是随机事件. 再如对 $E_2$，{出现 1 次报警}，{出现 2 次报警}，…，{出现多于 10 次报警}，…等也是随机事件. 事件是概率论中最基本的概念，能将所关心的事件正确地表示出来是学习概率论的最基本的要求.

事件又分为基本事件和复合事件. **基本事件**是指不能再分解的事件. 在观察某射手的射击结果时，{中靶}与{脱靶}；观察一定时间内某高速公路在某区段内恶性事故数时，{出现 1 次事故}，{出现 2 次事故}，…，{出现 $n$ 次事故} 等都是基本事件. **复合事件**是指由若干基本事件组成的事件. 例如 $E_1$ 中，{出现奇数点}，{出现偶数点}；$E_2$ 中，{出现 10 次以上报警}等均是复合事件. 但应注意，把事件区分为基本事件与复合事件是相对具体试验的考察目的而言的，不可绝对化. 在两位赌徒掷一颗骰子，以出现奇数点还是出现偶数点决定输赢的场合下，{出现奇数点}及{出现偶数点}都是基本事件.

随机事件中有两个极端情况值得注意，一个是每次试验都必然发生的事件，称为**必然事件**，记为 $\Omega$. 再一个是每次试验中都不发生的事件，称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$.

### §1.1.3 样本空间

为了用数学方法描述随机现象，需要引入样本空间的概念.

一个随机试验 $E$ 产生的所有基本事件构成的集合称为**样本空间**，记为 $\Omega$. 称其中的元素(基本事件)为一个**样本点**，记为 $\omega$. $\Omega=\{\omega\}$.

**例 1.1** 给出随机试验 $E_1-E_6$ 的样本空间.

**解** $E_1$ 有 6 个基本事件，即出现 1 点，2 点，3 点，4 点，5 点，6 点. 故

$$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\};$$

$E_2$ 的基本事件为出现 0 次报警，出现 1 次报警，出现 2 次报警，…，从而

$$\Omega_2 = \{0,1,2,\cdots\};$$

$E_3$ 的样本空间为

$$\Omega_3 = \{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,a_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_3,b_3),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\};$$

$E_4$ 的样本空间为

$$\Omega_4 = \{x: x \geqslant 0, x \text{ 为无故障运行的时间，单位：小时}\};$$

$E_5$ 的样本空间为

$$\Omega_5 = \{0,1,2,\cdots,n\};$$

$E_6$ 的样本空间为

$$\Omega_6 = \{(x,y): x^2 + y^2 \leqslant 100, \text{其中} (x,y) \text{ 为点 } M \text{ 的坐标}\}.$$

由于任何一个事件或是基本事件，或是由基本事件组成的复合事件. 因此，试验 $E$ 的任何一个事件 $A$ 都是样本空间中的一个子集. 从而由样本空间的子集可描述随机试验中所对应的一切随机事件. 故在今后的研究中，我们对建立随机试验的样本空间格外地感兴趣.

# §1.2　事件的关系和运算

由于一个随机试验可产生许多事件，这些事件中有的简单，有的复杂. 概率论的重要任务之一就是要研究随机事件的规律性，特别是需要通过对简单事件的研究去把握复杂事件的规律性，这样就导致了对事件间的关系及运算的研究.

## §1.2.1　事件的关系与运算

1. 事件的包含与相等

为了引入事件之间的一些关系，我们先从下例入手：

**例 1.2** 在某条公路上随机抽查 8 辆汽车，考察其中违章车辆数. 其样本空间 $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$，共有 9 个样本点. 设 $A$ 表示事件{违章车不超过 3 辆}，即 $A=\{0,1,2,3\}$；$B$ 表示事件{有 2 辆或 3 辆违章}，即 $B=\{2,3\}$；$C$ 表示事件{有 2 至 5 辆违章}，即 $C=\{2,3,4,5\}$；$D$ 表示事件{有 4 至 8 辆违章}，$D=\{4,5,6,7,8\}$；$E$ 表示事件{违章车辆数不少于 2 辆且不多于 5 辆}，$E=\{2,3,4,5\}$；$F$ 表示事件{违章车辆数多于 4 辆}，$F=\{5,6,7,8\}$.

设 $A,B$ 为两事件，若事件 $A$ 发生必导致事件 $B$ 发生，即 $A$ 中的每个样本点必在 $B$ 中，则称事件 $A$ 包含于事件 $B$，或称事件 $B$ **包含**事件 $A$. 记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例 1.2 中事件 $A$ 包含事件 $B$，即 $B\subset A$. 若事件 $A$ 包含事件 $B$，同时事件 $B$ 也包含事件 $A$，则称 $A$ 和 $B$ **相等**（或称**等价**），记为 $A=B$. 即当 $A=B$ 时，$A$ 中的样本点都在 $B$ 中，$B$ 中的样本点也都在 $A$ 中.

例 1.2 中事件 $C$ 和 $E$ 相等，即 $C=E$.

2. 事件的和（并）与积（交）

设 $A,B$ 为两事件，“事件 $A$ 或事件 $B$ 至少有一个发生”是一个事件，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**和**（**并**）事件，记为 $A\cup B$.

例 1.2 中 $A=\{0,1,2,3\}$，$C=\{2,3,4,5\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5\}$. 由此可知，事件 $A\cup B$ 的样本点由 $A$ 和 $B$ 的样本点组成，但公共的样本点只能取一次.

一般地，“$n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”是一个事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和（并）事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

当涉及到无穷多个事件时，可把事件和推广到**可列无穷**（集合可列无穷是指集合中的元素可与自然数集建立一一对应的关系）多个事件的场合，即引进事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 诸事件中至少有一个发生.

设 $A,B$ 为两事件，“事件 $A$ 和 $B$ 同时发生”是一个事件，称为事件 $A$ 和事件 $B$ 的**积**（**交**）事件，记为 $A\cap B$，简记为 $AB$. 积事件 $AB$ 的样本点由既属于 $A$ 又属于 $B$ 的公共样本点组成. 如例 1.2 中 $A$ 和 $C$ 的积

事件 $AC=\{2,3\}$.

与和事件情形相同，可把积事件的概念推广到 $n$ 个事件及可列无穷多个事件的场合. 即“$n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”是一事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积(交)事件，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 对可列无穷的场合，用 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 诸事件同时发生.

读者应注意，将一个事件分解为若干事件之和的方法在概率论中经常采用. 例如，进行一项科学试验，直到试验成功为止. 以 $A$ 表示试验成功，$A_i$ 表示试验进行到第 $i$ 次才成功，显然 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. 我们若把每一个 $A_i$ 分析清楚了，就可把 $A$ 分析清楚. 另在某些情况下，将所关心的事件 $A$ 表示成若干事件的积，即 $A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，也是概率论解决某些问题所采用的方法.

3. 互不相容事件和对立事件

设 $A$、$B$ 为两事件，若 $A$ 和 $B$ 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 $A$ 和 $B$ 是**互不相容**事件或**互斥**事件.

例 1.2 中 $A$ 和 $F$，$A$ 和 $D$ 都是互不相容事件. 两事件互不相容时，它们就没有公共的样本点. 若 $A$ 和 $B$ 互不相容，则它们的和记为 $A+B$. 若 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件都互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing\quad(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，则称这 $n$ 个事件互不相容. $n$ 个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和通常记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

若 $A$，$B$ 互不相容，且它们的和为必然事件，即 $AB=\varnothing$ 及 $A\cup B=\Omega$，则称 $A$ 和 $B$ 为**对立事件**或**互为逆事件**. 事件 $A$ 的逆事件记为 $\overline{A}$. 显然 $\overline{\overline{A}}=A$，$A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$. 例 1.2 中事件 $A$ 和事件 $D$ 互为逆事件.

读者应注意，若 $A$，$B$ 互为逆事件则必互斥，但反之不然. 另当事件 $A$ 较为复杂而 $\overline{A}$ 较为简单时，我们往往通过研究 $\overline{A}$ 来研究 $A$. 事件互不相容概念的引入在某些场合下可大大简化事件和的运算，故事件互不相容的概念在概率论的理论研究和实际应用中经常出现，读者应对这一概念认真体会，准确把握.

4. 两事件的差

设 $A,B$ 为两事件,"事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生"是一个事件,称为事件 $A$ 和 $B$ 的**差事件**,记为 $A-B$.

例 1.2 中 $A$ 和 $C$ 的差事件为 $A-C=\{0,1\}$. 差事件 $A-B$ 由属于 $A$ 而不属于 $B$ 的样本点组成. 有了上述概念之后,为了研究的需要,我们可将一个事件分解为若干个互不相容事件之和. 例如,对于任意两事件 $A$、$B$,下述分解总是成立的:$A=AB\cup A\overline{B}$.

为了帮助大家理解上述概念,现把集合论的有关结论与事件的关系和运算的对应情况列举如下:

表 1.2

| 符号 | 集 合 论 | 概 率 论 |
|---|---|---|
| $\Omega$ | 全集 | 样本空间;必然事件 |
| $\varnothing$ | 空集 | 不可能事件 |
| $\omega\in\Omega$ | $\Omega$ 中的点(或称元素) | 样本点 |
| $\{\omega\}$ | 单点集 | 基本事件 |
| $A\subset\Omega$ | $\Omega$ 的子集 $A$ | 事件 $A$ |
| $A\subset B$ | 集合 $A$ 包含在集合 $B$ 中 | 事件 $A$ 包含于事件 $B$ |
| $A=B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 相等(或等价) | 事件 $A$ 与 $B$ 相等(或等价) |
| $A\cup B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 之并 | 事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生(事件 $A$ 与 $B$ 之和(并)) |
| $A\cap B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 之交 | 事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生(事件 $A$ 与 $B$ 之积(交)) |
| $\overline{A}$ | 集合 $A$ 之余集 | 事件 $A$ 的逆事件 |
| $A-B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 之差 | 事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生(事件 $A$ 与 $B$ 之差) |
| $A\cap B=\varnothing$ | 集合 $A$ 与 $B$ 没有公共元素 | 事件 $A$ 与 $B$ 互不相容(互斥) |

若用平面上一矩形区域表示样本空间 $\Omega$,矩形区域内的点表示样本点,则事件间的关系和运算可以用平面上的几何图形(图 1.1)直观地表示出来. 在图 1.1 中,两个小圆分别表示事件 $A$ 和 $B$,阴影部分表示事件 $A$ 和 $B$ 的各种关系和运算结果.

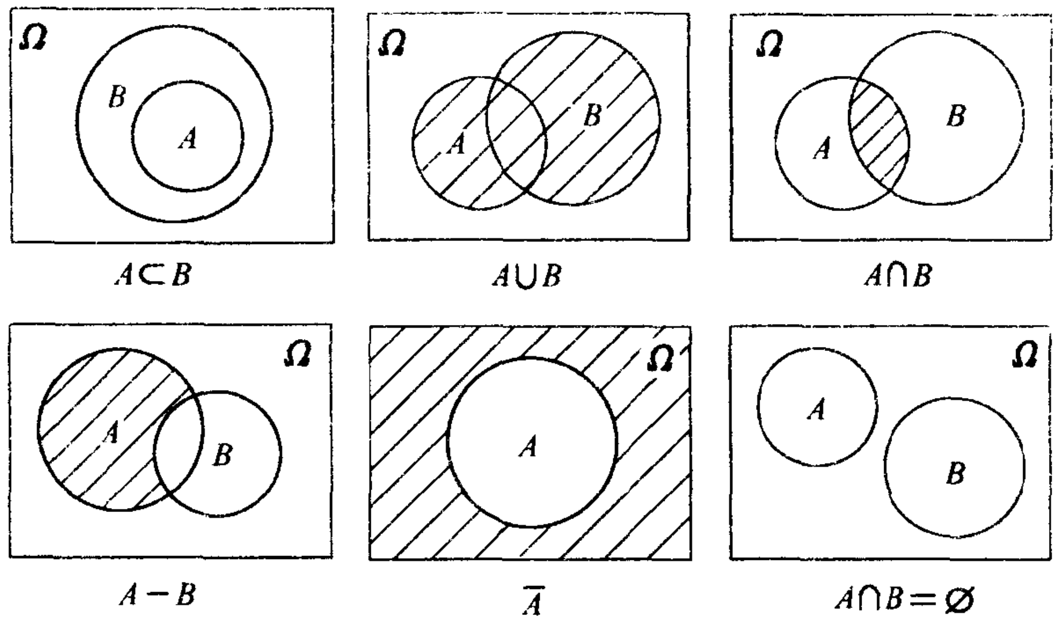


图 1.1

### §1.2.2　事件的运算性质

下面我们仅列出事件运算所满足的法则：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, (AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$，

$$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C);$$

(4) 德摩根 (De Morgan) 对偶律：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B};$$

对可列无穷多个事件的情形有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

对偶律是很有用的性质，我们经常要使用到它. 另易证下列等式的正确性：

$$A\cup A=A,\quad A\cup\Omega=\Omega,\quad A\cup\varnothing=A,$$

$$AA=A,\quad A\Omega=A,\quad A\varnothing=\varnothing,$$

$$A-B=A-AB=A\overline{B},\quad A\cup B=A+B\overline{A}.$$