现代数学基础丛书

# 随机点过程及其应用

●邓永录　梁之舜 著

科 学 出 版 社

中国科学院科学出版基金资助出版

现代数学基础丛书



# 随机点过程及其应用

邓永录　梁之舜　著



科 学 出 版 社

1998

## 内 容 简 介

本书共分 11 章，前 9 章较全面和详细地介绍一些常用的点过程模型及其应用. 通过这些内容的学习使读者对点过程的模型、物理背景、方法、理论和可能的应用有一个基本的了解. 后两章则是在这基础上进一步介绍现代点过程理论的若干主要方面和新的研究方向，使读者能很快进入点过程理论研究的前沿.

本书可供科研工作者、大学数学系的高年级学生和研究生阅读.

现代数学基础丛书

随机点过程及其应用

邓永录 梁之舜 著

责任编辑 毕 颖

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

北京双青印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992 年 12 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1998 年 10 月第二次印刷 印张：19 1/2

印数：1 601—3 600 字数：513 000

ISBN 7-03-003026-5/O · 559

定价：39.00 元

# 序　言

尽管随机点过程理论的起源可以追溯到本世纪初甚至更早的年代，但作为一门系统的理论则是近二三十年间才逐步形成的．现在，它的理论已日趋完善和深化，成为随机过程理论的一个重要的独立分支．在应用方面，它也日益广泛地渗透到许多领域（如通讯理论、交通理论、排队论、可靠性理论、管理科学、海洋学、物理学、电子工程学、地质学、地震学、天文学、水文学、气象学、生态学、遗传学、森林学、神经生理学、核医疗学和考古学等等）．本书作者从70 年代中期开始从事点过程理论和应用的研究及教学工作，10 多年来，培养了多届研究生，在科研方面也取得一些有意义的结果．本书就是在这些工作和在国内外长期、大量搜集资料的基础上经过约 5 年的酝酿准备和 5 年的反复笔耕而完成的．书中部分材料曾多次在研究生、进修教师和本科生的有关课程教学中使用过．

迄今为止，国内外虽然已出版了好几本点过程理论的专著，但是，绝大多数都有自己的侧重点．有的偏于抽象的理论阐述，有的主要从统计的角度进行讨论，有的着重于结合某些方面的应用或囿于某些特殊的点过程类，还有的只限于概括的介绍．近年来，不少应用工作者（包括地震、水文、煤炭、管理等领域）主动和我们联系，要求帮助和介绍适于他们学习和参考用的有关著作．但是，我们找不到一本比较理想和合适的书，类似的问题在教学中也同样存在．因此，我们深感有必要编写一本既有理论又有应用，既可作教学用书又能为有兴趣于点过程理论和应用的科研、实际工作者提供学习和参考材料，既是入门读物又可为意欲作深入和专门研究的读者提供较新和较全面的材料和线索的点过程专著．基于这一想法，我们力求使本书具有以下特点．第一，它基本上是自封闭的，书后的五个附录提供了一些与学习前面各章内容有密切

关系但在一般的概率统计教程中不易找到的材料．第二，内容安排和叙述本着由浅入深和深入浅出的原则，兼顾描述的直观性和理论的严格性．第三，从应用的需要出发，除了配有许多有启发性的各种各样的应用例子外，还特别注意讨论点过程观测资料的统计分析问题，对大多数点过程模型都提供一些简单实用的统计推断方法．此外，对某些模型的随机模拟问题也有讨论．第四，在不超出本书设想水平的前提下，尽可能反映新的研究成果和材料(其中也有我们自己的研究成果，特别是第十章有关点过程比较的材料大部分来自我们已发表的文章)，或者介绍进一步的研究方向和参考文献．书中带有星号“*”的章节或段落在第一次阅读时可略过．

本书的编写工作相继得到中国科学院基金和国家自然科学基金的资助，最后又得到中国科学院出版基金资助出版，我们对此表示衷心的感谢．由于作者水平有限，缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正．

作者谨识

1991 年夏于广州中山大学

# 目　录

# 第一章 引 论

## §1-1 随机点过程的例子和背景

在客观世界中，存在着许多这样的随机现象，其中我们关心的随机事件具有高度局部化的特点，亦即事件的发生可以认为是只限于在时间或空间中的一个很小的范围内，因而在数学上可用一个理想化的点来表示. 于是，概略地说，一个按一定的统计规律在某空间$\mathscr{X}$中随机地分布的点集就形成一个随机点过程(简称点过程). 我们将要看到，随机点过程实质上是一类特殊的随机过程.

在最简单的情形中，点发生空间$\mathscr{X}$通常是一维的，人们往往把空间$\mathscr{X}$取为时间轴或它的一个子集(特别地，一个区间). 有些作者把时间轴上的点过程称做随机事件序列或事件流.

下面考察随机点过程的一些实际例子.

**例1-1-1** 一天中某电话总机接到的呼唤形成一随机点过程. 这时，$\mathscr{X}$是时间区间[0,24](以小时为单位). 每一次呼唤发生的时刻就是$\mathscr{X}$中的一个点. 这点过程的一个现实(又称样本函数或轨线)是时刻序列 $\{t_1,t_2,\cdots,t_N\}$，其中 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_N\leqslant 24$，$t_i$ 是第 $i$ 次呼唤的发生时刻，$N$是一天内发生的呼唤次数.

类似地，在某一时间区间内某台机器因发生故障而停机的事件，或到达某商店柜台要求服务的顾客也形成随机点过程. 这样一类例子在运筹学中经常会遇到.

**例1-1-2** 在物理学中研究真空管的电子发射. 设在时刻 $t_0$ 开始对真空管通电加热，并对在随后的 $T$ 秒区间内从真空管的热阴极向阳极发射的电子进行观测. 如果把电子发射的时刻看作是一个点，我们就得到一个点过程. 在这例子中空间$\mathscr{X}$是区间

$[t_0, t_0+T]$，点过程的一个现实就是 $[t_0, t_0+T]$ 中的一个时间序列 $\{t_1, t_2, \cdots, t_N\}$，其中 $N$ 是在观测期间内发射的电子数目。

**例 1-1-3** 在公路交通问题的研究中，常常需要考察在某一时间区间内车辆经过公路某一指定地点的时间分布．另一方面，有时也有必要研究在某一固定时刻车辆在某段公路的分布情况．如果在前一种情形中，我们把车辆经过指定地点的时刻看作是点，那么在后面的情形则把在该固定时刻每一辆在这段公路上的车辆的位置看作是点．于是，两种情形都引导到一维的随机点过程，只不过它们的点发生空间 $\mathscr{X}$ 有不同的物理含义．对前者它表示一时间区间，而对后者则是一线段．

放射性物质发射出伽玛光子或湮没光子而逐步衰减，它的发射速率依赖于现存的放射性物质的数量．在放射性物质的研究中，往往是从某时刻 $t_0$ 开始的 $T$ 秒区间内对发射进行观测．若把光子发射时刻看作是点，我们又得到类似的随机点过程．

**例 1-1-4** 棉纱沿长度分布的疵点形成一随机点过程．这时，$\mathscr{X}$ 是实数轴的一个区间 $[0, L]$，这里 $L$ 表示棉纱的长度．点过程的一个现实则是一串表示疵点坐标位置的数 $\{l_1, l_2, \cdots, l_N\}$，这里 $0 \leqslant l_1 \leqslant l_2 \leqslant \cdots \leqslant l_N \leqslant L$，$N$ 是疵点数目．

**例 1-1-5** 图 1-1-1 所示的是将微电极插入神经纤维中测得的神经纤维电能图的一部分．图中的尖峰表示以“尖峰放电”的形

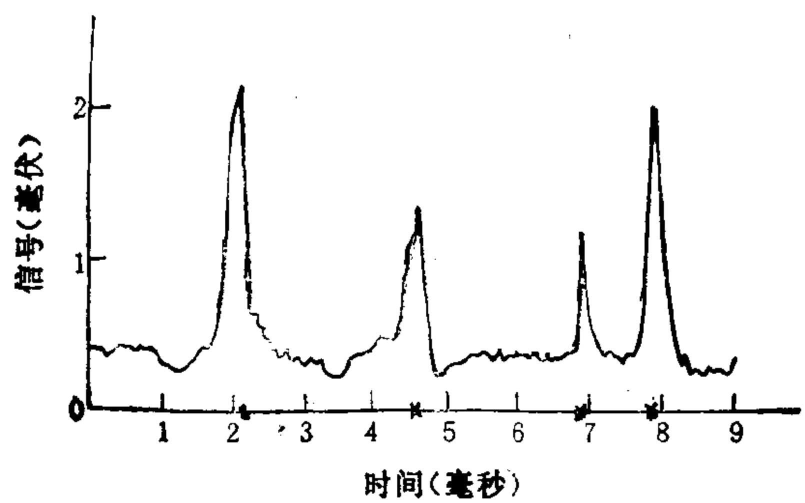


图 1-1-1　神经纤维中的电信号（时间轴上的“×”表示尖峰放电的时间，即点过程的点）．

式随机地发生的电放射．如果我们关注的是尖峰出现的时间而不是尖峰信号的大小，于是就得到一个由较复杂的随机过程导出的点过程．这点过程的点就是“尖峰放电”的时间．

在水文学中，若把流量过程线中洪峰出现的时间看作是“点”，则也导出一个同类型的点过程．

**例 1-1-6** 天文学中对宇宙某一区域中星体的重力中心位置的观测亦引导到一个点过程．这时，点发生空间$\mathscr{X}$是三维欧氏空间的一个区域．点过程的一个现实是观测到的星体位置集合$\{\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N\}$，其中 $\boldsymbol{r}_i$ 是三维向量，$N$是观测到的星体数．

**例 1-1-7** 在植物生态学和森林学中常常需要对某区域内的某特殊品种或有某种疾病的植物树株进行估计．一种常用的方法是抽样．例如，可从该区域中取一截面来研究．于是，在这截面中属于该品种或有病的树株位置就形成一点过程．根据不同的具体情况，点发生空间$\mathscr{X}$可以是一维、二维或更高维空间的一个区域．

**例 1-1-8** 在研究某个国家或地区的某一行业(如交通、煤矿或军火工业等)的意外事故发生情况时，如果把按一定标准(如死伤人数或经济损失)达到某种程度的事故发生的时间看作是点，于是事故的发生就形成一点过程．显然，这时$\mathscr{X}$是某一时间区间．

**例 1-1-9** 对某地区从时间 $t_0$ 开始的长为$T$的时间区间内发生(在一定的震级范围)的地震事件进行观测．每次地震的震中(以它的经、纬度表示)和发震时间可以根据各站台的观测资料确定．因为震中的广度最多是几公里，而震动的持续时间一般是以秒计算的．这相对于我们研究的地区和时间范围来说都是很小的．所以能将其理想化为一点．于是，每次地震可用一个三维向量 $(t, \boldsymbol{r})$ 来刻划，其中 $t$ 是发震时间，$\boldsymbol{r}$ 是震中位置的二维向量．描述在观测期间内发生的一系列地震事件的向量集合 $\{(t_1, \boldsymbol{r}_1), \cdots, (t_N, \boldsymbol{r}_N)\}$ 形成一(时空)点过程，这里$N$是在观测期间内记录到的地震事件数．

**例 1-1-10** 在生态学中研究某种昆虫在田野的分布．虫蛾

在(一定范围内的)田野上产下一堆堆卵块．这些卵块的分布服从某种规律．每堆卵块差不多同时孵出若干幼虫．成活的幼虫向四周爬行觅食．幼虫是在它们来自的卵块附近活动，因而是围绕着卵块位置随机地散布的．于是，虫蛾的后代——幼虫的分布可以看作是一个二维空间中的点过程．这点过程有如下特点：它是一个两级过程，即有一个主事件序列(又称主过程)，以主事件序列的每一事件为中心(称做簇生中心)又产生若干个点（称做簇生点)，它们在中心附近按一定分布规律随机地散布而构成一"点簇"（又称从属过程)． 我们把这类点过程称做簇生点过程或简称簇生过程（cluster process)．

在例 1-1-9 中，如果把每一次较大的地震看作是主事件，由它引发的一系列余震或在附近的不同地点引起的群震可看作是围绕主事件(簇生中心)的簇生点．这样一来，我们就得到一个描述地震发生的簇生点过程模型．

簇生点过程模型还可以用来研究电子计算机的故障发生、宇宙中星体的分布、事故的蔓延以及传染理论等问题．

**例 1-1-11** 在遗传学中要研究如下分支问题： 设在某一空间区域中有一些质点按某种相同的统计规律作随机移动．每一质点在(随机)时刻 $\zeta$ 死亡并以概率分布 $\{p_n\}$ 产生 $n=0,1,2,\cdots$ 个后代，各后代重复依照相同规律独立地随机移动和繁殖．如此一代一代地延续下去． 若以 $N(t, A)$ 表示在时刻 $t$ 处于空间区域某集合 $A$ 中的质点数，由此就得到一个(时空)点过程．

上列例子表明，随机点过程的模型和理论来自人类各种各样的生产、生活与科学技术的实践活动．它的应用领域十分广泛．仅仅上面列举的例子就涉及生态学、神经生理学、物理学、电子学、天文学、水文学、林学、地球物理学和管理学等学科．另一方面，从后面关于点过程理论发展历史的简要介绍中也可以清楚地看到这一点．

除了自然界的随机现象本身能直接引起随机点过程外，在概率统计理论及其应用中也常常会引导到随机点过程．例如在统计

问题中经常要对一随机变量进行观测．设随机变量$X$的$n$次观测值是$x_1,x_2,\cdots,x_n$．它们给出$X$的一个经验分布.显然,我们也可把这$n$个观测值看作是($X$取值的)空间的一个点分布,这样就把经验分布和点过程的概念联系起来了．在对随机过程轨道性质进行研究时往往会派生出随机点过程．著名的"跨越水平"问题就是一个这样的例子．这类问题是研究一随机过程的轨道向上或向下跨过某水平$u$（当$u=0$时就是跨越零点）或某曲线$c$（闭合曲线情形就是向内或向外跨越）的时间分布，它在实际中有重要应用．例如在船舶适航性研究中，要考察船舶在海浪中摇摆时横倾角$\theta(t)$在某时间区间内取零值的平均次数或超过$\pm 25°$的平均次数(这时一般假定$\theta(t)$是一平稳正态过程);船舶桅杆越出某个由预先给定的横倾角和纵倾角确定的椭圆锥之外逗留的平均时间以及定点海面浪高超过某给定值的平均次数等等．此外，随机过程的"随机抽样"或"随机删减"以及纯跳跃过程在某时间区间内跃度超过某给定值或在某范围内的次数等问题的研究也导出各种类型的点过程．

另一方面,许多随机过程,例如,在排队论、储存论和可靠性理论中要研究的随机过程$\xi(t)$的特征或平稳分布常常可通过对这过程的一个特殊类型的嵌入随机过程$\xi(t_n)$(例如，嵌入马尔可夫链或嵌入更新过程)的研究而得到,这时嵌入点序列$t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots$形成一随机点过程．早期的研究一般对它的点间间距加上某种独立性假设，这对应于嵌入马尔可夫链或嵌入更新过程的情形．近年来,人们又进一步除去这种独立性假设而研究所谓"具有嵌入标值点过程的随机过程"，这时嵌入的过程是一平稳标值点过程(详见 P. Franken, D. König, U. Arndt, V. Schmidt (1982))．事实上，在点过程和许多其它类型的随机过程之间是没有严格界线的．特别地，任意样本函数是阶梯函数的连续时间随机过程都连系一个点过程,这点过程的点就是原过程发生状态转移的时刻．

## §1-2 历史和发展现状概述

现代随机点过程理论的来源是多方面的，其中历史最长的是与更新理论有关的问题。我们知道，机器或设备中的零件在使用过程中会损坏。如果在损坏发生时马上用同样的零件替换，并把损坏发生的时刻看作是一个点，于是，更新理论本质上就是对以相邻两个这样的点为端点的一系列区间的概率特性(如分布特征，极限性态等)进行研究的一门理论。可以这样说，更新理论是在本世纪 30 年代形成并发展起来的。到 50 年代它已趋成熟。然而，这一理论的起源应该追溯到更早时期有关人口统计、寿命表和保险理论的研究，其中又以寿命表和点过程的关系最为密切。现代点过程理论使用的一些术语和研究的问题(如存活函数，临危函数)就是直接来自寿命表理论。寿命表实质上是许多独立点过程的迭置，其中每一点过程只包含一个对应于个体死亡时刻的点。

J. Graunt (1662) 编制了世界上第一个寿命表。这一开创性工作在统计学中所占的地位相当于 Pascal 和 Fermat 之间在 1654 年(发表于 1679 年)关于赌博问题的著名通信在概率论中的地位。从那时候起直到 19 世纪中叶，寿命表问题的研究在概率统计的发展中起着重要的作用。18 世纪著名的数学家如牛顿、拉普拉斯和欧拉等都在人口统计及邻近的问题上做过工作。

进入 20 世纪以后，至少有三个应用领域与点过程理论有密切关系。它们是：(1) 排队论，特别是电话交换台理论。Erlang (1909)有关这方面的第一篇文章包含基于对在一固定时间区间内电话呼唤次数的考虑推导出泊松分布。随后的工作则进一步研究有较一般的输入和服务分布的排队系统。(2) 群体增长理论。这一理论最低限度可以作为古典寿命表理论和现代更新理论之间的桥梁。(3) 可靠性理论。第二次世界大战以后，电子工业及与之有关的精密仪器和制造工业的迅速发展是可靠性理论系统发展的源泉和动力。这理论的一个典型问题是串联和并联系统的寿命分

布的计算，寿命表理论所用的概念和术语在其中仍起着重要的作用。上述三个领域是紧密相联的，它们是构成点过程理论和应用的重要组成部分。

引导到点过程的另一种基本的现象和问题是"计数"——计算发生在区间或各种不同类型的区域(包括高维空间的区域)中的事件数目.它和各种各样的离散分布的研究有密切联系.尽管贝努里分布和负二项分布很早就在有关赌博问题的讨论中被提出来，但其它离散分布的讨论可以认为是进入 19 世纪以后的事情． 在计数问题的历史中，我们首先应该提到法国著名数学家泊松在 1837 年出版的著作,他在其中从二项分布出发,通过极限过程首次推导出在理论和应用上都很重要的泊松分布。但是应当指出，当时泊松并没有涉及计数问题，而且他所推出的分布一时还没有引起人们的注意。 在历史上最先讨论计数问题的似乎是 Seidel (1876) 和 Abbé (1878)。 他们分别研究了雷暴发生和血球的计数问题，这些工作是和泊松的工作相独立的。 1896 年，Von Bortkiewicz 发表了一篇文章，其中含有用泊松分布拟合普鲁士军队中被马踢死的人数分布这一著名例子．自此以后，泊松分布才开始得到重视。20 世纪初，Erlang (1909) 和 Bateman (1910) 分别在电话交换台的呼唤和 $\alpha$ 粒子的计数问题中再次导出和进一步讨论了泊松分布。

在生态学和其它领域的某些问题的研究中，人们发现对计数观测所得到的分布和泊松分布经常出现较大的偏离。 Yule 和 Greenwood (1920) 对英国军火工厂的事故发生进行了研究并通过使泊松分布的参数随机化而导出负二项分布。

Neyman 和 Scott (1938) 在点过程理论的一个重要贡献是在研究生态学、天文学和其它领域的某些问题时引入"簇生过程",并由此推出一族新的离散分布.

二次世界大战期间及战后，随机过程理论及其应用取得了巨大的进展。作为一类特殊随机过程的点过程也不例外。瑞典工程师 Palm (1943) 在排队论方面有关交通问题的文章对点过程理