[美]E.M.Stein著

奇异积分与函数的可微性

程民德　邓东皋　周民强　潘文杰译

$$\int_{R^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)\, dy$$

奇异积分与函数的可微性

[美] E.M. Stein 著

程民德　邓东皋　周民强　潘文杰　译

北京大学出版社

内 容 简 介

本书共分八章。前三章是调和分析理论的最基本的内容，它们大多数是学习多种专著与专题的入门；在后五章，内容具有进一步深入的性质，其中有些材料是第一次系统地组织起来的。每章末的"进一步结果"用富于启发性的提问方式，列出了课题的新近发展。

此书阐述由浅入深；着重训练；富于启发性。它不仅是学习近代调和分析的一本入门书，而且也是提供了解近代分析的一本优秀参考书。

本书可作为数学专业本科高年级学生的专题课教材，亦可作为数学专业研究生的基础课教材。可供从事数学科研人员学习参考。

E.M.Stein

Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions

Princeton University Press, 1970

奇异积分与函数的可微性

[美]E.M.Stein著

程民德 等译

责任编辑：邱淑清

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

850×1168毫米　32开本　12印张　296千字

1986年9月第一版　1986年9月第一次印刷

印数：00001—4,500册

统一书号：13209·113　定价：2.70元

作者为中译本写的序

I want to take this opportunity to express my deep appreciation to Professors M.T. Cheng, D. G. Deng, M. Q. Zhou and W. J. Pan for having undertaken the translation of my book. The availability of this work to a wider audience will provide an additional stimulus to the development of analysis in China. I hope that by this their efforts will be rewarded not only by a futher blossoming of our science, but also by the strengthening of the bonds that link the mathematical communities of both our countries.

E. M. Stein

September, 1984

写在本书翻译出版的前面

挑选一门基础性较强、联系面较广而又是近代发展主流方向的合适的数学选修课教材，并不是一件容易的事，进而从中要挑选适合于在我国翻译出版的好书，那就更不容易。

斯坦因教授积丰富的教学和科研的宝贵经验，总结了齐格蒙一卡代尔隆一斯坦因学派的重要贡献，把这方面最主要的工作的基础部分，精心地反映在这本著作中来。因而本书原著出版后，得到了国际上极为广泛的科研文献的普遍引用。他并在美国培养了一批优秀的青年分析学家。本书原著在国际上起的作用无疑是很突出的。

国内对该书的重视，由于十年动乱的灾害，推迟到了七十年代的后期。北京大学从1977年开始，连续采用本书内容举办讨论班，主要对象是低年级研究生以及少量的高年级本科生，收到的效果是很显著的。他们中的不少人，目前已在这有关方向的前沿进行着有意义的教学和科研工作。该书作为近代分析的基础，不仅在调和分析方向起作用，在微分方程和函数论的有关方向也起作用。厦门大学由于教学科研的需要，曾把该书全文油印成册，并作为交流讲义在北京大学、吉林大学、北京师范大学、南京大学、杭州大学等校使用，以补原版数量之不足。早在1980年，鉴于国内需要，该书曾被推荐列入翻译出版计划。无疑本书的翻译出版，是符合于国内需要的。

今年9月适值国际分析学讨论会在北京大学举行，斯坦因教授作为该会的发起人，热情地组织了学术交流工作。乘他在京之便，我们请他为译本写了一个短序。他在短序中强调了译本的作用，我们深感他的盛意，但这主要是原著的作用。我们足以自慰的，就是确实挑选了一本适合于在我国翻译出版的好书。

本书的译者有：程民德(第一章)，邓东皋（第二、五、七、八章及附录），周民强（第三章），潘文杰（第四、六章）。

程民德

1984年11月9日于北京大学

序 言

本书是我1966—1967学年在Orsay讲授的课程① 的自然结果。课程的目的是对分析中的几个有关领域，提供某些必要的背景并同时阐明它们间存在的内在联系。这些领域是：奇异积分算子的存在性与有界性；调和函数的边界性质；以及多元函数的可微性。这些课题的公共核心，可以说反映了近二十年来n维富里叶分析的主要发展，因此有可能期望它对未来有同样大的影响。这种可能性将更加显著，只要我们把这样一些学科（我们在这里并不研究它们）列出来，在其中或者是本书的重要结果，或者是与本书提供的技巧密切相关的思想，正继续发现有重要的应用。这些学科包括偏微分方程；多元复变解析函数；以及其它（交换或非交换）群上的分析。

在这方面，我们指出，《欧氏空间的富里叶分析引论》② 这本书，详细叙述了某些这种应用和许多的背景以及有关的材料。因此，把本书看成《富里叶分析》的姊妹篇是合适的。然而，两本书可以独立地阅读。事实上，除了只需要积分论和富里叶变换的初等知识作为预备之外，本书是努力做到自封的。

本书的组织简述如下。前三章主要用来讲述这样的内容，他们大多数是学习多种专著与专题的入门，这就是覆盖引理与极大函数、Marcinkiewicz内插定理、作为Hilbert变换推广的奇异积分以及用Poisson积分表示的调和函数。在后五章，内容具有进一步深入的性质，包括Littlewood-Paley理论、乘子、Sobolev空间及其变形、延拓定理、调和函数的进一步结果以及几乎处处可微的定理。在这里，部分材料是第一次系统地组织起来的，例

① 这课程的讲义已经出版，见Stein[10]。

② G.Weiss与作者的这本著作，本书后文引用时，皆记为《富里叶分析》。

如，最后两章包括了若干结果，其细节至今仍未发表。

写任何一类这样的书，作者总要平衡两个不幸往往是对立的目标。一方面，要使要求谨严的学生得到满足，那就是提供所有的背景材料以及全部给出一切证明的细节，不管它们是多么缺乏启发性；另方面是要求掌握发展主题的基本思想的主要内容。要做到后面这一点，有时最好是省略某些技术细节，并且常常放弃实现各种能够做得出来的推广的愿望。人们肯定会找出我衡量这两方面轻重的不适当的地方。我解释的原则是，或者这是根据个人的爱好（它没有什么可争论的），或者说得严肃一些，这表示了我对这个学科的看法：它已经发展到高度的复杂并且还在飞快地发展，然而它还没有达到成熟的程度，以致于可以纳入一个十分完美的体系当中。

对在写本书的过程中帮助过我的人，我表示衷心的感谢：Norman Weiss 帮助我准备了 1964—1965 在普林斯顿大学所教的课程的（未出版的）讲义，它成了包括本书某些内容的早期的蓝本；Bachvan 与 A. Somen 帮助抄写了前面提到的出版了的讲义；Elizabeth Epstein 与 Florence Armstrong 帮助打印了这本书的初稿；还有 W. Beckner, C. Fefferman 与 S. Gelbart 在数学与校对两方面都给了帮助。我还对所有其他没有列出名字的人士表示感谢。

E. M. Stein

1970年9月

符　号

基本符号

dx——$\boldsymbol{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度；还有 $m(E)$——集合 E 的测度

$L^p(\boldsymbol{R}^n)$——对应于测度 dx 的 L^p 空间

C^k——具有直到 k 阶的连续微商的函数类

$\mathscr{D}$——具有紧支集的无穷次可微函数空间

$\mathscr{S}$——无穷次可微且其微商乘上任意多项式后仍保持有界的函数类

${}^cE$——集合 E 的余集

根据其首次出现或重要重现而列出的符号表

第一章　§1

$B(x,r)$——中心在 x 半径为 r 的球

$M(f)$——极大函数

§2

$\delta(x)=\delta(x,F)$——x 到集合 F 的距离

$I(x)$，$I_*(x)$——包含距离函数的 Marcinkiewicz 积分（也可见第八章§3）

§3

$Q_1,\cdots,Q_k,\cdots$——方体；还有 $\Omega=\bigcup_k Q_k$

第二章　§1

$C_0(\boldsymbol{R}^n)$, $\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^n)$——在无穷远消失的连续函数空间及其对偶空间，即有限 Borel 测度空间

$\mu=\mu_1*\mu_2$——测度 μ_1 与 μ_2 的卷积

$\hat{f}(y)=\mathscr{F}(f)(y)$—— f 的 Fourier 变换

§3

$H(f)$——Hilbert 变换（也见第三章§1）

§4

$S^{n-1}, d\sigma$——$\boldsymbol{R}^n$ 的单位球面及其上的面积元

§5

$L^p(\boldsymbol{R}^n, \mathscr{H})$——取值在$\mathscr{H}$的函数的 L^p 空间

第三章　§1

R_j——Riesz 变换

$$c_n=\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Big/\pi^{(n+1)/2}$$

§2

$\boldsymbol{R}^{n+1}_+$——上半空间$\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^{n+1}_+:\ x\in\boldsymbol{R}^n,\ y>0\}$

$$P_y(x)=\frac{c_n y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}$$——Poisson 核

Δ——Laplace 运算（也见第七章），经常作用在 $\boldsymbol{R}^{n+1}_+$上，而在第三章§3 经常作用在$\boldsymbol{R}^n$上

§ 3

$\mathscr{H}_k$——k 阶球体调和

H_k——k 阶球面调和

第四章 § 1

g, g_1, g_x, g_k——Littlewood-Paley g 函数的各种变形

§ 2

g_λ^*——另一种变形（也见第七章 § 3）

Γ——锥$\{(x, y): x\in \boldsymbol{R}^n, |x|<y\}$（也见第七章 § 1）

S——Lusin 的面积积分（也见第七章 § 2，§ 3）

$M_\mu(f)=(M(f^\mu))^{1/\mu}$，$\mu\geqslant 1$

§ 3

T_m——具有乘子 m 的乘子变换

$\mathscr{M}_p$——L^p 乘子的代数

§ 4

$S_\rho(f)$——“部分和”算子

$S_{\mathfrak{R}}(f)$——对应于方体族的类似算子

§ 5

r_m——Rademacher 函数（也见附录D）

第五章 § 1

I_α——Riesz 位势

§ 2

$L_k^p(\boldsymbol{R}^n)$——Sobolev 空间

§ 3

$\mathscr{J}_\alpha(f)=G_\alpha^*(f)$——Bessel 位势

$\mathscr{L}_\alpha^p(\boldsymbol{R}^n)$——Bessel 位势空间

$\omega_p(t)$——L^p 连续模

$\bar{\omega}_p(t)$——二阶 L^p 连续模

§ 4

$\Lambda_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$——Lipschitz 空间

§ 5

$\Lambda_\alpha^{p,q}(\boldsymbol{R}^n)$——Besov空间

第六章 § 1

$\Delta(x)$——正则化距离

§ 2

$\mathscr{E}_k$——Whitney 开拓算子

§ 3

$L_k^p(D)$——区域D上的Sobolev 空间

$\mathfrak{E}$——区域D的开拓算子

第七章 § 1

$\Gamma_\alpha(x^0)$——锥$\{(x,y)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1},\ |x-x^0|<\alpha y\}$

Γ_a^h——截锥，$\Gamma_a^h(x^0)=\Gamma_a(x^0)\cap\{0<y<h\}$

$\mathscr{R}=\bigcup\limits_{x^0\in E}\Gamma_a^h(x^0)$（也见第八章§2）

§3

H^p 空间——满足一定L^p不等式的共轭调和函数与空间

$\in_q$——面积积分的变形

目　录

第一章　实变理论的若干基本概念

实变理论的基础是同集合与函数的概念以及应用于它们的积分与微分过程相联系着的。这些思想的主要方面早在本世纪初已经发扬光大，而它们的若干进一步的应用则是晚近才发展的。我们要考虑的是后者中使我们感兴趣的那部分理论。为此，我们特别考虑以下几个主要内容：

(a) 关于积分的微分的Lebesgue定理。在这方面有关性质的研究，最有效的是归到由此引出的"极大函数"的研究，它的基本特征反映在一个"弱型"不等式，它是所考虑情形的特征。

(b) 某些覆盖引理。一般说来，其意义在于用不相重叠①的方块或球体的并集来覆盖任意给定的一个（开）集合，至于这些方块或球体的选择则取决于所考虑的问题的需要。一个合适的例子就是Whitney引理（定理3）。有时往往只需要覆盖任集合的一部分，正象普通的简单的覆盖引理那样，它是用来证明上面提到的弱型不等式的。

(c) 任意点集的"一般"点邻近的性质。这里最简单的概念是全密点的概念。进一步改进的性质最好是用某种形式的积分来刻划，这方面首先系统地为Marcinkiewicz所研究。

(d) 函数分成大小两部分的分解。经常发生的是，这种性质较诸以分解本身为目的更具有技巧性。象在本章的第一个定理中那样，它在证明L^p不等式时特别有用。第一个定理证明中的这一部分，在本章§4讨论的Marcinkiewicz内插定理中将得到系统化，同样情形见附录B。

---

① 我们称两集合不相重叠，是指它们的内部不相交．——译者注