

工程电磁场与波

The top border of the cover features a dark blue background with yellow and white diagrams. On the left, there are two sets of magnetic field lines forming loops around current-carrying wires, with arrows indicating the direction of the field. On the right, there is a diagram of a star-shaped field pattern within a square grid, possibly representing a specific electromagnetic configuration or wave pattern.

〔美〕 Carl T.A. 约翰克 著

吕继尧 彭铁军 译

国防工业出版社



工程电磁场与波

〔美〕 Carl T. A. 约翰克 著

吕继尧 彭铁军 译

李缉熙 林焯森 校

国防工业出版社

内 容 提 要

本书是美国科罗拉多等几所大学使用多年的一本电磁场与波教科书。它从介绍电磁理论中广泛应用的数学问题开始,系统地论述了麦克斯韦方程和边界条件,静态的和准静态的电场和磁场,平面波的反射和透射,波导和双导体传输线的理论,以及自由空间中天线的辐射等问题。书中有大量的例题和习题,这对于理解和应用比较抽象的电磁场与波的理论是有助益的。

本书可供工科院校有关专业师生学习参考,也可作工程技术人员的自学读本。

ENGINEERING ELECTROMAGNETIC FIELDS
AND WAVES

Carl T. A. Johnk

John Wiley & Sons, Inc. 1975

工 程 电 磁 场 与 波
〔美〕 Carl T. A. 约翰克 著
吕继尧 彭铁军 译
李缉熙 林焱森 校

国防工业出版社出版

本书在北京发行所发行 各地新华书店经售
上海商务印刷厂排版 国防工业出版社印刷厂印装

787×1092 1/16 印张26 614千字

1983年2月第一版 1983年2月第一次印刷 印数: 0,001—5,300册

统一书号:15084·2074 定价: 2.65元

译者的话

电磁场与电磁波的理论,是经过比较长期的实践验证和理论概括而成的一门科学。它不仅早已成为微波、天线等工程技术的理论基础,而且已日益广泛地应用于最新科学技术的各个领域。

电磁场与波的理论,概括性强,内容较抽象,使用数学工具多,新概念也多。有时理解基本理论不很难,但解题较难,应用较难。对于工程技术人员来说,既要掌握一定的电磁场与波的基础理论知识,又要具备用此理论来解决工程实际问题的能力。原书为实现这两个方面的目标,作了相当大的努力。原书前后的几个版本,曾在美国科罗拉多大学和另外三所大学作为教科书使用达七年之久。它有两个特点:一是其内容着重于工程上所必须的电磁场与波的基础理论,具有一定的深度与广度,与工科院校有关专业的《电磁场理论基础》课程要求相适应。二是其分析方法由浅入深,具体形象。为了建立概念和说明问题,书中有大量的插图,且每章都有大量的例题和习题,这对于学习抽象的电磁理论很有好处。鉴于这些特点,我们翻译了这本书,供我国高等院校有关专业的师生和工程技术人员参考。

本书经王尔杰同志审阅了全部译稿;在清稿过程中,王新生、刘茂才、张志冻等同志帮助我们抄写和校核,曾付出辛勤的劳动。

在译校过程中,对原书中的一些错误和疏漏之处,已作改正。

限于水平,难免有错误和不当之处,请读者批评指正。

译者

前 言

除了根据科罗拉多大学电气工程课程某些具体需要而写成的这本著作(对于别处存在的类似需要也是适用的)以外,要推荐另一本更合适的大学电磁场教科书可能是颇为困难的。直到几年以前,在大学三年级的两个学期内,电磁场和波传输理论的课程安排是:在第一学期内使用按传统观点写的较为一般的场的教科书,内容包括静电场和静磁场;在第二学期内,使用另一本教科书或几本教科书,主要包括传输线和波导的理论与应用,并介绍天线理论与辐射。由这种方案产生的问题是,在使用两种或更多的教科书时,方法和符号表示上的差异,使学生在重新学习应该在第一学期已逐步掌握的某些概念时,造成大量的时间浪费。按传统的方法(经由实验的库仑定律和安培定律)导出静电场,使了解带根本性的麦克斯韦方程被推迟到差不多第一学期的末尾。这是作者所认为的主要缺点。

本书体现了为解决这些问题所作的努力。它是原来的几个版本的结晶,这些版本由作者在科罗拉多大学以及由同事们在另外三所大学的教学中已使用达七年之久。本书的重要特点可以综述如下:

1. 在头三章里,一开始就把麦克斯韦方程用于自由空间,再推广到有物质的区域,并讨论边界条件。以在静态场和时变场问题上的应用作例子来说明这种推广。然后在第四章和第五章中全面论述作为特殊情况的静电场和静磁场,并在这些章节中自然地过渡到准静态时变场的情况。上述这许多材料通常作为一个学期的内容。

2. 假定学生具备包括微分和积分运算在内的大学一、二年级课程的知识。作为全书所需要的矢量概念,在头两章里予以介绍。虽然在本书中矢量概念的主要应用只涉及直角坐标、圆柱坐标和球坐标系统,但还选用了广义坐标系统来导出点积和叉积的概念以及梯度、散度和旋度算子。用各种方法介绍矢量分析的几年经验以及对学生们反映所作的观察使作者确信,用广义形式介绍上述这些内容,由于将各种坐标系统作统一讨论,因而可节省时间。

3. 在第四章和第五章中讨论静态和准静态电场和磁场的基础上,详细地讨论了电容和电感的问题。对电容的讨论,除了用通常的能量和电压的方法以外,还使用了通量作图方法,并推广到电容-电导类比上。自感和互感的研究,其内容比一般书籍要多,在第五章中导出了非线性器件和线性器件磁能的定义式,并详细地求解了七个例子。

4. 第六到第十一章着重讨论波导和传输线,并介绍了天线,这些宜作第二学期的内容。第六章与一开始就讨论传输线法的那种习惯方法不同,而是通过垂直入射到多层系统的反射和透射的平面波问题,把电磁场的简单边值问题和对波的传输系统的分析,同时介绍给学生。这种一般的平面波方法突出了阻抗、反射系数和史密斯圆图等概念的普遍性。已经发现,这种方法在学会处理无线电波和光学系统的反射和传输问题的基本技能的同时,还可以加深理解有反射的传输线上波的结构,它是在后面第九章和第十章要详细讨论的问题。

5. 第七章深入地论述了关于电磁能量和功率的实时形式和复数形式的波印亭定理,并把它用于无耗和有耗区域内的平面波中。第八章对空心矩形波导的各种模式,包括对群速

的概念以及波导壁损耗造成的衰减，都作了充分的讨论。双导体传输线的 TEM 波放在第九章中介绍。在该章中还应用第四章和第五章中得出的静态场理论导出了无耗和有耗情况下传输线的参数。第十章继续讨论传输线上的反射问题，它是在第六章的基础上进行的，并包括史密斯圆图（阻抗和导纳圆图两种形式）在驻波和阻抗匹配问题上的应用。本章最后研究时域的非正弦波在无耗线上的反射。

6. 在第十一章里涉及了天线辐射的几个方面的问题，它们比在相同水平上的大多数课本要深入一些。这些内容包括用格林定理导出辐射积分，关于细导线上电流分布的波克林顿(Pooklington)定理，中心馈电的偶极子的辐射，以及应用等效定理去研究孔源（比如喇叭天线和激光器）的辐射场。

7. 通过解出的问题，已尽力使理论基础的深度和实际应用得到兼顾。全书演算了大量例题，以帮助学生有效地进行自学，也给教师的课堂讲解提供了较大的灵活性。

Carl T. A. 约翰克

目 录

第一章 矢量分析和自由空间中的电磁场	1
1-1 标量场和矢量场	1
1-2 矢量和	2
1-3 矢量与标量的积	2
1-4 坐标系	3
1-5 空间的微分元	5
1-6 位置矢量	6
1-7 矢量的标积和矢积	9
1-8 矢量积分	11
1-9 电荷、电流和它们的密度	13
1-10 用电磁场力来表示的电场和磁场	16
1-11 自由空间中麦克斯韦方程的积分形式	18
1-12 单位和量纲	30
参考书目	32
习题	32
第二章 矢量的微分关系式和自由空间中麦克斯韦方程的微分关系式	37
2-1 矢量场的微分	37
2-2 标量函数的梯度	38
2-3 算符 ∇ (Del)	40
2-4 矢量函数的散度	41
2-5 矢量场的旋度	48
2-6 麦克斯韦方程的归纳: 复数的、时-谐的形式	55
2-7 拉普拉斯算子和旋度的旋度算子	57
2-8 格林积分定理; 唯一性	60
2-9 自由空间中电场和磁场的波动方程	61
2-10 真空中的均匀平面波	63
参考书目	68
习题	68
第三章 静止物质区域的麦克斯韦方程和边界条件	72
3-1 金属的导电率	72
3-2 物质的电极化和 $\text{Div } D$	75
3-3 物质的 $\text{Div } B$; 其积分形式和 B 的法向分量的边界条件	82
3-4 磁化和物质的 $\text{Curl } H$	83
3-5 麦克斯韦 $\text{Curl } E$ 关系式、它的积分形式和 E 的切向分量的边界条件	97
3-6 无界导电区域中的均匀平面波	99
3-7 导电介质的分类	105
3-8 物质的线性、均匀性和各向同性	107

3-9 普通物质的电磁参数	111
参考书目	111
习题	111
第四章 静态和准静态电场	115
4-1 静电场的麦克斯韦方程	115
4-2 自由空间中固定电荷群的静电场	116
4-3 电荷的守恒	118
4-4 高斯定律和静止的导体-介质系统	120
4-5 静电标量位	121
4-6 电容	125
4-7 静电场的能量	127
4-8 泊松方程和拉普拉斯方程	131
4-9 静电场解的唯一性	133
4-10 拉普拉斯方程和边值问题	135
4-11 镜像法	139
4-12 带静止电荷导体的近似方法	143
4-13 用场的作图法求二维系统的电容	145
4-14 法向 \mathbf{D} 和 \mathbf{J} 的一般边界条件	149
4-15 电容的电导模拟	152
4-16 静电力和力矩	158
参考书目	161
习题	161
第五章 静态和准静态磁场	166
5-1 静磁场的麦克斯韦方程和边界条件	166
5-2 安培环路定律	167
5-3 磁路	169
5-4 磁矢位	173
5-5 自由空间中 \mathbf{A} 的积分解; 毕奥-沙伐定律	173
5-6 准静态电磁场	178
5-7 开路感应电压	179
5-8 运动的电动势和电压	181
5-9 由时变磁矢位求感应电动势	185
5-10 电压发生器和基尔霍夫定律	188
5-11 磁能和自感	193
5-12 耦合回路和互感	208
5-13 磁力和磁矩	215
参考书目	218
习题	218
第六章 垂直入射波在平面界面上的反射与透射	225
6-1 边值问题	225
6-2 垂直入射时从平面导体面上的反射	226
6-3 用于实时场与复数场时波的解	228

6-4	两区域中的反射与透射	229
6-5	对两个以上区域的垂直入射	232
6-6	采用反射系数和波阻抗的解	234
6-7	运用史密斯圆图的图解法	238
6-8	驻波	243
	参考书目	246
	习题	246
第七章	波印亭定理和电磁功率	250
7-1	波印亭定理	250
7-2	时间平均波印亭矢量与功率	254
7-3	时间平均波印亭矢量和时谐场	259
	参考书目	263
	习题	263
第八章	波导的模式理论	265
8-1	当场具有 δ 函数相关时的麦克斯韦关系式	266
8-2	TE、TM 和 TEM 模关系式	268
8-3	矩形波导的 TM 模解	272
8-4	矩形波导的 TE 模解	279
8-5	空心波导中的色散: 群速	288
8-6	空心波导中壁损耗衰减	293
	参考书目	297
	习题	298
第九章	双导体传输线上的 TEM 波	301
9-1	静电位和 TEM 模场	302
9-2	TEM 模的波阻抗与传输常数	306
9-3	电压波和电流波: 特性阻抗	309
9-4	传输线的参量(设为理想导体)	311
9-5	理想导体传输线的电路模型	317
9-6	理想导体传输线的波动方程	318
9-7	考虑导体阻抗的传输线参量	319
	参考书目	333
	习题	333
第十章	有反射的传输线分析	338
10-1	有反射传输线上的电压和电流计算	338
10-2	传输线的史密斯圆图分析	344
10-3	传输线上的驻波	348
10-4	传输线阻抗的解析表示式	352
10-5	阻抗匹配: 无耗线的短线匹配	355
10-6	无耗线上的非正弦波	357
	参考书目	365
	习题	369

第十一章 自由空间中天线的辐射	372
11-1 用电磁位表示的波动方程	372
11-2 自由空间中非齐次方程的积分解	374
11-3 无穷小电流元的辐射	378
11-4 中心馈电细线结构天线的辐射场	382
11-5 对称的麦克斯韦方程及其矢位; 场的等效定理	388
参考书目	398
习题	398
附录 电路理论的能量和功率的概念	400

第一章 矢量分析和自由空间中的电磁场

矢量分析作为数学一个分支其重要的开端可追溯至十九世纪中叶。从那时起,它已发展成为物理学家基础知识的一个组成部分。本书前两章所论述的矢量分析是为学习其余各章的需要服务的。研究标积、矢积和关于矢量的某些积分方法,是为确定电场和磁场的洛仑兹力效应作准备,也是为了导出自由空间中的电磁场的麦克斯韦积分关系式作准备。我们把注意力集中在广义正交坐标系上,而以较普通的笛卡尔坐标、圆柱坐标和球坐标系作为例子。

1-1 标量场和矢量场

我们可以把场认为是时空的数学函数。可分为标量场和矢量场两类。标量场是这样的一个函数:即在每一给定的时刻、在空间中一个区域的每一点上它有一个给定值。这样看

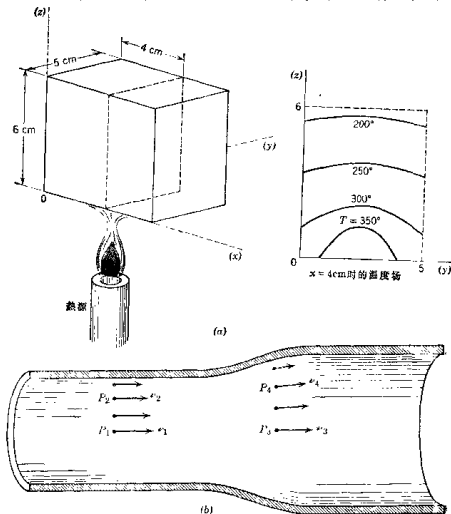


图 1-1 标量场和矢量场的例子

(a) 一块物体内的温度场; (b) 横截面变化的管中流体速度场

来, 在图 1-1(a) 那块物体中的温度场 $T(x, y, z, t)$ 是一个标量场。对每一点 $P(x, y, z)$ 来说, 任一时刻 t 都存在对应的温度 $T(x, y, z, t)$ 。图 1-1(b) 所示管内运动着的流体的速度是矢量场的一个例子。在管子横截面变化的地方, 流体速度的方向和大小就发生变化。标量场的其他例子如质量、密度、压力和重力等。而力场、速度场和加速度场等都是矢量场的例子。

可任取一个字母, 例如 A, T, a, f 作为标量的数学符号。任一黑体罗马字, 例如 $A,$

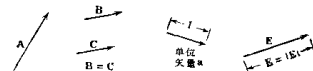


图 1-2 一个矢量、两个矢量相等和单位矢量的几何表示;
矢量的大小或长度的表示法

H, a, g 均可作为矢量符号。矢量可用箭头或有向线段来图示, 如图 1-2 所示。矢量 A 的大小或长度可写作 $|A|$ 或简称为 A , 它是一个正的实标量。矢量的负值就是把该矢量的方向反过来, 即箭头指向相反的那一端。单位矢量就是大小为 1 的任一矢量。通常用符号 e 来表示单位矢量, 而用下标来指明它特定的方向。例如, e_x 表示正 x 方向的单位矢量。若两个矢量具有同样的方向和同样的大小, 则谓之相等。(它们不需要共线, 而只需彼此平行即可。)

大小为 1 的任一矢量。通常用符号 e 来表示单位矢量, 而用下标来指明它特定的方向。例如, e_x 表示正 x 方向的单位矢量。若两个矢量具有同样的方向和同样的大小, 则谓之相等。(它们不需要共线, 而只需彼此平行即可。)

1-2 矢量和

A 与 B 的矢量和可由图 1-3 所示矢量图来定义。可用空间的合成位移来具体说明矢量和。于是, 若使一质点先连续地走过矢量 A 的距离, 而后再走过矢量 B 的距离, 则其最后位置应表示为矢量和 $A+B=C$, 如图 1-3(a) 所示。把 A 与 B 移动的次序颠倒, 仍得同样的矢量和 C , 所以, 可得矢量加法的交换律:

$$A+B=B+A \quad (1-1)$$

若数矢量相加, 则由矢量和的定义和图 1-3(b) 可得到结合律:

$$(A+B)+D=A+(B+D) \quad (1-2)$$

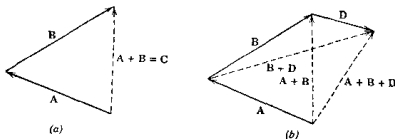


图 1-3 (a) 两矢量和的几何定义; (b) 加法的结合律

1-3 矢量与标量之积

若 u 表示一个标量, B 表示一个矢量, 则它们之积 uB 为这样的一个矢量, 即它的大小为 u 的大小与 B 的大小相乘; 它的方向, 当 u 为正标量时, 与 B 的方向一致, 当 u 为负标量时, 与 B 的方向相反。下列定律在矢量和标量相乘时成立:

$$uB=Bu \quad \text{交换律} \quad (1-3)$$

$$u(vA)=(uv)A \quad \text{结合律} \quad (1-4)$$

$$(u+v)\mathbf{A} = u\mathbf{A} + v\mathbf{A} \quad \text{分配律} \quad (1-5)$$

$$u(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = u\mathbf{A} + u\mathbf{B} \quad \text{分配律} \quad (1-6)$$

1-4 坐标系

求解物理问题常常需要引入具体的坐标系, 特别在寻求明确的解答时更是如此。虽然经常使用圆柱坐标和球坐标两个坐标系, 但最为工程师和科学家所熟悉的是笛卡尔或直角坐标系。我们把这些正交坐标系的独立坐标变量所用的符号列出如下:

1. 直角坐标: (x, y, z)
2. 圆柱坐标: (ρ, φ, z)
3. 球坐标: (r, θ, ϕ)

矢量用它的各个分量来表示, 是矢量与标量相乘的一种应用。我们现在对这个问题的讨论只限于正交坐标系。我们把空间中具有代表性的点 P 看作是图 1-4(a) 的常用坐标系中的一个点。在该点上, 每个坐标系的单位矢量这样规定: 即, 使它处于相应的坐标变量正的增加方向, 如图 1-4(b) 所示。用所要求的坐标变量角注的符号 \mathbf{a} 来表示某一特

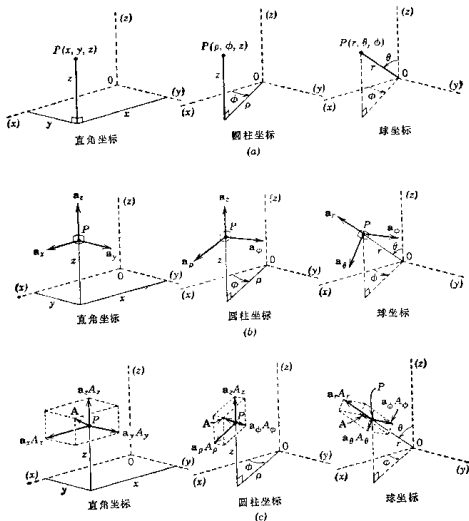


图 1-4 在三个普通坐标系中所采用的符号规定
 (a) 空间中的点 P 的位置; (b) 具有代表性的点 P 的单位矢量;
 (c) 矢量 \mathbf{A} 分解为它的各个正交分量

定坐标系统的单位矢量。所以 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 为直角坐标系统的单位矢量。图 1-4(c) 中表示一个典型的矢量 \mathbf{A} 在各个坐标系统被分解为它们各自的分量的情况^①，用符号表示如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z && \text{直角坐标} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_z A_z && \text{圆柱坐标} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\phi A_\phi && \text{球坐标} \end{aligned} \quad (1-7)$$

而其大小(长度)为

$$\begin{aligned} A &= [A_x^2 + A_y^2 + A_z^2]^{1/2} && \text{直角坐标} \\ A &= [A_r^2 + A_\theta^2 + A_z^2]^{1/2} && \text{圆柱坐标} \\ A &= [A_r^2 + A_\theta^2 + A_\phi^2]^{1/2} && \text{球坐标} \end{aligned} \quad (1-8)$$

为了使后面对标量场和矢量场的研究统一起见，引入广义正交坐标系， u_1, u_2 和 u_3 表示其坐标变量。空间中的典型点 $P(u_1, u_2, u_3)$ 是三个坐标变量为常数的面 $u_1 = C_1, u_2 = C_2$ 和 $u_3 = C_3$ 的交点。这些面中的每两个面的交线定义为坐标线，例如标 u_1 的坐标线由如图所示的 $u_2 = C_2$ 和 $u_3 = C_3$ 两个面来定义。这些概念通过三个常用坐标系统举例说明于图 1-5 中。从图可看出，在球坐标系中， $r = \text{常数}$ 的面和 $\theta = \text{常数}$ 的面的交线是一个圆。

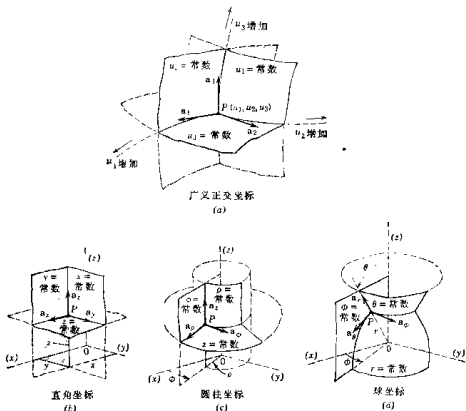


图 1-5 确定典型点 P 的坐标面和点 P 上的单位矢量

单位矢量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 和 \mathbf{a}_3 互相垂直，并且通过图 1-5 所示的 P 点与各坐标线相切。若把矢量 \mathbf{A} 与该图中的 $P(u_1, u_2, u_3)$ 点相联系，则可用广义正交分量的符号把它表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 A_1 + \mathbf{a}_2 A_2 + \mathbf{a}_3 A_3 \quad (1-9)$$

^① 于是， \mathbf{A} 在直角坐标系统的各个分量为矢量 $\mathbf{a}_x A_x, \mathbf{a}_y A_y$ 和 $\mathbf{a}_z A_z$ 。另一个习惯用法是仅把标量系数 A_x, A_y 和 A_z 当作 \mathbf{A} 的各个分量，亦可认为这些标量是 \mathbf{A} 在各目的坐标轴上的投影。

其大小为

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + A_3^2]^{1/2} \quad (1-10)$$

标量 A_1 、 A_2 和 A_3 称为矢量 A 的分量。对于 A 在三个常用坐标系下的特定表达式已在式(1-7)和式(1-8)中给出。

1-5 空间的微分元

在不久将要研究的空间积分方法中,常常需要用到体、面和线的微分元。空间中点 $P(u_1, u_2, u_3)$ 附近的体微分元 dv , 通过把坐标变量变换成微分变量 du_1 、 du_2 和 du_3 后, 就可以用坐标面上的位移 dl_1 、 dl_2 和 dl_3 来表示。图 1-6(a) 中的几何图形表示了这种情况。可见, 在广义正交坐标系中, 体微分元 dv 可用长度微分元的乘积表示如下:

$$dv = dl_1 dl_2 dl_3 \quad (1-11)$$

长度微分元与坐标变量 u_1 、 u_2 、 u_3 的微分变化量的关系为

$$dl_1 = h_1 du_1, \quad dl_2 = h_2 du_2, \quad dl_3 = h_3 du_3 \quad (1-12)$$

所以, 式(1-11)可写作

$$dv = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (1-13)$$

式中 h_1 、 h_2 和 h_3 称为度量系数。它必须给出式(1-12)的长度元所要求的长度(米)量纲。由图 1-6(b)、(c) 和 (d) 的 dv 的几何图形来看, 显然下列长度元和度量系数可应用到三个常用的坐标系:

$$dl_1 = dx, \quad dl_2 = dy, \quad dl_3 = dz, \quad h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

$$\text{直角坐标} \quad (1-14)$$

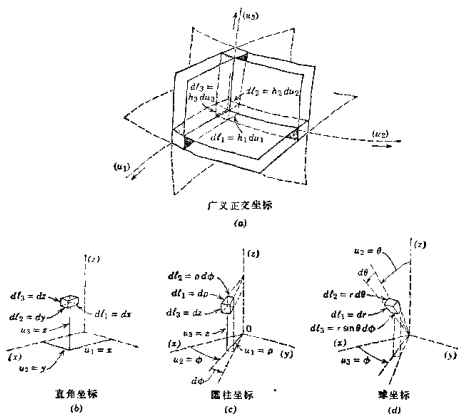


图 1-6 在正交坐标系下, 空间典型点上微分体元 $dv = dl_1 dl_2 dl_3$ 的形成

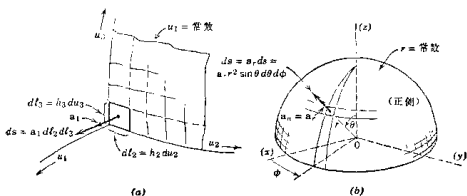


图 1-7 坐标面上的典型面积元 ds 。注意面元用一单位法线矢量相乘后具有矢量元的特性
(a) 广义正交坐标系下在 u_1 为常数的坐标面上的面元 ds ; (b) 球坐标系下 r 为常数的坐标面上的面元 ds

$$dl_1 = d\rho, dl_2 = \rho d\phi, dl_3 = dz \quad h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1 \quad \text{圆柱坐标} \quad (1-15)$$

$$dl_1 = dr, dl_2 = r d\theta, dl_3 = r \sin\theta d\phi, h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin\theta \quad \text{球坐标} \quad (1-16)$$

用这些结果代入式(1-13)得到每个坐标系统的体积元 dv 如下:

$$\begin{aligned} dv &= dx dy dz && \text{直角坐标} \\ dv &= \rho d\rho d\phi dz && \text{圆柱坐标} \\ dv &= r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi && \text{球坐标} \end{aligned} \quad (1-17)$$

虽然为了某些目的,空间中的 S 面的面积元 ds 可以用矢量形式 $d\mathbf{s}$ (如果需要的话),但也可用它的标量形式 ds 。假定 $d\mathbf{s}$ 与 $u_1 = \text{常数}$ 的坐标面重合,如图 1-7(a) 所示。则对该例来说,可把它表示为标量面积元 $ds = dl_2 dl_3 = h_2 h_3 du_2 du_3$ 。图 1-7(b) 表示球坐标的例子,在 $r = \text{常数}$ 的坐标面上, $ds = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ 。用垂直于 ds 的正或负的单位矢量去乘 ds ,便得一矢量。所以,在图 1-7(b) 中,面元矢量为 $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_r ds$; 在所示的 $r = \text{常数}$ 的坐标面上,另一种取法是 $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_r ds$ 。这些概念在 1-9 节中讨论通量积分方法时特别有用。

微分线元在应用于矢量积分时常常是重要的。这个问题将通过下节讨论的空间各点的位置矢量 \mathbf{r} 来研究。

⊖1-6 位置矢量

在研究场的理论时,可以选取空间一点 $P(u_1, u_2, u_3)$ 的位置矢量为参考,用符号 \mathbf{r} 表示。例如,图 1-4 中 P 点的位置矢量就是由原点 O 指向 P 点的矢量 \mathbf{r} 。这样,在直角坐标下 \mathbf{r} 可写成

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z \quad (1-18)$$

圆柱坐标下为

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_\rho \rho + \mathbf{a}_z z \quad (1-19)$$

球坐标下为

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_r r \quad (1-20)$$

位置矢量 \mathbf{r} 进一步的应用是作为空间中的点的符号标志。我们可以用缩写符号 $P(\mathbf{r})$

⊖ 书中凡带有 * 号的章节在必要时可以略去,以节省时间。

代替符号 $P(u_1, u_2, u_3)$ 或 $P(x, y, z)$ 。同样, 如果必要的话, 标量场 $F(u_1, u_2, u_3, t)$ 可较紧凑地用等效的符号 $F(\mathbf{r}, t)$ 来表示。

空间中的点 $P(\mathbf{r})$ 和 $P(\mathbf{r}+d\mathbf{r})$ 之间的长度微元可用矢量的微分位移 $d\mathbf{r}$ 表示。此微分变化量 $d\mathbf{r}$ 的方向通常与位置矢量 \mathbf{r} 的方向不一致, 图 1-8(a) 就是一个例子 (矢量符号 $d\mathbf{l}$ 有时可与 $d\mathbf{r}$ 互换, 尤其是研究线积分时)。利用广义正交坐标分量, 微分位移 $d\mathbf{r}$ (或 $d\mathbf{l}$) 可写作:

$$d\mathbf{r} \equiv d\mathbf{l} = \mathbf{a}_1 dl_1 + \mathbf{a}_2 dl_2 + \mathbf{a}_3 dl_3 \quad (1-21)$$

$$= \mathbf{a}_1 h_1 du_1 + \mathbf{a}_2 h_2 du_2 + \mathbf{a}_3 h_3 du_3 \quad (1-22)$$

图 1-8(b) 中用通常的长方形平行六面体来说明一个矢量表示为它的各个分量的情况。而且可以看出, 矢量 $d\mathbf{l}$ 的大小 $d\mathbf{l}$ 为此长方形平行六面体的对顶线, 所以

$$d\mathbf{l} = [(h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2]^{1/2} \quad (1-23)$$

例如, 在球坐标的情况下, $h_1 = 1$, $h_2 = r$ 和 $h_3 = r \sin \theta$, 所以, 式(1-22)、(1-23)可写成

$$d\mathbf{r} \equiv d\mathbf{l} = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\phi r \sin \theta d\phi \quad (1-24)$$

和

$$d\mathbf{l} = [(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2]^{1/2} \quad (1-25)$$

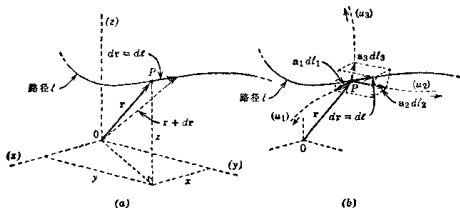


图 1-8 用来确定空间点位置矢量 \mathbf{r} 及其微分 $d\mathbf{r}$
(a) 沿任意路径的位置矢量 \mathbf{r} 及其微分变化量 $d\mathbf{r}$; (b) 广义正交坐标下 $d\mathbf{r}$ 各分量的图示

位置矢量 \mathbf{r} 在研究质点 (例如电子和离子) 动力学时很有用处。对图 1-8 的研究表明, 若在时间间隔 dt 内质点的矢量位移为 $d\mathbf{r}$, 则比率 $d\mathbf{r}/dt$ 表示质点在 $P(\mathbf{r})$ 点的速度矢量。质点速度 \mathbf{v} 用位置矢量 $\mathbf{r}(t)$ 的导数来定义, 即

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (1-26)$$

对 $\mathbf{r}(t)$ 求二阶导数得到质点的矢量加速度 $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ 。

因为质点的位移矢量 $d\mathbf{r}$ 如图 1-8 所示那样与路径 l 相切, 所以速度 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ 也应在 l 线上的每一点上与 l 线相切。这个相切性质不适合于加速度, 但纯粹的直线运动除外。 $P(\mathbf{r})$ 点的速度可有规则地用广义正交坐标速度分量表示为

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}_1 v_1 + \mathbf{a}_2 v_2 + \mathbf{a}_3 v_3 \quad (1-27)$$

例如, 在直角坐标系下, 符号 v_1, v_2 和 v_3 分别为 v_x, v_y 和 v_z 。

加速度 $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ 是式(1-27)的二阶时间导数, 即