经典和现代数学物理方程

Equations of Classical and Modern Mathematical Physics

陆 振 球

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书内容有物理问题的数学模型、线性偏微分方程的基本解法——分解综合方法(包括频谱分解和脉冲分解)、行波法、广义函数、特殊函数(包括渐近理论和超几何理论)及其应用、逆散射问题和非线性问题。和现行国内外教科书相比，本书在内容、观点、次序方面作了若干变动。

本书可作为综合大学和高等师范院校物理系、电子科学系等本科生的教材；也可作为化学系和高等工业院校有关专业的研究生教材或参考书；亦可供有关科技人员参考。

序 言

本书共九章。第一章是物理问题的数学模型，第二至第六章介绍线性偏微分方程定解问题的基本解法，第七、八章介绍特殊函数及其应用，最后一章介绍逆散射问题和非线性问题。

本书的重点是介绍求解线性系统的基本方法——分解综合方法，特别是频谱分解和脉冲分解方法。其物理思想很简单，就是独立作用原理，而其数学根据就是正交展开问题，特别是本征函数系的正交展开问题。这里的频谱分解法包括空间频谱分解和时间频谱分解，它把分离变量法和积分变换法融成一体，脉冲分解法把时间脉冲、空间脉冲、时空脉冲、初始脉冲、边界脉冲等等以统一的观点处理，Duhamel 方法和 Riemann 方法等也在其内。考虑到连续谱分解和脉冲分解中需用广义函数，现代物理教学和科研中也大量涉及，所以专设一章介绍广义函数。

在特殊函数的处理上，既重视各个特殊函数的个性，又强调它们之间的共性，特别是强调它们的共同研究方法和内在联系。本书还以球谐函数和圆柱函数为特例介绍超几何理论之精髓。行波法的适用范围虽较狭窄，但也不失为一个重要方法，特别是行波概念十分有用。逆散射和非线性问题是近一、二十年来十分热门的研究课题。逆散射问题中主要介绍逆散射微扰论和GLM方法。非线性问题中介绍 Hirota 变换、Bäcklund 变换和逆散射变换。在物理应用方面，本书也作了若干更新。

在推导数学模型时，这里采用微分法，更一般的是积分法，特别是当处理变形体时。

数学物理方程的研究对象十分广泛。只就线性系统而言，这

里主要介绍标量二阶线性双曲或抛物或椭圆型偏微分方程系统，没有或很少涉及矢量方程、高阶方程、混合型方程、积分方程和积分微分方程。特别是矢量方程在电磁波和弹性波等理论中随着科学研究的不断深入而日益显出其重要地位。本书也没有介绍应用中比较重要的 Wiener-Hopf 方法及其它复变函数论方法，也没有介绍许多重要的近似方法。感兴趣的读者可参阅有关参考书。

和现行教科书相比，本书在内容、观点、次序等方面作了若干变动，是否妥当，有待试验。由于时间仓促，水平有限，定有不少谬误，希多提意见，批评指正。

在写初稿时，董杏元女士帮助抄写了大部分手稿；在整个写作过程中，我的妻子张夏娥承担了几乎全部家务，为写作提供了良好条件；在出版过程中，得到南开大学物理系和上海科学技术出版社的大力帮助。

本工作是由中华人民共和国教育委员会和自然科学基金会资助的。在此一并向他们致以深切的谢意。

陆振球

1990年6月于南开大学

Preface

This book is divided into nine chapters. In the first chapter, mathematical models of physical phenomena are constructed. The basic methods for the solutions of linear partial differential equations are introduced in the following five chapters. Special functions and their asymptotic expansions and their applications to equations of mathematical physics are dealt with in Chapters 7 and 8. And finally, inverse scattering problems and nonlinear problems are studied in Chapter 9.

Much emphasis is placed on basic methods for the solutions of linear systems——methods of linear decomposition and synthesis, especially methods of spectral decomposition and impulse decomposition. The physical idea on which these two methods are based is very simple, that is the law of independence of disturbances, and the corresponding mathematical idea is the orthogonal expansion, in particular, the eigenfunction expansion. In this book, the method of separation of variables and the method of integral transforms are combined into one method as the method of spectral decomposition. Temporal impulses, spatial impulses, space-time impulses, initial impulses and boundary impulses are treated in a unified way in the method of impulse decomposition including the Duhamel and the Riemann methods. Generalized functions get a chapter to themselves because they are indispensable to methods of continuous spectral decomposition and impulse decomposition and involved greatly in the modern physics education and research.

This book gives the quintessence of the hypergeometric theory in only two sections. The method of traveling waves is also an useful one, especially the picture of traveling waves involved. The inverse problem and the nonlinear problem are two newly emerged and fascinating subjects for equations of mathematical physics. Chapter 9 covers the inverse scattering perturbation theory and Gel′fand-Levitan-Marchenko method on the inverse problem, and Hirota transformations, Bäcklund transformations and inverse scattering transformations on nonlinear problems.

Here the differential method is adopted in deriving mathematical models, even though the more general integral method is often useful, particularly, when dealing with deformed bodies.

Equations of mathematical physics have very wide subjects. As far as the linear system is concerned, what we have focussed here on are second-order linear scalar partial differential equations of hyperbolic, parabolic or elliptic type. Little or no atteation is given to vector differential equations, higher than second-order, mixed-type, integral or integral differential equations. Vector partial differential equations play an increasingly important role in the theories of electro-magnetic waves and elastic waves with the deepening of scientific research, but they are too advanced for the undergraduate student. Also no attention is given to the Wiener-Hopf method and other important methods related to the theory of functions of a complex variable, and many important approximate methods.

In comparison with existing test books on equations of mathematical physics, some changes in contents, viewpoints and order have been made in this book. Any suggestions, comments and criticisms are welcome for further improvement of this book.

I would like to express my thanks to Ms. Dong Xing-yuan for making a clean copy of most of the first draft; to the Department of physics of Nankai University and Shanghai Scientific and Technical Publishers for their help with the present publication.

I owe a lot to my wife Xia-E Zhang, who continuously gave me her encouragement and support throught out the preparation of this book.

In addtion, I am grateful to the State Education Commission and the National Natural Science Foundation of China for their financial support of this project.

Nankai University
Tianjin
People's Republic of China

Zhen-Qiu Lu

引　言

下列四个内容，即数学物理方程的研究对象，研究方法，若干术语和记号以及学习方法。

研究对象　数学物理方程，顾名思义，乃是物理学中的数学方程，诸如代数方程、函数方程、常微分方程、偏微分方程、积分方程、微分积分方程等。本书的重点是研究若干偏微分方程的解法。

在所有物理领域中，都离不开偏微分方程。例如，研究气体和液体运动的流体力学和研究固体运动的固体力学［合称连续介质(机械)力学］中会大量遇到偏微分方程；在研究物理量，如质量、能量、动量、电量等的转移的所谓输运过程时，研究电磁波和其它物质波时都会遇到大量偏微分方程，它们将分别是热物理，电磁物理，量子物理，统计物理等的研究对象；当考虑机械运动与热运动、电磁运动等等之间的相互作用时，会遇到更复杂的偏微分方程。

最近十几年来，特别是X射线断层照相在1979年获得诺贝尔奖以来，逆问题(或称反问题，其中主要的是逆散射问题)已成为一个极其重要和非常活跃的领域。所谓逆问题就是通过位于介质或源的外部的场的观测来重建介质或源的内部结构。它在探测、计量、成象等方面有非常重要的应用。例如，弹性波逆问题，它在声纳、声成象、地震学中有极其广阔的用途。逆源问题、电磁波逆问题、微观粒子波逆问题等分别在温度记录、核磁共振成象、雷达、激光成象、计量和探讨物质微观结构等方面的研究非常重要。而所有这些逆问题都与偏微分方程紧密有关。

研究方法　用数学方法研究实际问题大致经过以下步骤：首先把实际问题简化，抽出物理模型；然后把物理模型定量化，得到数学模型；再后便是解数学问题，最后用来解决实际问题。本书的重点是解数学问题。

把物理模型定量化得到数学模型的过程大致如下：首先建立时间空间坐标系和选择表征所研究的物理过程的一个或几个物理量及其坐标系，表征物理量的选择常常是建立一门新学科的起点；然后寻找(包括猜测)和掌握有关物理过程所遵守的实验定律，即是物理公理；最后写出实验定律的数学表达式。下面举两个简单例子说明这种方法。

例 1　一空间质点的机械运动

解　建立时间和空间坐标系，选择质点的位移矢量 $\boldsymbol{r}(t)$ 作为表征量。

实验定律　牛顿第二定律

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$$

数学模型　$m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}$ 它是描写一空间质点运动的方程。这个方程确定了质点运动的基本规律，但还不能完全确定其运动。如果已知其初始状态，则有

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F} & t>0 \\ \boldsymbol{r}\big|_{t=0}=\boldsymbol{r}_0 & \boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0 \end{cases}$$

就完全确定了它的运动。这便是所求的完整的数学模型。其中第一个方程称为泛定方程，其余的称为定解条件，这里是初始条件。

例 2　多质点系统的运动，如固体中的原子，分子运动。

物理模型　位于一直线上的$n+1$个质点，其质量分别为$m_i\ i=0(1)n$†，相邻两质点间存在弹性相互作用，两端质点固定，并已知初始状态。

数学模型　建立时空坐标系　x_i 为系统处于平衡态时的质点

† 符号 $i=0(1)n$ 表示 i 取初值为 0，步长为 1，终值为 n，即 $i=0, 1, \cdots, n$。

m_i的坐标。选择每个质点相对于其平衡位置的位移u_i为其表征量，表征量坐标系为：以每个质点的平衡位置为原点，其正方向同x的正方向

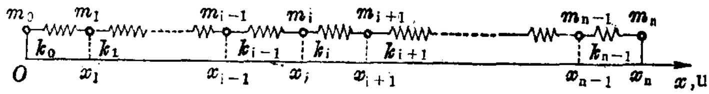

图 0.1

实验定律　除牛顿第二定律外，还需了解系统质点间的内力，即弹性力，设它遵守胡克(Hooke)定律$F=-ku$，其中F为被考察质点所受的来自相邻质点的弹性力，u为弹簧伸长量(即被考察质点的位移与相邻质点位移之差)，它取代数值，k为倔强系数。

选择内部具有代表性的质点m_i，研究其运动规律，显然内部一般点处的运动规律，即泛定方程为

$$m_i\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2}=F_i=-k_{i-1}(u_i-u_{i-1})-k_i(u_i-u_{i+1})$$

$$i=1(1)n-1,\ t>0$$

边界点的运动规律，称为边界条件

$$u_0=0,\ u_n=0\quad t\geqslant 0$$

初始条件为

$$u_i\big|_{t=0}=u_{i0},\ \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_{i0},\ i=1(1)n-1$$

以上两个例子比较简单，但显示了由物理模型到数学模型推导过程中所遇到的基本问题和解决办法。其最困难部分不在于数学而来自物理，尤其是实验定律，特别是关于系统内部相互作用的实验定律。所以以后推导数学模型中，只牵涉若干简单的物理过程，通过它们掌握这种定量化处理的一般方法。对于复杂的物理过程，只是写出其数学模型，不加推导。推导它们是许多物理理论所要解决的问题。

求解数学方程的基本思想是通过变换的方法将复杂的方程简化。在每一类方程中都有其最简单的，而较复杂的方程通过各种

变换得到简化。例如一元二次代数方程中最简单的是 $x^2=c$，通过乘方的逆运算即开方即可求解，而较复杂方程 $ax^2+bx+c=0$ 可通过变换 $x'=x-x_0$ 求解，在有关指数函数方程中最简单的为 $e^x=c$，通过其逆运算——对数求解；在常微分方程中最简单的是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=f(x)$ 经过微分的逆运算——积分求解。而求解这些方面较复杂方程，可通过各种变换将其简化为同类方程中简单的，或化为另一类方程，如可把求解常微分方程通过变换化为求解函数方程或代数方程。求解线性偏微分方程、积分方程、微分积分方程乃至非线性方程的基本思想亦如此。对于线性方程，最常用的变换就是相加分解，在物理上就是频谱分解和脉冲分解，而解的最后形式是(无穷)级数或积分，因为级数和积分是解析表达函数的最强有力的工具。当然求解过程中还可以借助于其它形式的分解，还可以从数学上或物理上加以简化或猜测。这种具体的简化或猜测并不具有普遍意义，但这种简化或猜测的技术本身却具有普遍意义，尤其作为物理工作者，始终不能抛开物理图象去考虑数学问题。物理图象和几何图象常常是能简单明了而又深刻认识数学问题的钥匙。

若干术语和记号 常用以下记号

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u_t,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=u_x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=u_{tt},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=u_{xy}$$

等。

方程的阶 方程中出现的未知函数导数的最高阶数，例如

$$u_x^2+u_y^2=1,\ u_t-a^2u_{xx}=0,\ u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0,$$

分别为一阶、二阶和四阶方程。两个自变量 x, y 的未知函数 $u(x, y)$ 的二阶偏微分方程一般可写为

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})=0$$

方程的次 若 F 是未知函数及其各阶导数的多项式，则此多项式的最高次数称为该方程的次，例如方程

$$u_x^2+u_y^2-1=0$$

为二次方程，它是二元一阶二次偏微分方程。一次方程也称线性方程。二个自变量的二阶线性方程的一般形式为

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f$$

其中 a_{11}，a_{12}，a_{22}，b_1，b_2，c，f 都只是自变量 x、y 的函数。其中 $f(x, y)$称为非齐次项或强迫项。若 $f=0$，则上述方程称为线性齐次的。若记

$$L=a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+c$$

它是微分算符，则该方程可写为

$$Lu=f$$

显然有

$$L(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)=\alpha_1Lu_1+\alpha_2Lu_2$$

这就是方程的线性性质。

不是线性方程便称非线性方程，如著名的 KdV方程

$$u_t+u_{xxx}+\alpha uu_x=0$$

就是非线性的，若非线性方程中出现的未知函数最高阶导数为一次的，则称为拟线性方程。上述 KdV方程便是拟线性的。

方程的分类　类似于二次曲线的分类方法，对于二个自变量的线性偏微分方程，也有如下分类

若 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$ 称该方程为椭圆型方程，例如

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x, y)$$

若 $\Delta=0$ 称它为抛物型方程，如 $u_y=u_{xx}$，

若 $\Delta<0$ 称它为双曲型方程，如 $u_{xx}-u_{yy}=0$

而方程

$$u_{xx}+yu_{xx}=0$$

则是混合型方程，当 $\Delta=-y<0$ 时为椭圆型，而 $-y>0$ 时为双曲型。二个以上自变量的偏微分方程分类要复杂些，这也和三维空

间或更高维空间中的二次曲面的分类相似。

数学上的双曲型、抛物型和椭圆型三类方程，以后会看到，在物理上，分别描写三类不同的物理过程，即波动过程，输运过程和稳定问题。

学习方法　希望读者掌握以下方法：在处理一个问题时首先要弄清问题是什么，即所谓问题的提出，弄清哪些是已知的和可测的，哪些是未知的，待解决的，而以后的一切都围着这个目的，目的达到，问题就解决了。在这个方面常见的缺点是问题的提出不够明确或丢掉一些已知条件或在处理过程中随时加进一开始就应该列出的已知条件。这在从事科研时不可避免，但在学习阶段应尽可能减少；另一个缺点是不知最后的目的，因而无法理解以后发生的一切。在弄清问题的提出后，最重要的是了解处理问题的基本思想，这种基本思想不牵涉大量的数学运算，它只是一种处理问题的数学的(尤其是几何的)，物理的思路，简单明确。这是学习时特别要注意的，是决定成败之关键。紧接着是基本思想的具体实现，这一步会遇到大量数学运算，但如果掌握了基本思想后，就不会陷于繁杂的数学运算而不知所措。最后是技巧，处理各种问题中有各种巧妙的处理技术，使计算大大简化。总之，学习时要注意问题的提出，解决问题的基本思想，基本思想的实现步骤和技巧。希望读者对自己觉得难的问题、章节甚至全书作这种四方面的总结。

作为学生，在学习阶段主要是学习目前已有的知识，它们是别人的发现和创造。但要真正掌握这些知识，就必须以发明者，创造者的身份去学习。这可以说是学习方法的核心。

目 录

引言

第五章　频谱分解法——连续谱情况

第六章　脉冲分解法

第七章　特殊函数

第八章　特殊函数应用

*第九章　逆散射问题和非线性问题

Contents