高等学校工科函授教材

（高等教育工科自学通用）

高等数学与工程数学

第三册

华南工学院　吴亚森　何淑芷　陈世雄　黄南泰　编

卢　文　校

广东科技出版社

高等学校工科函授教材

（高等教育工科自学通用）

高等数学与工程数学

第 三 册

华南工学院 吴亚森 何淑芷 陈世雄 黄南泰 编

卢 文 校

广 东 科 技 出 版 社

高等学校工科函授教材

（高等教育工科自学通用）

高等数学与工程数学

第三册

华南工学院 吴亚森 何淑芷 陈世雄 黄南泰 编

卢文 校

·

广东科技出版社出版

广东省新华书店发行

韶关新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 11.875印 240,000字

1984年1月第1版 1984年1月第1次印刷

印数1—4,000册

统一书号7182·48 定价1.80元

内 容 简 介

《高等数学与工程数学》是华南工学院为复办函授教育而编写的高等学校工科函授教材(高等教育工科自学通用)．经由广东省高教局推荐，作为广东省业余大学、职工大学暂用教材．本书是参照一九八〇年六月高等学校工科数学教材编审委员会扩大会议审订的《高等数学教学大纲》和《工程数学教学大纲》，结合函授教学的特点编写的．

全书共分四册，第三册包括空间解析几何、向量代数、多元函数微分学、重积分和曲线与曲面积分等内容．叙述比较详细，每节附有复习思考题，每章附有学习方法指导、习题及自我测验题，书末附有答案，适合自学使用．

本书可作为高等工科院校函授教材，工科业余大学、广播电视大学、职工大学教学用书，也可作为具有高中文化程度的读者自学用书．

目　录

第十三章　向 量 代 数

向量不仅是研究技术科学的有力工具，也是研究数学本身许多问题的有力工具之一．这一章着重介绍向量的表示法和各种运算．希望读者通过这一章的学习，掌握空间直角坐标系中点与坐标的对应关系，熟悉向量、单位向量、向量相等以及向量的投影等概念，熟练掌握向量的相加和相减、数量与向量的乘积、向量的数量积、向量积等运算，特别要熟习用坐标表示的各种运算公式的方法，还要记住向量关系中的平行(共线)、垂直、共面的条件和夹角公式，并能够初步运用向量知识解决一些几何问题．

§13.1　空间直角坐标

一、空间点的直角坐标

在平面直角坐标系中，我们用一对有序的实数(x, y)即所谓坐标表示平面上点的位置；类似地，在空间直角坐标系中，我们用三个有序实数(x, y, z)来表示空间点的位置．

在空间取定一点O，以O为公共原点作三条两两互相垂直的数轴Ox，Oy，Oz，这样就构成了直角坐标系．O点叫做原点．三条数轴叫做坐标轴，通常叫x轴、y轴、z轴．每两条数轴所决定的平面叫坐标平面，由x轴、y轴决定的平面叫xOy坐标平面；由y轴、z轴和由x轴、z轴决定的平面分

别叫yOz和xOz坐标平面。习惯上按右手规则决定坐标轴的指向，如图13-1所示。要在平面上把空间直角坐标系表示出来，通常是把y轴和z轴的夹角画成90°，把x轴和y轴的夹角画成135°(图13-1)。

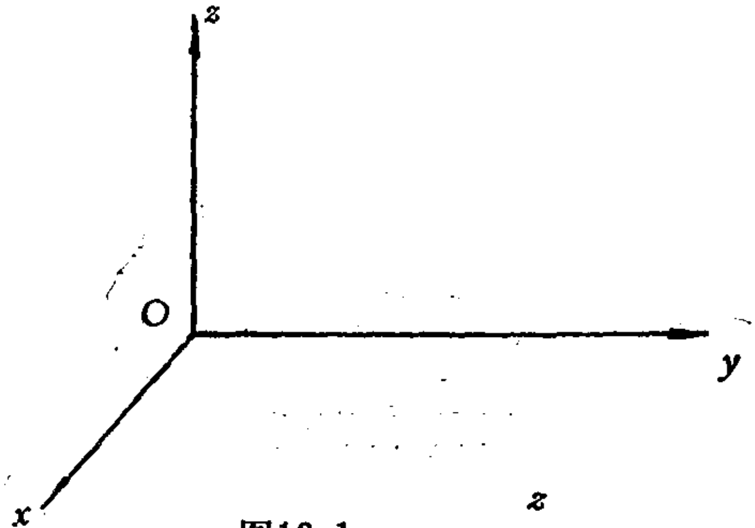

图13-1

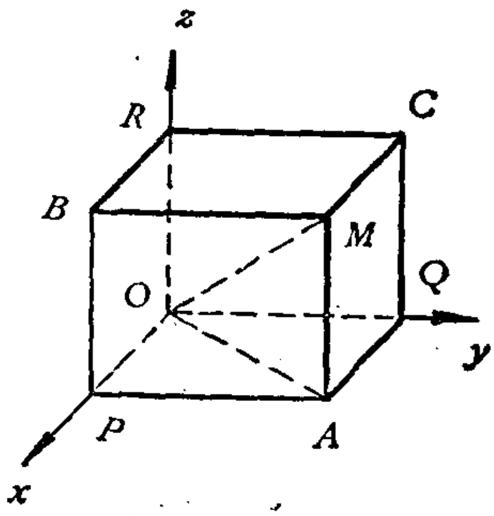

图13-2

有了直角坐标系，就可以规定空间内一个定点的坐标。设点M为空间一已知点，过M分别作三个平行于坐标面的平面，设它们分别交x轴、y轴、z轴于P，Q，R(图13-2)，这三点在坐标轴上的坐标分别是x，y，z，于是我们便规定有序数组(x, y, z)为点M的坐标。

由作法知，空间一点M唯一地对应一个有序的数组(x, y, z)，反过来，任一有序数组(x, y, z)，可以在x轴、y轴、z轴上分别定出以x，y，z为坐标的点P，Q，R，从而可以作出以OP，OQ，OR为棱的长方体，长方体中与原点O相对的顶点就是M。这样一来，通过坐标系便建立了空间的点M和有序数组(x, y, z)间的一一对应关系。

因为坐标平面xOy将空间分成上下两部分，坐标平面yOz把空间分成前后两部分，而平面xOz把空间分成左右两部分，所以三个坐标平面把空间共分成八个部分，每一部分叫做卦限，八个卦限的次序如图13-3所示．从图中可以看出，在xOy平面之上有四个卦限，xOy平面上每个象限上下各有一卦限，在上半空间卦限的次序数与象限的次序数相同，而下半空间卦限的序数等于上面卦限序数加4．

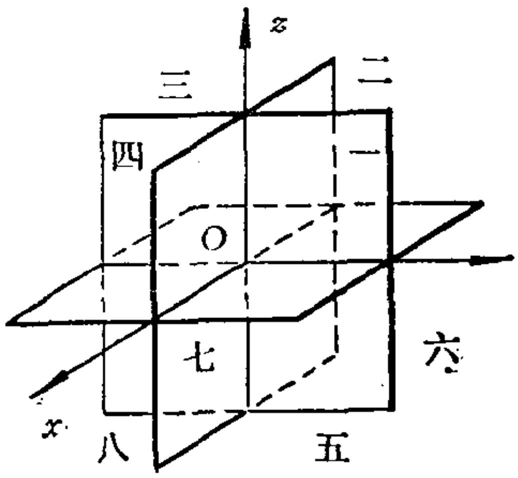

图13-3

读者应熟习各卦限内点的坐标的符号，在各个卦限内点的坐标的符号如下表所示。

卦限 / 符号 / 坐标	1	2	3	4	5	6	7	8
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

在坐标平面上点的坐标的特点是：xOy坐标平面的点坐标为$(x,y,0)$；yOz坐标平面上的点坐标为$(0, y, z)$；xOz坐标平面上的点的坐标为$(x, 0, z)$。

x轴上点的坐标为$(x, 0, 0)$；y轴上点的坐标为$(0, y, 0)$；z轴上点的坐标为$(0, 0, z)$。

读者应能熟练地描绘第一卦限内的点．只有这样才能透

彻地掌握空间直角坐标系的概念，为识别、描绘空间图形打下基础。

例1 求作点$M(2,3,4)$。

作法 先分别在x轴、y轴、z轴上描出以2，3，4为坐标的点A，B，C。

在xOy平面上，过A作直线平行于y轴，过B作直线平行于x轴，它们的交点为P。

在xOz平面上，过A作直线平行于z轴，过C作直线平行于x轴，它们的交点为D。

以AP，AD为边作矩形$APMD$，则顶点M为所求。如再以OC，OB为边作矩形$OBEC$，联PB，ME，则M点的空间位置便很明显了，如图13-4所示。

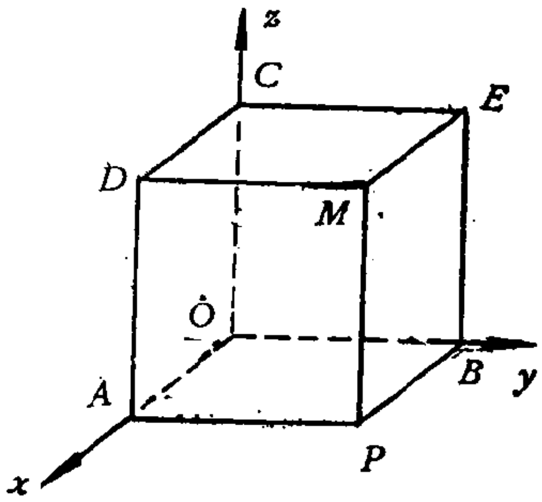

图13-4

二、空间两点间的距离

设空间两个已知点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，现在来导出两点间的距离公式。

设以M_1，M_2的联线M_1M_2为对角线的长方体，它的六个面两两平行于坐标面。由图13-5知

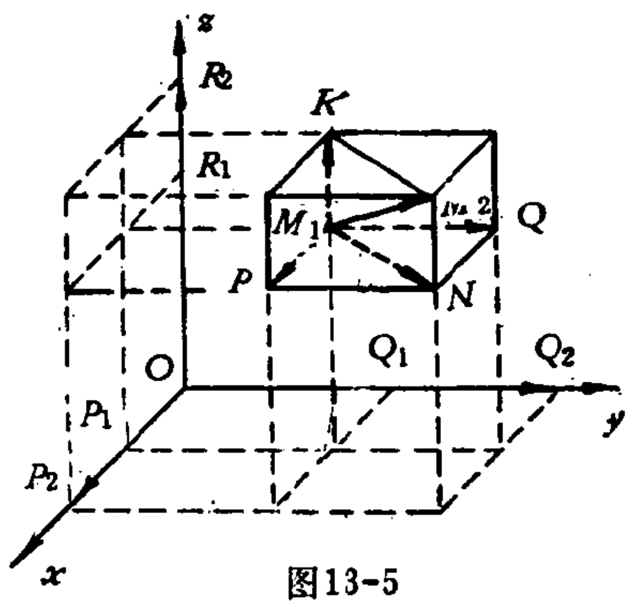

图13-5

$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+$

$$|NM_2|^2$$
$$=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2.$$

由于

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

得两点M_1，M_2的距离$|M_1M_2|$的公式：

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，点$M(x,y,z)$与原点$O(0,0,0)$的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例2 求两点$M_1(1,3,-1)$，$M_2(-2,1,3)$间的距离d。

解 $d=|M_1M_2|$

$$=\sqrt{(-2-1)^2+(1-3)^2+(3+1)^2}$$
$$=\sqrt{29}.$$

例3 证明以三点$A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$及$C(2,4,3)$为顶点的三角形ABC为等腰三角形。

解 $\because$ $|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}$
$=7$，
$|AC|=\sqrt{(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2}$
$=7$.

$\therefore$ $|AB|=|AC|$，因此$\triangle ABC$为等腰三角形。

例4 在yOz平面上，求与三点$A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$和$C(0,5,1)$等距离的点的坐标。

解 设M点为所求，由于M点在yOz平面上，因此可写

成$M(0, y, z)$。依题意有

$$|MA| = |MB| = |MC|,$$

即

$$\begin{cases} \sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} \\ \quad = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2}, \\ \sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2}. \end{cases}$$

解上方程组得

$$y = 1, \ z = -2,$$

点$M(0, 1, -2)$为所求。

复习思考题

1.设两点坐标分别为$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$。当M_1，M_2关于xOy平面对称时，它们的坐标有何特点？M_1，M_2关于yOz平面或xOz平面对称时它们的坐标有何特点？关于原点对称时如何？

2.点$P(x, y, z)$到各坐标平面的距离等于多少？到各坐标轴的距离等于多少？

3.参看图13-2回答下列问题：

(1) 平面PAM，QAM，RCM各平行于哪一坐标平面？垂直于哪一坐标平面和坐标轴？

(2) 图中有几个直角三角形？

(3) 哪些是垂直于每个坐标平面的直线？

(4) 若点M的坐标是$(2, 3, 3)$，那么A，B，C，P，Q，R各点的坐标是什么？

(5) 图中共有几组平行线？

作业：做本章习题1，3，5，6，7。

§13.2 向量的加法、减法及数与向量乘法

一、向量的概念及其表示

在实践中我们常遇到两种性质不同的量，一种是只有大小的量，即在确定单位后用一个实数便可表示的量，叫做数量（标量或纯量），如长度、时间、温度、密度、质量、功等；另一种是既有大小又有方向的量，叫做向量（矢量），如力、位移、速度、加速度、力矩、电场强度等。对于力，大小相同但方向不同的两个力，作用于物体同一点上的效果就不一样；对于速度，两个物体如果运动速度的大小相同但方向不同，那么所产生的位移也不会一样。

数量常用小写字母记之，如a，b，c，x，y等；而向量则用黑体小写字母，如$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$等来表示。

在几何上则用空间一有向线段来表示向量，如图13-6所示。其中有向线段的长度等于向量的大小，它的指向表示向量的方向，A点叫做起点，B点叫做终点。以A点为起点，以B点为终点的向量也可记为$\overrightarrow{AB}$。

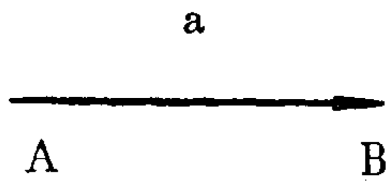

图13-6

向量$\mathbf{a}$的大小叫做$\mathbf{a}$的模，记为$|\mathbf{a}|$。$\overrightarrow{AB}$的模记为$|\overrightarrow{AB}|$。

起点和终点重合的向量叫做零向量，记为$\mathbf{0}$；零向量的模等于0，方向不定。

模等于1的向量叫做单位向量。

方向相同(即彼此平行且同向)且模相等的两向量a，b叫做相等向量(图13-7)，记为

$$a=b.$$

所有零向量均相等，相等的向量可看作是同一向量.

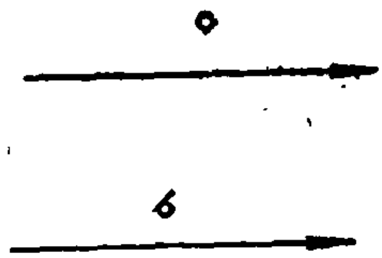

图13-7

根据向量相等的定义可以知道，只要不改变向量的大小和方向，向量可以任意平行移动. 换句话说，向量与它的起点无关；这样的向量叫做自由向量. 本章论述的向量均是自由向量.

大小相等但方向相反的两向量(它们不相等)，其中一个叫做另一个的逆向量. a的逆向量记作－a(图13-8).

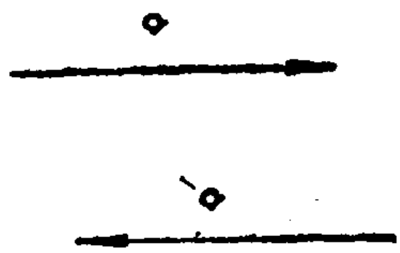

图13-8

二、向量的加法

根据力、速度合成时的四边形法则，可以抽象出向量的加法运算，规定如下：

设有a，b两向量，把 a，b 的起点移在一起，以a，b为邻边作平行四边形，则和a，b同起点的对角线向量，叫做a，b的和，记作a+b(图13-9). 这个求和法则叫做向量相加的平行

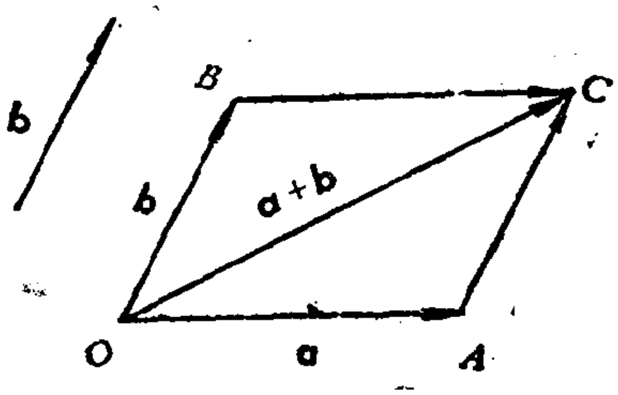

图13-9

四边形法则.

由图13－9我们看到 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$，因此，向量加法还有下列另一法则：

求 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 时，把向量 $\mathbf{b}$ 的起点移到向量 $\mathbf{a}$ 的终点，则以 $\mathbf{a}$ 的起点为起点，$\mathbf{b}$ 的终点为终点的向量就是 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$（图13－10）.

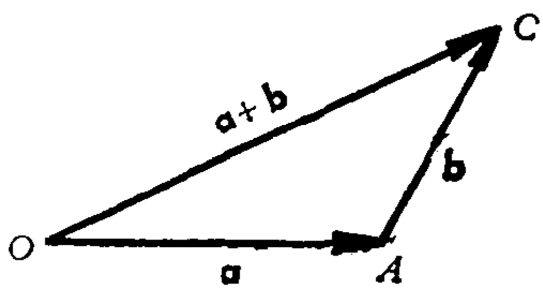

图13－10

由于 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 三个向量构成一个三角形，因此这种求和法则叫做三角形法则. 从图13－9可以看到，平行四边形法则和三角形法则没有实质性的区别.

根据求和法则，显然有

$$\mathbf{a}+0=\mathbf{a},\quad \mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}.$$

向量加法满足下列运算规律：

1. 交换律

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a};$$

2. 结合律

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

由向量加法平行四边形法则知道，加法符合交换律是显然的. 下面证明结合律. 由加法三角形法则得（图13－11）

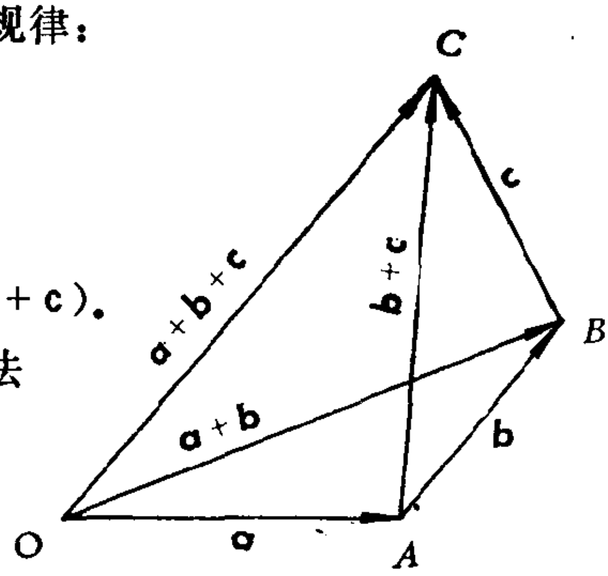

图13－11

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$