

地下水系统的随机模拟

[美]L.W.基尔哈 等著

李祚俊 李俊亭 译

地质出版社

地下水系统的随机模拟

〔美〕 L.W.基尔哈 P.Y.科
H.H.克韦 J.L.威尔逊 著

李祚俊 李俊亭 译

王兆馨 校

地 质 出 版 社

STOCHASTIC MODELING
OF GROUNDWATER SYSTEMS

Lynn W. Gelhar
Peter Y. Ko

Herman H. Kwei

John L. Wilson

MIT 1974

地下水系统的随机模拟

〔美〕L. W. 基尔哈 P. Y. 科 著
H. H. 克韦 J. L. 威尔逊

李祚俊 李俊亭 译

王兆馨 校

地质矿产部书刊编辑室编辑

责任编辑：沈树荣

地质出版社 出版

（北京西四）

地质出版社 印刷厂印刷

（北京海淀区学院路29号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本：787×1092¹/₁₆·印张：9¹/₄·字数：214,500

1984年2月北京第一版·1984年2月北京第一次印刷

印数：1—2,600册 定价：1.60元

统一书号：15038·新999

摘 要

本研究在应用谱分析 (spectral analysis) 技术评价地下水资源方面, 提出了重要新成果。它发展了频率域中含水层频谱响应 (spectral response) 的线性理论, 包括含水层倾斜、垂向水流、导水系数的变化以及其他现象的影响。提出了频谱域 (spectral domain) 中非线性效应的数值模拟, 证明非线性效应一般是相当小的, 因此, 对大多数地区来说, 简单的线性理论都能适用。

此外, 还探讨了渗透系数的空间变化和潜水面以上非饱和带内非稳定流的影响。通过波数域 (wave number domain) 中的谱分析, 为测量地下水流的简单观测网制订了一种误差准则。非饱和带中的地下水贮存量对地下水波动频谱的影响可以计算出来, 而且发现在大多数情况下都可忽略不计。

利用谱分析, 可以将理论上的成果用来计算堪萨斯州一个地区的地下水位、降水量和河水位的时间序列。依据这些数据, 采用一种基于线性谱论 (linear spectral theory) 的方法, 可得出对含水层导水系数和贮水系数的估算值。这种方法提供的参数值与从抽水试验得到的参数值完全符合。

这项研究成果可在一定条件下根据地下水位的天然动态资料来评价含水层参数。

符号一览表

下列符号都是这一研究报告中常用的。括号内给出的为度量的量纲。也列出了符号首次出现的章节。

符号	定 义	章节
a	线性贮水体系数〔 $1/T$ 〕	2.2
Co_{xy}	X 和 Y 的同相谱	2.1
e	由正态过程产生的随机噪声	3.3
f	河流水位输入的正规化转换函数的振幅平方	2.3
g	补给输入的正规化转换函数的振幅平方	2.3
G	转换函数或传递函数	2.1
G_1	从补给到含水层响应的转换函数	3.1
G_2	从河流水位到含水层响应的转换函数	3.1
h	饱和带厚度〔 L 〕	2.1
h_0	耦合系统内线性水体泄水口的标高〔 L 〕	2.3
H	河流水位或水库水位〔 L 〕	2.1
i	$\sqrt{-1}$	
i	有限差分模型不连续的 x 坐标	3.2
j	有限差分模型不连续的 y 坐标	3.2
k_m	最大滞后数	4.2
K	渗透系数〔 L/T 〕	2.1
L	含水层的水平长度〔 L 〕	2.1
m	通常取自河流位置处的含水层特征厚度〔 L 〕	3.1
m_x	x 的平均值	2.1
$p(X)$	概率密度函数	2.1
n	有效孔隙度	
P	降水强度〔 L/T 〕	3.2
q	线性贮水体, 单位面积的流出量〔 L/T 〕	2.2
Q	流量〔 L^3/T 〕	2.5
Q_{xy}	X 和 Y 的转象谱	2.1
R_{xx}	X 的自相关函数	2.1
\hat{R}_{xx}	X 自相关函数的估计值	2.1
R_{xy}	X 和 Y 的互相关函数	2.1
\hat{R}_{xy}	X 和 Y 互相关函数的估计值	2.1
s_x^2	X 的样本方差	3.3

符号	定 义	章 节
S	裘布依含水层的贮水系数	2.1
S_{xx}	$X(t)$ 的功率谱	2.1
\hat{S}_{xx}	$X(t)$ 的功率谱的修匀估计值	2.1
S_{xy}	$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的交叉谱	2.1
\hat{S}_{xy}	$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的交叉谱的修匀估计值	2.1
t	时间 $[T]$	2.1
T	含水层的导水系数 $[L^2/T]$	2.1
x	水平的空间坐标 $[L]$	2.1
X	一个任意选取的随机输入时间序列	
y	基准面以上的潜水面标高 $= (h + \zeta) [L]$	2.5
z	垂直的空间坐标 $[L]$	2.3
α	$= T/S [L^2/T]$	2.3
β	含水层底板的斜率	2.3
γ	降水补给系数	3.3
γ_{xy}^2	X 和 Y 凝聚函数的平方	2.1
ϵ	补给强度 $[L/T]$	
ζ	基准面以上含水层底板的标高 $[L]$	2.1
η	饱和带的无量纲厚度 $(= h/m)$	3.1
η_0	河水位的无量纲标高 $(= H/m)$	3.1
θ_{xy}	从 X 到 Y 的相位谱	2.1
μ	扰动参数 $(= \epsilon L^2 / 2KH)$	2.3
μ_x	X 的自协方差函数	2.1
ξ	无量纲水平坐标 $(= x/L)$	3.1
ρ	无量纲补给强度 $(= L^2 \epsilon / T m = 2\mu)$	3.1
τ	无量纲时间 $(= T t / SL)$	3.1
ϕ	测压水头 $[L]$	2.4
ω	有量纲的周期频率 $[1/T]$	2.1
Ω	无量纲频率 $(= S \omega L^2 / T)$	2.3

编辑说明:

1. 本表原附于书后, 现移于正文前, 以便应用。
2. 本书有些附图, 所用对数及半对数纸规格与我国不同, 故仅缩小示意。
3. 附图曲线形状颇多相似, 为免排版错误, 有的在图角上加了顺序号, 以资识别, 与本书内容并无其他关系。

目 录

符号一览表	I
第一章 绪言	1
第二章 含水层频谱响应的线性理论	3
2.1 时间序列分析中的频谱描述	3
2.2 线性贮水模型	6
2.3 线性化裘布依含水层的分析	7
2.4 拉普拉斯含水层	27
2.5 渗透系数的空间变化	31
2.6 非饱和带	36
2.7 讨论	39
第三章 含水层频谱响应的非线性模拟	44
3.1 潜水含水层分析的物理基础和理论基础	44
3.2 数值模型: 频谱响应的确定性模拟	59
3.3 频谱响应的非线性模拟	69
3.4 小结	93
第四章 资料分析和参数确定	95
4.1 集中参数线性系统谱分析的一般描述	95
4.2 谱估计的计算方法	99
4.3 含水层参数的估算	100
4.4 讨论	124
第五章 结论	126
参考文献	127
附录 A 计算机程序表	132
附录 B 谱的置信区间	143

第一章 绪 言

一般认为,水文现象受复杂的自然因素影响,所以确实不能指望了解它的详情。因此,水文系统的分析常按随机过程来考虑。然而,对地下水流的分析,习惯上却是建立在求解偏微分控制方程这类确定性方法上的。自然变化,诸如地下水补给随时间的变化、相邻水体的水位变化、以及地下水补给和渗透系数的空间变化等,通常只是按平均状态加以处理的。但是自然变化仍然是地下水流的一个重要特征,因为根据水位的波动,有可能推断出含水层的性质。用概率的观点来看含水层管理问题,也是令人感兴趣的。在下述报告中,我们不准备采用确定性方法,而将使用平稳随机过程探讨潜水含水层中天然的随时间的变化,并且研究垂向水流、空间变化以及非饱和带的贮水量等各种影响。

虽然,以往从随机意义上论述地下水系统的分析模型的文章不多,但也有一些与之有关的研究。有些研究的课题就是如何解释地下水位的升降变化,以便评价含水层的性质。1943年雅各布(Jacob)应用加权平均方法研究降水量与地下水补给的关系,从而得出了与地下水位变化的关系。1965年蒂森(Tison)在一篇评论文章中,描述了一种线性贮水含水层模型,其补给输入呈正弦级数。他发现贮水体流出量是补给量变化的函数,而且与含水层的范围和孔隙度有关。在所附的讨论中,蒂森(1965)描述了一个线性化的裘布依(Dupuit)方程的含水层模型,具有呈正弦曲线的河水位边界条件。他发现水位变化(波动)是由边界扰动传播到含水层而产生的,水位变化具有振幅衰减现象,而且在较短距离内短波就趋于消失;他也发现水位变化的滞后时间随着离开河流的距离加大而增加。平德(Pinder)等人1969年采用一种数值模型,从河流的水位变化确定含水层参数。所有这三种情况,都把地下水系统和输入按确定性问题对待,而没有把它们看作是随机性的。

集中参数线性贮水系统是用来表示潜水含水层的最简单的模型中的一种。地下水系统的线性贮水模型已被克赖詹霍夫·范德勒(Kraijenhoff van de Leur, 1958)、杜奇(Dooge, 1960)、范希尔夫加德(van Schilfgaard, 1965)和埃里克逊(Eriksson, 1970)等人用来研究含水层流出量与含水层平均水位。

经典的裘布依近似式提供了一个比较实际的分布参数含水层模型。虽然布鲁克斯(Brooks, 1961)和辛(Singh, 1969)已经推导出特定非线性问题的解析解,但是通过对方程式的线性化求得这种模型的确定性解是具有代表性的方法(Cooper与Rorabaugh, 1963; Glover, 1967; Venetis, 1971; Hall与Moench, 1972)。有几种非线性裘布依方程的数值解法可以应用(Singh, 1969; Horberger等, 1970)。

在某些情况下,含水层性质的空间变化在含水层对各种输入的响应方面具有重要影响。虽然以往没有研究过地下水的随机意义,但是布耶维奇等人(Buyevich, et al., 1969)已经分析了多孔介质中的渗流与随机变化的孔隙度的关系问题。

埃里克逊(1970)和杰克逊等人(Jackson, et al., 1973)已将谱分析用于地下水水位、降水量和温度等时间序列的定性解释方面。

研究目的和范围

本研究总的目标在于发展描述随机性地下水流动现象的分析技术。更明确地说，直接目的在于提出并应用谱分析技术来评价地下水系统，以便利用有关含水层中水位变化的广泛资料。本研究的具体目标如下：

1. 提出潜水含水层频谱响应的线性分析模型，包括不同的含水层轮廓形状的效应；
2. 用频谱响应评价非线性化的效应；
3. 应用理论频谱计算的结果来估算野外条件下的含水层参数；
4. 估算其它因素的频谱效应，如渗透系数的空间变化和非饱和水流。

线性含水层模型的理论分析基础是用傅里叶-斯蒂尔吉斯 (Fourier-Stieltjes) 积分表示的随机函数。偏微分控制方程的解引出各种形状含水层的输入-输出频谱关系式。本研究明显地包括含水层倾斜、地下水径流带厚度、以及垂流流动等效应，并且估计了非饱和带的影响，使用波数域中的谱分析评价了渗透系数空间变化的一些效应。

非线性效应是用有限差分形式的非线性含水层方程的数值模拟来确定的。非线性模拟的谱分析被用来评价频谱域中的非线性效应。

通过堪萨斯州一个地区的地下水位、降水量和河流水位的野外资料的谱分析，说明了线性理论的应用。含水层参数则是通过由野外实测数据所确定的参数与理论的转换函数相比较而确定的。

第二章 含水层频谱响应的线性理论

2.1 时间序列分析中的频谱描述

平稳随机过程 如果一个随机过程的统计量不受时间原点推移的影响, 则此随机过程 $X(t)$ 就称为绝对平稳过程。在特定的情况下, $X(t)$ 的概率密度函数是与时间无关的。就是说

$$X(t) \text{ 和 } X(t+\tau)$$

两个过程对 τ 的任一值都有同样的统计量。但是自然界是否总是存在这种过程, 那是很值得怀疑的。因为应用在时间序列分析中的许多方法都要依据一阶矩和二阶矩, 亦即平均值和方差, 这就可以更切合实际地定义平稳过程的较小的限制标准了。

广义地说, 如果一个过程的期望值为常数, 而且它的自相关只取决于 τ , 则称这个过程为平稳过程。依据概率密度函数 $p(X)$, 有:

$$m_x = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X p(X) dX \quad (2.1.1)$$

对全部 t 和 τ , 则有

$$\mu_x(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)X(t+\tau) p(X) dX \quad (2.1.2)$$

$\mu_x(\tau)$ 为自协方差函数, 它仅为 τ 而非 t 的函数。 $\mu_x(0)$ 即是大家所熟知的方差。

谱分析 全部平稳过程能够表示为复形式, 为

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (2.1.3)$$

这叫做平稳过程的克莱姆 (Cramer) 表达式或随机的傅里叶-斯蒂尔吉斯积分式, 而自协方差的形式 (见 Granger 与 Hatanaka, 1964, 28—29页) 为:

$$\mu(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\phi(\omega) \quad (2.1.4)$$

其中 $Z(\omega)$ 为频率 ω 的傅里叶型复振幅, 这种过程亦称为非相关增量 (non-correlated increments) 过程, 因为它有下列性质:

$$\begin{aligned} E[dZ(\omega_1)dZ^*(\omega_2)] &= 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \\ &= d\phi(\omega) = S(\omega)d\omega & \omega_1 = \omega_2 = \omega \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

与

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} S(\omega') d\omega' \quad (2.1.6)$$

式中的*号表示复共轭。 $\phi(\omega)$ 称为功率谱分布, $S(\omega)$ 称为功率谱密度或谱。利用式 2.1.5,

可将 2.1.4 式记为:

$$\mu(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} S(\omega) d\omega \quad (2.1.7)$$

然后, $S(\omega)$ 可利用协方差函数 $\mu(\tau)$ 的傅里叶变换式求出。因此

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mu(\tau) d\tau \quad (2.1.8)$$

对于一个实数的和不连续的平稳过程, 有

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\mu_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \mu(j) \cos(j\omega) \right] \quad (2.1.9)$$

通常, 对于有限数量的数据, $\{X_t, t=1, 2, \dots, n\}$, 用 $\hat{R}(\tau)$ 估计 $\mu(j)$, 这里

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X_t - \bar{X})(X_{t+\tau} - \bar{X}) \quad (2.1.10)$$

以及

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \quad (2.1.11)$$

而功率谱密度的估计值 $\hat{S}(\omega)$ 可给定如下:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{R}(0) + 2 \sum_{j=1}^n \hat{R}(j) \cos(j\omega) \right] \quad (2.1.12)$$

因为 $\hat{S}(\omega)$ 的这种估值与周期图有关, 而且汉南 (Hannan, 1960) 已经指出周期图并不给出 $S(\omega)$ 的相容估计, 同时它一点也没有修匀。习惯上, 用一组称为“频谱窗”的加权因子去修匀这个估计值。最常用的窗有矩形、巴特利特 (Bartlett)、图基 (Tukey) 与帕曾 (Parzen) 的 (见 Jenkins 和 Watts 著作的 244 页, 实例, 1968)。滞后窗的基底宽度愈窄, $\hat{S}(\omega)$ 的修匀谱的偏离愈小, 然而一个窄的频谱窗却给出一个较大的方差。所以选择频谱窗时, 必须在方差与估计值的偏差之间加以权衡。

交叉谱分析 在直接模拟单变事件时, 广义地说, 二元随机过程 $\{X(t), Y(t)\}$ 如果其一阶矩和二阶矩与时间无关, 则称之为平稳过程。从而

$$\begin{aligned} m_X &= E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X p(X) dX \\ m_Y &= E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} Y p(Y) dY \\ \mu_X(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} X_k(t)X_k(t+\tau) p(X) dX \\ \mu_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} Y_k(t)Y_k(t+\tau) p(Y) dY \\ \mu_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] = \iint_{-\infty}^{\infty} X(t)Y(t+\tau) p(X, Y) dXdY \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

$\mu_{XY}(\tau)$ 为二元随机过程 $\{X(t), Y(t)\}$ 的交叉协方差函数。应用随机的傅里叶-斯蒂尔吉斯积分, 数列 $\{X(t)\}$ 和 $\{Y(t)\}$ 可以表示为下列形式:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \quad (2.1.14)$$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_Y(\omega) \quad (2.1.15)$$

而它们的协方差函数为:

$$\mu_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{XX}(\omega) d\omega \quad (2.1.16)$$

$$\mu_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{YY}(\omega) d\omega \quad (2.1.17)$$

$$\mu_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{XY}(\omega) d\omega \quad (2.1.18)$$

以及

$$E[dZ_X(\omega_1) dZ_X^*(\omega_2)] = \begin{cases} 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \\ S_{XX}(\omega) d\omega & \omega_1 = \omega_2 \end{cases} \quad (2.1.19)$$

$$E[dZ_Y(\omega_1) dZ_Y^*(\omega_2)] = \begin{cases} 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \\ S_{YY}(\omega) d\omega & \omega_1 = \omega_2 \end{cases} \quad (2.1.20)$$

$$E[dZ_X(\omega_1) dZ_Y^*(\omega_2)] = \begin{cases} 0 & \omega_1 \neq \omega_2 \\ S_{XY}(\omega) d\omega & \omega_1 = \omega_2 \end{cases} \quad (2.1.21)$$

μ_X , S_{XX} , μ_Y 和 S_{YY} 分别为数列 $\{X(t)\}$ 和 $\{Y(t)\}$ 的自协方差函数和功率谱。 μ_{XY} 为交叉协方差函数, 而

$$S_{XY}(\omega) = Co(\omega) + iQ(\omega) \quad (2.1.22)$$

称为数列 $\{X(t)\}$ 和 $\{Y(t)\}$ 之间的交叉谱; $Co(\omega)$ 称之为同相谱, $Q(\omega)$ 为转象谱。从方程式2.1.18, 可见交叉谱可由 μ_{XY} 的傅里叶变换求得:

$$S_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \mu_{XY}(t) dt \quad (2.1.23)$$

而在数据的总量有限时, $S_{XX}(\omega)$, $S_{YY}(\omega)$ 和 $S_{XY}(\omega)$ 分别由 $\hat{S}_{XX}(\omega)$, $\hat{S}_{YY}(\omega)$ 和 $\hat{S}_{XY}(\omega)$ 估算。

凝聚、相位与放大系数 凝聚函数 $\gamma^2_{XY}(\omega)$, 与传统的统计分析中的相关系数平方直接相当, 它是两个过程的频率分量之间进行相关的度量, 以下式表示:

$$\gamma^2_{XY}(\omega) = \frac{|S_{XY}(\omega)|^2}{S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)} = \frac{Co^2(\omega) + Q^2(\omega)}{S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)} \quad (2.1.24)$$

相应的相位移(phase difference)则为

$$\theta_{XY}(\omega) = \tan^{-1} \frac{Q(\omega)}{Co(\omega)} \quad (2.1.25)$$

有时也称为过程 $\{X(t)\}$ 和 $\{Y(t)\}$ 的相位谱。相位谱表示两个过程的频率分量之间, 正的或负的滞后时间。

放大系数(gain factor)有时亦称为转换函数的振幅, 按下式确定:

$$|G(\omega)| = \frac{|S_{XY}(\omega)|}{S_{XX}(\omega)} = \frac{\sqrt{Co^2(\omega) + Q^2(\omega)}}{S_{XX}(\omega)} \quad (2.1.26)$$

用来测定不同频率分量的振幅放大率 (amplitude magnification)。关于谱分析的更详细的讨论, 建议阅读时间序列分析的有关论著(例如, Jenkins与Watts, 1968)。

2.2 线性贮水模型

图 2.1 示意的集中参数线性贮水系统, 是一种最简单的能代表潜水含水层的模型。这种模型对地下水位的全部空间变化, 都忽略不计; 并将饱和带的平均厚度 $h(t)$, 只看成是时间的函数。还假设单位面积的流出量能表示为:

$$q = a(h - H) \quad (2.2.1)$$

式中, a 为流出常数 (outflow constant), H 为附近水体的水面标高。于是可用下式表示水平衡:

$$S \frac{dh}{dt} + a(h - H) = \epsilon \quad (2.2.2)$$

式中, ϵ 为补给强度, S 为平均贮水系数。在假定 S 和 a 为常数, 以及 h , H 和 ϵ 在时间上为平稳的前提下, 取方程式 2.2.2 的期望

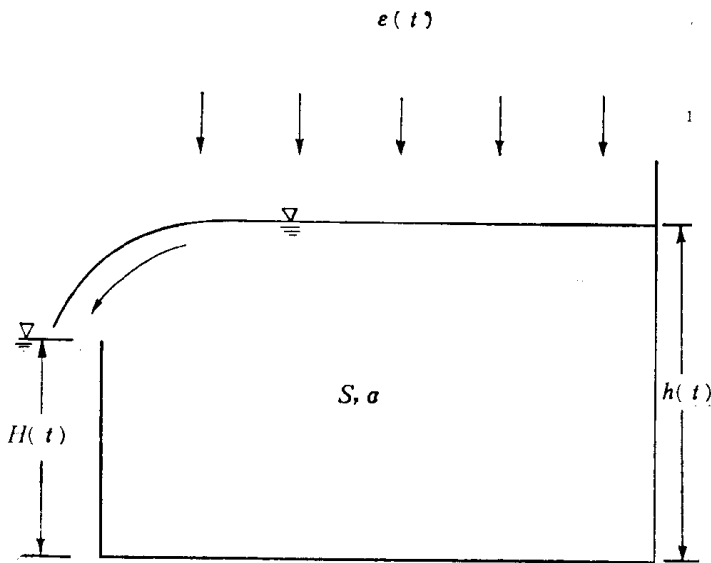


图 2.1 线性贮水系统示意图

值, 得到表示平均值的式子:

$$a(\bar{h} - \bar{H}) = \bar{\epsilon} \quad (2.2.3)$$

而且, 围绕平均数的上下波动, 也满足式 2.2.2, 即:

$$S \frac{dh'}{dt} + a(h' - H') = \epsilon' \quad (2.2.4)$$

因此 h' , H' 和 ϵ' 是平均数为零时的平稳随机过程。省去撇点, 利用式 2.1.3, 得:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_h(\omega) \quad (2.2.5)$$

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_H(\omega) \quad (2.2.6)$$

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_\epsilon(\omega) \quad (2.2.7)$$

将式 2.2.5, 2.2.6 和 2.2.7 代入 2.2.4, 则由下式给出广义的傅里叶振幅:

$$dZ_h(\omega) = \frac{a dZ_H(\omega) + dZ_\epsilon(\omega)}{i\omega S + a} \quad (2.2.8)$$

应用式 2.1.19—21, 则频谱密度函数变为

$$S_{hh} = \frac{a^2 S_{HH}(\omega) + a S_{H\varepsilon}(\omega) + a S_{\varepsilon H}(\omega) + S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)}{\omega^2 S^2 + a^2} \quad (2.2.9)$$

同样，从式2.2.8可以得出输入-输出交叉谱为

$$S_{\varepsilon h}(\omega) = \frac{[a S_{\varepsilon H}(\omega) + S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)](a + i\omega S)}{a^2 + \omega^2 S^2} \quad (2.2.10)$$

$$S_{Hh}(\omega) = \frac{[a S_{HH}(\omega) + S_{H\varepsilon}(\omega)](a + i\omega S)}{a^2 + \omega^2 S^2} \quad (2.2.11)$$

当只考虑单个输入时(例如 $H=0$ 或 $\varepsilon=0$)，比方说 $\varepsilon=0$ ，则式2.2.11可简化为：

$$S_{Hh}(\omega) = \frac{a(a + i\omega S)}{a^2 + \omega^2 S^2} S_{HH} \quad (2.2.12)$$

由式2.1.26，我们可以看出因子

$$\left| \frac{a(a + i\omega S)}{a^2 + \omega^2 S^2} \right|$$

正是放大系数或者由 H 至 h 的转换函数。在对地下水系统进行谱分析时，可以用它来推断含水层参数的数值(此处为 a 和 S)。将这种简单的集中参数分析的结果，与以下各节中用更切合实际的分布系统所得到的结果相比较，是具有重要意义的。

2.3 线性化裘布依含水层的分析

裘布依近似式 裘布依近似式可以说是研究多孔介质中无压水流问题的最权威的方法。它需要假定等势线(在二维情况下)基本上是垂直的，而水流基本上是水平的(见Bear, 1972)。因此，对像图2.2所示的一般情况(完全切穿水流，长度 L 有限)来说，传统的裘布依近似式可导出下列控制方程：

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[Kh \frac{\partial (h + \zeta)}{\partial x} \right] + \varepsilon \quad (2.3.1)$$

式中， $h(x, t)$ ——饱和带的厚度；

x ——水平坐标；

ζ ——含水层隔水底板的高度；

S ——贮水系数；

K ——渗透系数；

ε ——补给强度(假定在 x 坐标轴上是均匀的)。

2.3.1式也可以写成：

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} Kh \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} Kh \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \varepsilon \quad (2.3.2)$$

设 $Kh=T$ (导水系数)和 $\partial\zeta/\partial x=\beta$ (隔水底板的坡度)为常数，2.3.2式可以线性化为

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = T \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \beta K \frac{\partial h}{\partial x} + \varepsilon \quad (2.3.3)$$

其边界条件为 $x=0, h=H$ 和 $x=L, \partial h/\partial x=0$ 。对于平稳随机过程，2.3.3式的均值部分由下式给出：

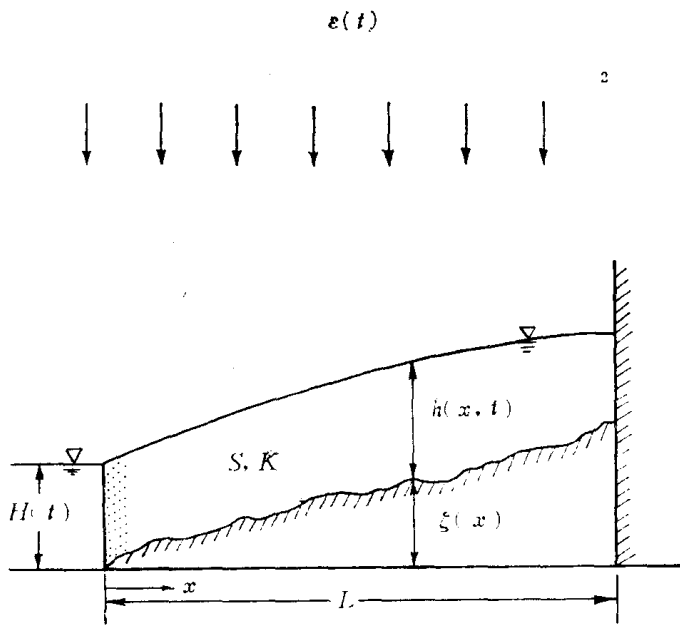


图 2.2 具有任意底板并完全切穿水流的潜水含水层

含水层底板坡度固定时的线性化裘布依分析 利用随机的傅里叶-斯蒂尔吉斯积分式 2.1.3, 我们有:

$$\begin{aligned}
 h' &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_h(\omega, x) \\
 \epsilon' &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_\epsilon(\omega) \\
 H' &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_H(\omega)
 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

将式2.3.6代入2.3.5式, 则有

$$T \frac{d^2}{dx^2} [dZ_h(\omega, x)] + \beta K \frac{d}{dx} [dZ_h(\omega, x)] - i\omega S dZ_h + dZ_\epsilon = 0 \tag{2.3.7}$$

其边界条件为

$$\begin{aligned}
 x=0 & \quad h' = H'(t) & \quad dZ_h(\omega, 0) = dZ_H(\omega) \\
 x=L & \quad \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 & \quad \frac{d}{dx} [dZ_h(\omega, x)] = 0
 \end{aligned}$$

式2.3.7的解为

$$dZ_h(\omega, x) = F(\omega, x) dZ_H(\omega) - [1 - F(\omega, x)] \frac{idZ_\epsilon(\omega)}{\omega S} \tag{2.3.8}$$

式中,

$$F(\omega, x) = \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 L} e^{-\alpha_2 x} - \alpha_2 e^{\alpha_2 L} e^{-\alpha_1 x}}{\alpha_1 e^{\alpha_1 L} - \alpha_2 e^{\alpha_2 L}}$$

$$T \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} + \beta K \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \bar{\epsilon} = 0 \tag{2.3.4}$$

在式2.3.3中代入

$$h = \bar{h} + h'$$

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + \epsilon'$$

$$H = \bar{H} + H'$$

其中带撇号的量表示围绕均值的波动, 减去均值方程式2.3.4, 得控制波动值的方程:

$$S \frac{\partial h'}{\partial t} = T \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \beta K \frac{\partial h'}{\partial x} + \epsilon' \tag{2.3.5}$$

并具有下列边界条件:

$$x=0 \quad h' = H'$$

$$x=L \quad \frac{\partial h'}{\partial x} = 0$$

而

$$\alpha_1 = -\frac{\beta K}{2T} + \sqrt{\left(\frac{\beta K}{2T}\right)^2 + \frac{i\omega S}{T}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{\beta K}{2T} - \sqrt{\left(\frac{\beta K}{2T}\right)^2 + \frac{i\omega S}{T}}$$

于是应用式2.1.4, 2.1.5和2.1.6, 得下列频谱密度函数之间的关系式:

$$S_{hh} = (1-F-F^*+FF^*) \frac{S_{\epsilon\epsilon}}{\omega^2 S^2} - \frac{i}{\omega S} [(1-F)F^*S_{\epsilon H} - (1-F^*)FS_{H\epsilon}] + FF^*S_{HH} \quad (2.3.9)$$

对 $\beta=0$ (即水平的底板) 这种特殊情况,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = (1+i) \left(\frac{|\omega|S}{2T}\right)^{\frac{1}{2}} = b$$

和

$$F = \frac{\cosh[b(x-L)]}{\cosh bL} = \frac{\cosh\left[bL\left(\frac{x}{L}-1\right)\right]}{\cosh bL}$$

式2.3.9可以简化为基尔哈给出的式18(1974)。

值得注意的是, 含水层的底板坡度怎样沿着含水层影响式2.3.9给出的频谱关系。式2.3.8给出的 $F(\omega, x)$ 可以写作:

$$F(\omega, x) = \frac{e^{-\tau L \frac{x}{L}} \left[\xi L \cosh \xi L \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \tau L \sinh \xi L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \right]}{\xi L \cosh \xi L - \tau L \sinh \xi L} \quad (2.3.10)$$

以及

$$I = \tau L = \frac{\beta KL}{2T}$$

$$\xi L = \sqrt{(\tau L)^2 + \frac{i\omega L^2}{\alpha}} \quad \text{和} \quad \alpha = \frac{T}{S}$$

图2.3至2.8上表示的一些曲线, 是沿含水层不同位置上的不同 I 值。由式2.3.9可见, 当 $\epsilon=0$ 时, 函数 $f \equiv FF^* = S_{hh}/S_{HH}$, 从而表征出含水层对河水位变化的频谱响应。同样, 当 $H=0$ 时, $g \equiv (1-F)(1-F^*)/\Omega^2 = T^2 S_{hh}/S_{\epsilon\epsilon} L^4$, 表征出对补给变化的无量纲频谱响应。式2.3.10中的参数 $\Omega = \omega L^2/\alpha$ 是无量纲频率, 而且 L^2/α 可以设想为频率的标度。显而易见, 倾斜底板的一般效应是当频率从河流向外传播时, 高频逐渐衰减。从这些曲线可以看出, 在 $I < 0.1$ 时, 这种效应可忽略不计。这一参数 I 表征了底板的坡度。令 $T = Kh_0$ 和 $\beta L = \zeta|_{x=L}$, 得

$$I = \frac{\beta KL}{2T} = \frac{\zeta|_{x=L}}{2h_0} \quad (2.3.11)$$

式中, h_0 为径流带厚度的空间平均值。又依据稳定流方程式, 有:

$$T \frac{d^2}{dx^2} (h + \beta x) = -\epsilon \quad (2.3.12)$$

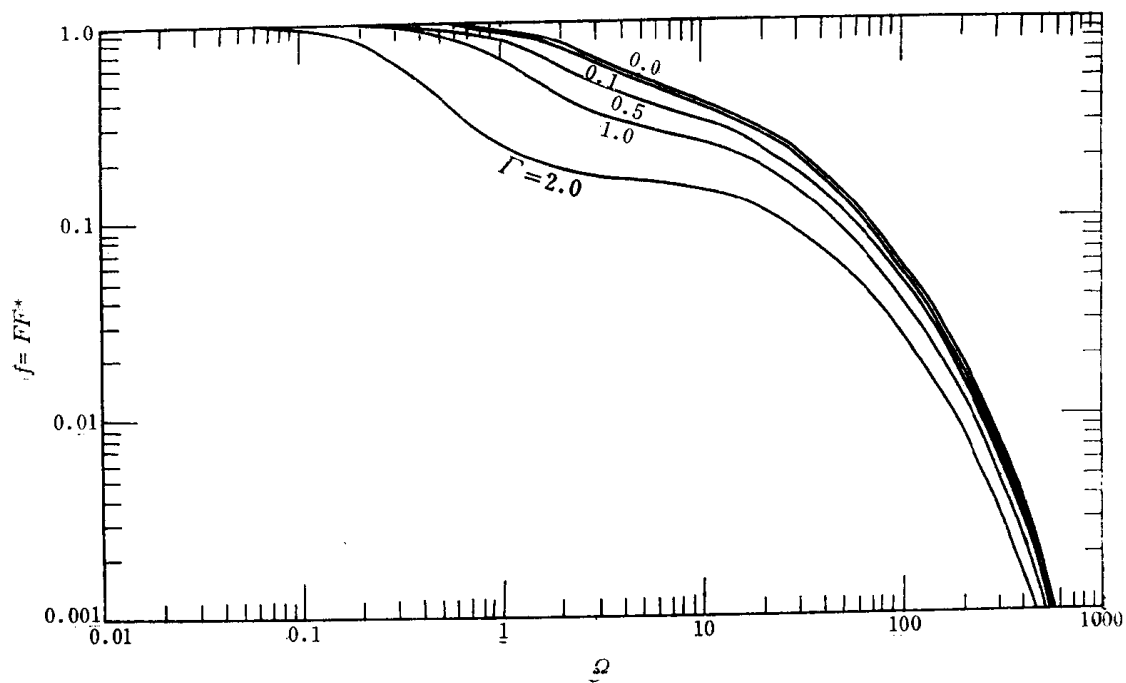


图 2.3 含水层对河水位变化的响应, $x/L = 0.2$ 时不同 Γ 值的 f 曲线

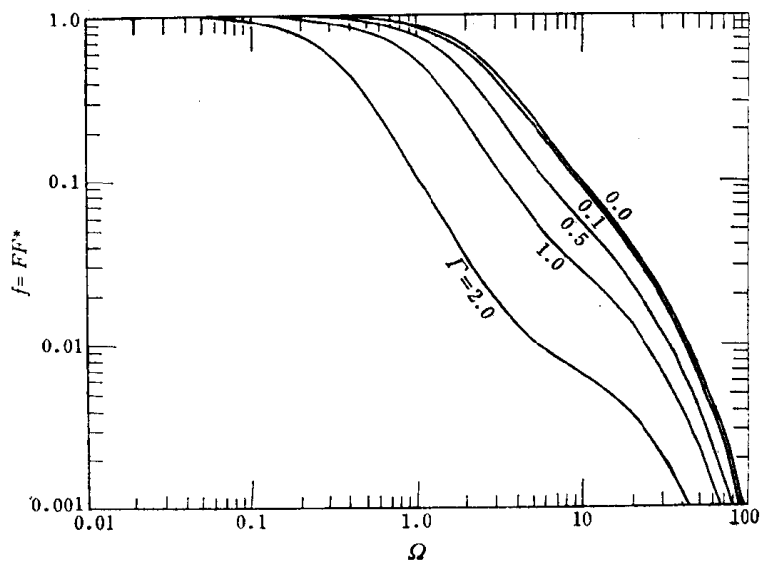


图 2.4 含水层对河水位变化的响应, $x/L = 0.5$ 时不同 Γ 值的 f 曲线