普通高等教育机电类规划教材

运筹学

上海同济大学 沈荣芳 主编

机械工业出版社

前　　言

本书是根据机械部管理工程类专业教学指导委员会1992年10月在天津召开的会议上讨论审定的《运筹学》教学大纲编写成的。本书主要是作为高等院校工业管理工程类专业（本科）运筹学课程的试用教材，也可作为其他相关专业运筹学课程的教材。此外，还可供有关科研、工程技术人员参考。

编写本书的目的是充分吸收已有各种运筹学版本教材的长处，在总结有关院校长期以来在运筹学教学经验的基础上，编写了此本比较系统、全面而且简明的运筹学教材，供有关管理类专业本科生使用。本书以运筹学中的线性规划、网络、决策、存储、模拟等分支作为主要内容，简单地介绍了非线性规划和排队论。本书在编写过程中力求做到理论与实际相结合，注意反映国内外最新的发展情况，并配置了一定数量的习题和部分习题的答案，以利于学习。书中对运筹学各部分的内容作了比较全面的介绍，各专业可根据不同的需要从中取舍。本教材的学时数约为90学时左右。

参加本书编写的有：同济大学沈荣芳、王永安(第一、二、三、四、五、七、十三章)，湖南大学宣家骥(第六、十四章)，同济大学官世燊(第八章)，北京理工大学李金林(第九章)，杭州无线电工程学院俞正明(第十章)，西北理工大学张道宏(第十一章)，哈尔滨工业大学胡运权(第十二章)。全书由沈荣芳担任主编，宣家骥、王永安担任副主编；上海交通大学黄浩纲教授担任主审。北京理工大学洪宝华教授对本书的编写作了许多指导。

由于编写人员水平有限，书中缺点错误在所难免，恳切希望使用本教材的师生提出批评和改进意见。

编者

目　　录

第一章 绪 言

20世纪40年代初期逐步形成了一门新兴的学科——运筹学(OPERATIONS RESEARCH)运筹学应用的面非常广泛，它涉及到工业、农业、建筑业、运输业、商业、城市建设、公用事业和军事等各个方面。本书将着重从工程经济、生产组织、事业规划等方面来讨论运筹学。

一、运筹学的研究对象

工程技术的进步和社会的发展，促进了生产规模的不断扩大；与此同时，工程机构本身的组成也变得非常复杂，机构与机构之间的联系也日益增多。工程机构领导下的各项业务，往往存在着一系列可以选择的措施和做法，有许多技术上可行的方案。如何从中优选，正确决策，是机构负责人必须解决的问题。

运筹学运用近代自然科学的方法，特别是运用数学分析、线性代数、概率论等数学方法，对一个系统中的某些业务问题，从数量方面进行分析和研究，把研究的结果提供给系统的领导人，帮助他(们)对业务作出最优的决策。此外，运筹学还研究如何控制一个系统的业务活动，使其经常处于最优的状态。

上面所指的系统，可以是某一部门中的个别企业或事业单位，或者是某一企业、事业单位中的个别车间或科室；也可以就是一个部门，甚至是国民经济中的几个部门。系统的具体概念常常同研究的具体对象联系在一起。

所谓系统中的业务问题，乃是指具有下述性质的问题，即如何运用系统已有的人力、物力、财力，使之发挥最大的效用，获得最好的效果，或者是如何筹划最少量的、最合理的人力、物力、财力，完成一定量的任务。

运筹学研究系统的业务问题时，总是从问题的数量方面，尽可能地寻求总体最优的方案。此外，它还研究能够及时发现各种不利因素的方法，使系统的业务活动能经常处于最优状态。

由于运筹学研究的目的不是技术上是否可行，而是从量的侧面研究经济上是否合理，因此，在运筹学中运用了各种各样的寻求极大(小)值的数学方法。又因系统涉及的问题常常带有随机性，所以还运用了许多统计理论方面的方法。

近代科学技术的发展往往使解决系统业务问题的可行方案变得很多很多，加上工程规模的日益扩大，必然使问题的求解需要作大量的运算，因此必须借助于电子计算机来完成。近代计算技术的发展与普及，很大程度上克服了计算方面的困难，并且促进和推动了运筹学的进一步发展。

任何工程经济问题的合理解决，首先在于对问题本质的认识，运筹学从问题的数量方面进行分析的结果，只能为系统的领导人对问题进行决策时提供一个依据，或者说作为决策的基础。系统领导人应当在综合考虑问题的各种技术经济条件后，选定最优决策。这对于解决具体的工程经济问题，是非常重要的，而且是必要的。

由于运筹学研究的是具体的工程经济问题，运用的是自然科学的方法和现代计算技术，

因此它是在经济科学同自然科学的边缘上建立起来的一门边缘科学。正因如此，运筹学问题的研究工作，往往需要多方面的科学工作者集体合作进行。

二、运筹学研究问题的几个阶段

应用运筹学解决实际问题时，总的说来，要经历下面几个不同的阶段。

1．问题的形成

开始研究问题时，首先要在各方面的人员配合下，对所要研究的问题进行系统分析。分析这个系统意图是达到各种目的可以选择各种方案，以及正确地选定问题的衡量标准。

2．构造模型

在系统分析的基础上，构造能比较全面地反映该系统目的和衡量其效益的模型。许多情况下，常采用建立数学模型的做法；也有采用模拟(仿真)技术的，个别时还有利用形象模型的。

3．模型的求解

对已经构造好的模型，可以用分析法、图解法、数值法或模拟(仿真)方法来寻求它的最优解。一般地讲，最优解应该反映该系统应当采取的最优决策。

4．模型的考核

为了验证已构造的模型是否能反映所研究系统的目的，模型的最优解是否反映了系统活动的最佳效果，应该利用实际资料对构造的模型和模型的解进行考核，藉以鉴定模型的正确性和有效程度。

5．建立对解的控制

客观条件是经常在变化的，这会影响系统原来选定的最优解的正确性。为了能够及时发现这种情况，使系统的业务活动经常地处于最优状态，需要建立必要的控制措施，以保证模型及其解的正确性。

6．付诸实施

在将研究成果正式付诸于实施之前，还需建立一些模型的简化使用法或近似计算法，包括必要的计算机软件，以便实际工作人员在日常业务中能够有效地加以运用。此外，还应在使用中不断地修改与完善已建立的模型及其解法，以及有关的软件。

为一个系统的各种具体业务问题构造适当的模型和探讨模型的求解方法，是运筹学的主要研究对象。

三、运筹学的主要内容

运筹学根据系统内具体业务问题性质的不同，可以构造成各种不同类型的模型，其中主要有下面几种。

1．线性规划

研究一组非负变量，满足一定的线性约束条件，使某一线性目标函数达到最大或最小值。

2．非线性规划

研究一组非负变量，满足一定的线性与非线性约束条件，使某一线性、非线性目标函数达到最大或最小值。

3．目标规划

研究多个目标的优化

4．动态规划

研究多阶段的最优决策方法。

5．网络计划技术

应用网络形式表达各工作的先后顺序和相互关系，以及计算最短工期等问题。

6．图与网络

利用图形研究若干问题的优化

7．决策论

在一系列有风险的、不确定的因素情况下，选择最优的决策。

8．存储论

研究系统内各种资源、产品等的合理储备量。

9．排队论

研究系统内随机服务机构的合理规模

10．模拟技术

利用计算机对系统的活动进行大量的仿真，获得描述系统性的数量指标，为决策过程提供定量的依据。

11．对策论

研究矛盾的对方，各自选择自己最稳妥、最有利的策略。

此外，也有将设备更新、投入产出分析、预测方法等列为运筹学内容的，也还有将系统论、控制论、信息论等有关方面也列为运筹学内容的。

四、运筹学与其他学科的关系

运筹学与技术经济学、生产组织与计划学有着较为密切的关系。从某种意义上说，它们的研究对象是一致的。一般讲，技术经济学、生产组织与计划学侧重于对问题的本质的研究，而运筹学则是侧重于研究问题的数量方面。正因如此，有时运筹学被称作为“经济研究和计划工作中运用的数学方法”，或“生产组织与计划中的数学方法”。

由于运筹学要研究工农业、商业、建筑业、运输业、城市建设、公用事业和军事等不同行业中许多具体的业务问题，而这些问题与该行业的技术基础、工艺等许多方面都有着直接的关系，因此，运筹学与工农业、建筑业等行业的技术科学也有着密切的关系。

运筹学与近年来发展很快的系统工程学也有着很密切的关系。运筹学常常可为系统工程的研究提供必要的理论基础。

运筹学与计算技术也有密切的关系。后者的发展与成果是运筹学发展的物质基础，它使许多复杂的经济问题，从数量方面进行研究成为可能，并且促使运筹学得到了进一步的发展。

五、运筹学的简史

生产越发展，彼此关联的因素就越多、越复杂，从经济的角度研究一个系统的业务问题时，原有的数学工具已经不敷应用了，客观上需要更多、更有效的数学方法，这正是运筹学出现的客观基础。

最早运用运筹学的方法来解决生产中问题的是苏联数学家康脱罗维奇(Л.В.КАНТОРОВИЧ)教授，他在1939年就提出了以“生产组织与计划中的数学方法”为名的科学报告，创造了线性规划问题的一种计算方法和理论，并因此而得到了首届诺贝尔经济学奖。

运筹学作为一门学科正式地出现是在第二次世界大战期间，当时英美先后集中了一批军事、数学、物理学、化学、心理学、生理学等各方面的专家，组成了运筹学研究组，研究作战活动。战后，英、美、西欧、日本等工业发达国家继续在工业、商业、建筑业、交通运输业、公用事业等各个方面开展了运筹学的研究和运用，逐步形成了运筹学这一门新兴的学科。

60年代后，前苏联等许多东欧国家也广泛地开展了运筹学的研究活动。特别是前苏联的经济学界，对数学方法在经济研究和计划工作中的应用，给予了普遍的重视。

近年来，在许多发达的工业国家中，运用计算机辅助管理已相当普遍。特别是在一些高新技术的管理中，包括计算机系统本身，运用运筹学的方法，通过必要的软件，提高系统的效率，更是常见。

我国古代很早就有了“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”的名言。著名军事家孙膑所提出的赛马策略㊀和宋朝丁谓处理建造宫室的材料和运输的工作方法㊁，都说明我国很早就有了朴素的运筹学思想。

1956年以来，我国陆续地建立了许多专门研究运筹学的科研机构，在运筹学的应用与理论研究方面都取得了不少的成就。现在，我国已经有了一支很大的运筹学工作者的队伍，建立了许多协会组织。可以相信，随着国民经济的发展，运筹学必然会在我国社会主义建设中发挥更大的作用。

六、运筹学的应用

运筹学是一门与生产实践有着密切联系的学科，所以，在学习运筹学的同时，必须注意与生产实践的结合，要从生产实际出发，要注意运筹学理论与生产人员实际经验两者的结合运用，还要注意运筹学模型的精确解法和近似解法的结合应用。

运筹学在我国的运用和研究工作的情况表明，运筹学能够为社会主义建设服务，它是厉行增产节约的有效工具。尽管目前运筹学还比较年轻，实际使用的经验还不够丰富，但是它的迅速发展和应用的经验，证明了运筹学思想的丰富内容。因此，在实际工作中，除了可以运用运筹学的各种正规算法外，更要注意利用运筹学研究问题、解决问题的思路。用其思路来指导和改进我们的工作，也往往会带来很大的效益。

㊀ 战国时候齐国的国王和大夫田忌在临淄赛马，他们各有上马、中马、下马。竞赛分三场进行，每场以千金为赌注。开始拿相同等级的马来比较，齐王的马都比田忌的好，田忌因马力不及屡赌失金。后有田忌门客孙膑献策，以下马对齐王的上马，以上马对齐王的中马，以中马对齐王的下马。结果，田忌两胜一负赢得千金。

㊁ 宋朝丁谓处理建造宫室的材料和运输工作的方法，显然是一种线性规划的雏型。这个故事见于宋代沈括《梦溪笔谈》的记载，据说当11世纪的初年，汴都(今河南开封)的宫室在遭到火灾以后，丁谓负责重建工程。修建工程的泥土，原来要从郊外由旱道运到工地，耗费劳力很大。这时丁谓想出一个办法，就是在工地前面的大街上挖取泥土使用。几天以后，大街被挖成了巨沟，与小河接通了，河水流入沟中，船只直接由汴河驶入工地，于是从四面八方运来的建筑材料，再也不要经过郊区码头起卸，然后用陆运搬到工地的一些繁重手续了。在工程将要结束时，又把废弃的瓦砾、灰土等投入巨沟，平土以后，重新成为大街。由于采用这样的规划，连环地办妥了取土、运输、清除废料和修复街道，节省了很多的人力、物力、财力。

第二章　线性规划

线性规划是运筹学的重要分支。早在1939年，当时苏联的科学家康托罗维奇就提出了生产组织和计划中的线性规划模型，40年代末，丹捷格(Dontzig)提出了线性规划的一般求解方法——单纯形法以后，线性规划的理论和应用都日趋成熟。计算技术的发展和应用、大规模线性规划的研究等更使线性规划在工程技术和工商经济管理等各个领域，得到了广泛应用，并取得了显著效益。

第一节　线性规划问题

本节将通过实例，说明线性规划模型的建立和基本概念。

一、问题的提出

在生产管理和经营活动中，往往会出现两类问题：一类是利用一定数量的资源(人力、物力和财力等)取得最大的经济效益；另一类是在必须完成一定数量的任务前题下，如何合理安排，才能使所耗费的资源最少。通常，前者称为求目标的极大值，后者称为求目标的极小值。实际上，这两类问题是同一问题的两种不同形式，都是要求在资源耗费最小的条件下，获得最好的经济效益。

例1　生产计划问题　某工厂利用甲、乙、丙、丁四种设备生产A、B、C三种产品，具体数据如表2-1所示。A、B、C单位产品的利润分别是4.5、5、7(百元)。问如何安排生产计划，才能使所获总利润最大？

表　2-1　　　　单位：h/件

设备＼产品	A	B	C	设备可供工时(h)
甲	2	2	4	800
乙	1	2	3	650
丙	4	2	3	850
丁	2	4	2	700

解　设产品A、B、C的计划产量分别为x_1、x_2、x_3件；要求所获总利润最大，即要求

$$\text{极大化}\quad z=4.5x_1+5x_2+7x_3$$

生产这些产品需在设备甲上加工$2x_1+2x_2+4x_3$(h)，而设备甲共有800h可供使用，因此必须满足

$$2x_1+2x_2+4x_3\leqslant 800$$

类似地，对设备乙、丙、丁，分别需要满足

$$x_1+2x_2+3x_3\leqslant 650$$

$$4x_1+2x_2+3x_3\leqslant 850$$

$$2x_1+4x_2+2x_3\leqslant 700$$

此外，产品的数量不可能小于零，即$x_j\geqslant 0$（$j=1$、2、3）。以上问题可用数学模型表示为

$$\begin{aligned}\text{极大化}\quad & z=4.5x_1+5x_2+7x_3\\ \text{满足}\quad & 2x_1+2x_2+4x_3\leqslant 800\\ & x_1+2x_2+3x_3\leqslant 650\\ & 4x_1+2x_2+3x_3\leqslant 850\\ & 2x_1+4x_2+2x_3\leqslant 700\\ & x_1、x_2、x_3\geqslant 0\end{aligned}$$

例2 运输问题 设某种物资有m个产地：A_1，A_2，…，A_m，它们的产量分别为a_1，a_2，…，a_m，有n个销地B_1，B_2，…，B_n需要这种物资，它们的销量分别为b_1，b_2，…，b_n。已知A_i到B_j的单位运价是c_{ij}（$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n），表2-2称为单位运价表。设供、销满足平衡条件，即$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$。问怎样组织运输，才能满足要求，且使总运费最少？

表 2-2

产地＼销地	B_1	B_2	…	B_n	产量
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m
销地	b_1	b_2	…	b_n	

解 设x_{ij}（$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n）表示由A_i到B_j的物资运输量，那么总运费为

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

对产地A_i，所运出的数量应等于它的产量，即

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

对销地B_j，所收到的数量应等于它的销量，即

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

运输量不能为负值，即满足

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

综上所述，运输问题的数学模型为

极小化 $$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

满足
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, \quad i=1, 2, \cdots, m$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \quad j=1, 2, \cdots, n$$
$$x_{ij}\geqslant 0, \quad i=1, 2, \cdots, m; \quad j=1, 2, \cdots, n$$

例3 配料问题 要配制一种面包，每只面包要求含甲、乙、丙 3 种营养成分至少各为20、24、30单位。现有 4 种原料可供选用，表2-3给出了每10g原料所含各种营养成分的单位数由表2-3给出。试确定每种原料各取多少，才能使面包的制作成本最低？

表 2-3

营养种类 \ 原料	A	B	C	D
甲	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
乙	3	1	2	$\frac{1}{2}$
丙	3	1	2	4
价格(分/10g)	10	15	30	25

解 可先假设只配制一只面包，数量多时只要扩大相应的倍数即可。从表2-3看到，原料A不论在营养成分的含量还是价格上，都优于原料C，所以，原料C不会被考虑使用。设原料A、B、D各取x_1、x_2、x_4个10g，根据对面包的要求及成本最低的目标，可得问题的数学模型为

极小化 $$z=10x_1+15x_2+25x_4$$

满足
$$x_1+2x_2+\frac{1}{4}x_4\geqslant 20$$
$$3x_1+x_2+\frac{1}{2}x_4\geqslant 24$$
$$3x_1+x_2+4x_4\geqslant 30$$
$$x_1、x_2、x_3\geqslant 0$$

二、线性规划模型

尽管上面的几个例子所表述的问题各不相同，但其数学模型有共同之处，它们都是要求一组变量(称为决策变量)$x_1, x_2, \cdots, x_n$，这组变量全部或者其中一部分具有非负要求，且在这组变量满足一系列线性等式或不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=(\leqslant、\geqslant)b_i, \quad i=1, 2, \cdots, m$$

的条件下，使得一个用线性式所表示的目标(称为目标函数) $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$达到极值(极大或极小)。这一类数学模型所描述的问题，称为线性规划。即线性规划模型的形式为

极大化(极小化) $$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{2-1}$$

满足 $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=(\leqslant, \geqslant)b_i, \quad i=1, 2, \cdots, m \tag{2-2}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \text{全部或部分 } j, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{2-3}$$

式(2-1)是目标函数，式(2-2)称为约束条件，式(2-3)称为非负要求。非负要求也是一种约束条件。目标函数和约束条件必须全是线性式，否则称为非线性规划。

如果一组变量x_1，x_2，…，x_n满足式(2-2)和式(2-3)，则称$x_1, x_2, \cdots, x_n$为线性规划的可行解；因$X = (x_1 x_2 \cdots x_n)^T$表示$n$维空间的点，因此，可行解$X$又称可行点；在具体问题中，例如在例1中，$x_1$、$x_2$、$x_3$表示一个生产方案，所以又称可行方案。由线性规划的全体可行解所构成的集合，称为线性规划的可行解集合或可行域。如果$X = (x_1 x_2 \cdots x_n)^T$不但是可行解，而且使得目标函数达到了极值，那末，$X$称为线性规划的最优解，所对应的目标函数值称为最优值。如果不加以特别说明，我们说线性规划的解，总是指最优解。

为了表述方便及深入研究线性规划，线性规划模型式(2-1)～式(2-3)可表为矩阵和向量的形式

极大化(极小化)
$$z = CX \tag{2-4}$$
满足
$$AX = (\leqslant, \geqslant) b \tag{2-5}$$
$$X \geqslant 0 \tag{2-6}$$

或者表示为

极大化(极小化)$z = CX$ (2-7)

满足 $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = (\leqslant, \geqslant) b$ (2-8)

$X \geqslant 0$ (2-9)

其中

$$C = (c_1 c_2 \cdots c_n)$$
$$X = (x_1 x_2 \cdots x_n)^T$$
$$b = (b_1 b_2 \cdots b_m)^T$$
$$p_j = (a_{1j} a_{2j} \cdots a_{mj})^T, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} = (p_1 p_2 \cdots p_n)$$

第二节 图 解 法

当线性规划的变量个数$n = 2$时，能够在平面直角坐标系中，利用图解法直观地求解。虽然在应用中，图解法没有实际意义，但通过图解法可以形象地说明线性规划的许多特征。

例4 求解线性规划

极大化
$$z = 600x_1 + 700x_2$$
满足
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 160$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 120$$
$$3x_1 + x_2 \leqslant 300$$
$$x_2 \leqslant 60$$
$$x_1、x_2 \geqslant 0$$

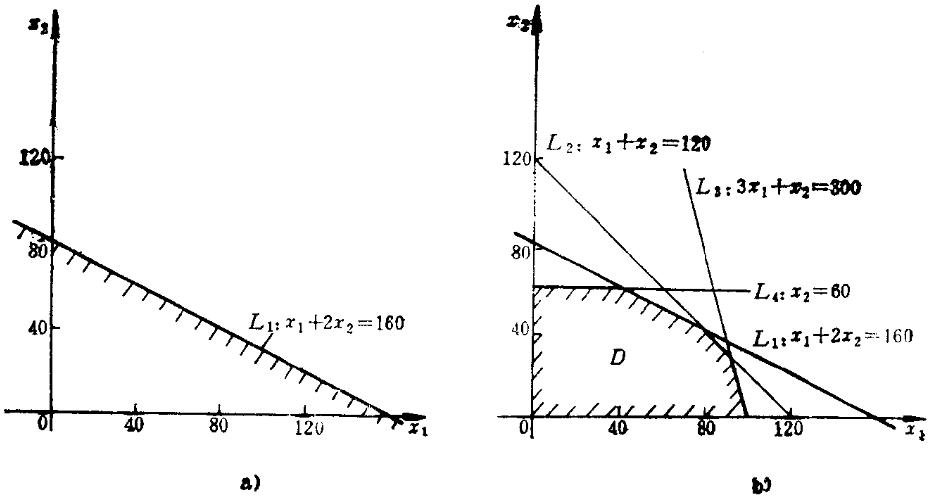

图 2-1

解 在以x_1、x_2为坐标轴的平面直角坐标系中，将线性规划的可行域表示出来。先考虑约束条件$x_1+2x_2\leqslant 160$。在图2-1中，等式$x_1+2x_2=160$表示直线L_1；严格不等式$x_1+2x_2<160$表示以L_1为边界的左下半平面(图2-1a中有阴影部分)，于是，约束条件$x_1+2x_2\leqslant 160$表示以直线L_1为边界的、含边界在内的左下半平面。类似地，能够确定约束条件$x_1+x_2\leqslant 120$、$3x_1+x_2\leqslant 300$。$x_2\leqslant 60$所表示的区域，它们是分别以L_2、L_3、L_4为边界的、含边界在内的半平面。变量的非负要求$x_1\geqslant 0$、$x_2\geqslant 0$表示限定在第一象限。同时满足所有约束条件和变量非负要求的区域D(图2-1b的阴影部分)就是线性规划的可行域。即是说，D(包含边界)中的任何一点，都是问题的一个可行解。现在的问题是要在D中求一个使目标函数$z=600x_1+700x_2$达到最大的点。为此，可将z作为参数，z值的变动，得到一族相互平行的直线(图2-2)，例如$z=0$时，$0=600x_1+700x_2$是经过坐标原点0的直线L，随着z的增大，L沿着箭头所示的方向平行移动，例如$z=42000$时，移动到L'的位置，这就是说，L'与D相交部分上的每个点，都是使目标函数等于42000的可行解，所以，这样的直线L'又称等值线。当直线平移到L^*的位置，L^*与D只有唯一的一个交点$X^*=(80\ \ 40)^T$，这时，$z=76000$(图2-2)。如果再要移动(或者说z值再要增大)，那么与D就没交点了，所以x^*是线性规划的最优解，z^*是最优值。

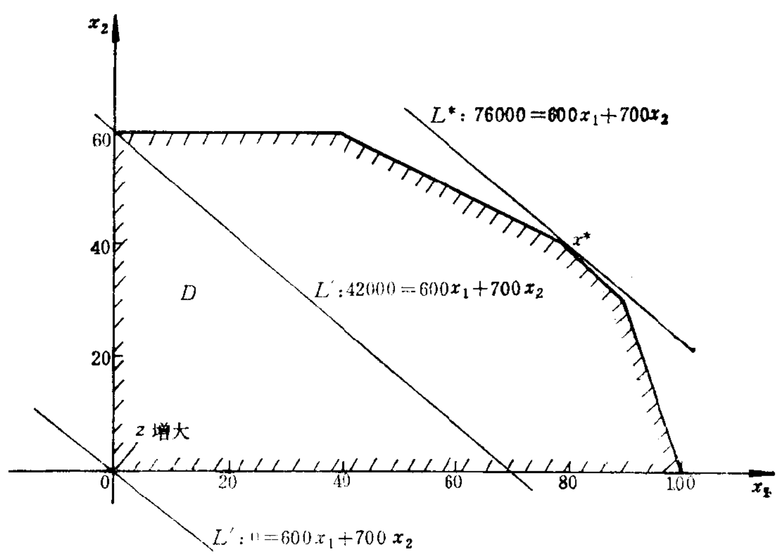

图 2-2

例5 用图解法求解下列线性规划

（1）极大化 $z=2x_1+2x_2$

满足

$$x_1-x_2\geqslant 1$$
$$-x_1+2x_2\leqslant 0$$
$$x_1、x_2\geqslant 0$$

（2）极小化 $z=2x_1+2x_2$

满足

$$x_1-x_2\geqslant 1$$
$$-x_1+2x_2\leqslant 0$$
$$x_1、x_2\geqslant 0$$

解 这两个问题的约束条件相同，其可行域如图2-3所示，这是个无界集。从图2-3中目标函数的等值线看出，无论z有多么大，$z=2x_1+2x_2$总与D相交，这说明目标函数值可无限增大；所以问题（1）无最优解，或者说问题（1）可行而无最优解；但当z减小时，最后目标函数线L^*与D唯一的交点$x^*(1\quad 0)^T$，即为问题（2）的最优解。

例6 求解线性规划

极大化 $z=x_1+x_2$

满足

$$x_1+x_2\leqslant 1$$
$$x_1+x_2\geqslant 2$$
$$x_1、x_2\geqslant 0$$

解 根据约束条件和变量的非负要求，画出各自满足的区域(图2-4)，看到该线性规划的可行域是空集，因两个约束条件是相互矛盾的，所以，问题不存在可行解，当然也无最优解。

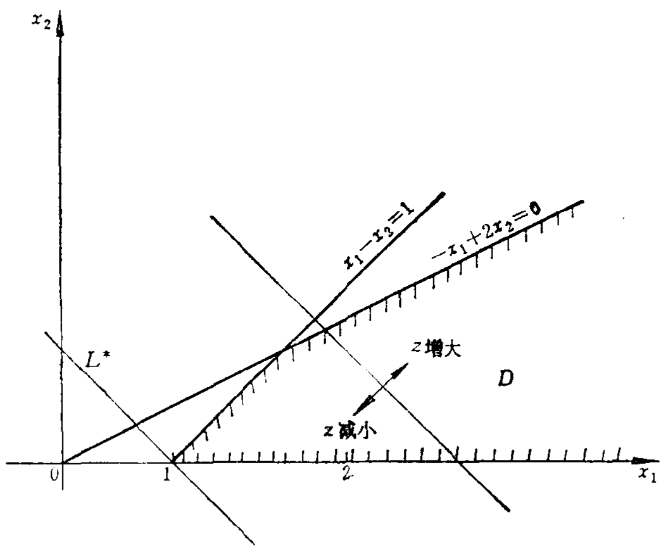

图 2-3

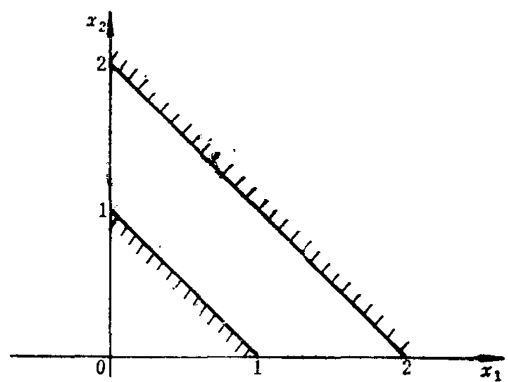

图 2-4

例7 在例4中，如果将目标函数改为

极大化 $z=600x_1+600x_2$

其他条件不变，那么$z=600x_1+600x_2$与直线$x_1+x_2=120$平行，当z从0逐步增大时，

最后将与可行域D的边$x^*x^{(3)}$（$x_1+x_2=120$所形成的边）重合（图2-5）。这就是说，线段$x^*x^{(3)}$上的每一点，都是线性规划的最优解。

综上所述，两个变量的线性规划有以下特点：

1）可行域可能是空集，也可能是有界凸多边形或无界凸区域⊖。

2）当D非空时，D至少有1个极点⊖。

3）当D非空有界时，线性规划一定有最优解，且最优解必在D的一个极点上得到。

4）当线性规划的最优解不唯一时，那末必有无穷多个最优解。

5）如果D无界，那末线性规划可能无最优解（例5（1）），也可能有最优解（例5（2）。

上列各个结论，虽然是由两个变量的图解法得出的，但对决策变量多于2的情形，同样也是正确的。下一节，我们将在理论上加以论证。

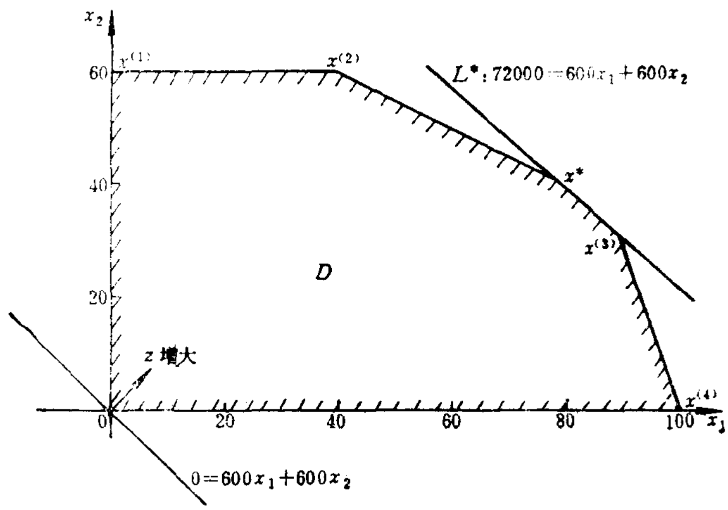

图 2-5

第三节　标准型和解

线性规划的图解法，不能求解变量多于2个的情形。必须寻求可以求解一般线性规划的通用方法。为此，重要讨论线性规划模型的标准型和解的基本性质。

一、线性规划的标准型

从第一节的几个例子看到，线性规划模型有着不同的形式：目标函数有极大化、极小化；约束条件有等式、不等式；决策变量有的有非负要求，有的则没有等。为了能够运用通用的方法求解，必须将不同的形式化为标准的形式，即所谓标准型。本书确定线性规划的标准型满足下列条件：

1）极大化目标函数。

2）约束条件的右端常数$b_i \geq 0$，$i=1, 2, \cdots, m$。

3）约束条件用等式表示。

4）决策变量x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）有非负要求，即线性规划模型是如下形式

极大化　$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$　　(2-10)

满足

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned} \qquad (2\text{-}11)$$

⊖ 关于凸集、凸区域、凸区域极点的概念，可参看第三节。

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{2-12}$$

其中$b=(b_1b_2\cdots b_m)^T$。将线性规划的标准型写成矩阵和向量的形式，即为

极大化 $$z=CX \tag{2-13}$$

满足 $$AX=b \tag{2-14}$$

$$X\geq 0 \tag{2-15}$$

或者表示成

极大化 $$z=CX \tag{2-16}$$

满足 $$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n=b \tag{2-17}$$

$$x_j\geq 0, \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{2-18}$$

其中：
$$C=(c_1c_2\cdots c_n)$$
$$X=(x_1x_2\cdots x_n)^T$$
$$p_j=(a_{1j}a_{2j}\cdots a_{mj})^T, \quad j=1, 2, \cdots, n$$
$$A=(a_{ij})_{m\times n}=(p_1p_2\cdots p_n)$$

二、化标准型

下面讨论怎样将一个一般的线性规划模型化为标准型。

1）如果目标函数为“极小化$z=CX$”，因

$$\min\{z\}=-\max\{-z\}$$

所以可令$z'=-z=(-C)X$，目标函数变为“极大化$z'=(-C)X$”，z'值的相反数就是所求目标函数值。

2）如果有$b_i<0$（$1\leq i\leq m$），那末将这个约束的两边同乘(-1)，便得$(-b_i)>0$。

3）如果第k个约束条件为

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n\leq b_k$$

那末增加一个非负变量x_{n+k}，使上述约束成为

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n+x_{n+k}=b_k$$

x_{n+k}称为松驰变量；如果第s个约束为

$$a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n\geq b_s$$

那末引入一个非负变量x_{n+s}，使该约束成为

$$a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n-x_{n+s}=b_s$$

x_{n+s}称为剩余变量。有时，松驰变量和剩余变量通称为松驰变量。

例如在第一节例1中，约束条件$2x_1+2x_2+4x_3\leq 800$表示甲设备对产量的限制，增加的松驰变量$x_4\geq 0$，使约束条件成为

$$2x_1+2x_2+4x_3+x_4=800$$

x_4的意义表示生产了产品A、B、C各x_1、x_2、x_3件后，设备甲尚有x_4工时的“宽松”，“宽松”的工时没有创造价值，所以x_4在目标函数中的系数为零。类似地，剩余变量在目标函数中的系数也是零。

4）如果决策变量$x_j\leq 0$，那么用$x_j'=-x_j$代入目标函数和约束条件中，这样就有$x_j'\geq 0$；如果决策变量x_s无非负要求，那么用两个有非负要求的变量x_s'和x_s''的差代替x_s，即$x_s=x_s'-x_s''$，代入线性规划模型中，使变量都有了非负要求。

例8　将线性规划化为标准型

极小化 $z=5x_1-2x_2+3x_3-6x_4$

满足

$$x_1+2x_2+3x_3+4x_4\leqslant 18$$
$$2x_1+x_2+x_3+2x_4\geqslant 10$$
$$3x_1-x_2-2x_3+x_4=-6$$
$$x_1、x_2、x_4\geqslant 0，x_3\text{无非负要求}$$

解 令$z'=-z=-5x_1+2x_2-3x_3+6x_4$，成为"极大化$z'$"，第一个约束条件增加松驰变量$x_5$，第二个约束条件添加剩余变量$x_6$，第三个约束条件两边乘$(-1)$，并令$x_3=x_3'-x_3''$，其中$x_3'$、$x_3''$都有非负要求。于是，得到线性规划的标准型

极大化 $z'=-5x_1+2x_2-3x_3'+3x_3''+6x_4+0x_5+0x_6$

满足

$$x_1+2x_2+3x_3'-3x_3''+4x_4+x_5=18$$
$$2x_1+x_2+x_3'-x_3''+2x_4\quad -x_6=10$$
$$-3x_1+x_2+2x_3'-2x_3''+x_4\quad =6$$
$$x_1、x_2、x_3'、x_3''、x_4、x_5、x_6\geqslant 0$$

三、线性规划解的基本概念

以后凡不加以特别说明，线性规划模型都指标准型。即式(2-10)～(2-12)的形式，且满足$m<n$，约束方程组式(2-11)的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$R(\boldsymbol{A})=m$。

1．基本解

线性规划模型表明，求解线性规划，实质上是求解具有特殊要求(变量非负及目标函数值达到极大)的线性方程组。因为$m<n$，$R(\boldsymbol{A})=m$，所以约束方程组有无穷多解。设B是A的一个非奇异的m阶子阵(即$|\boldsymbol{B}|\neq 0$)，则称$\boldsymbol{B}$是线性规划的一个基。不妨设$\boldsymbol{B}$是由$\boldsymbol{A}$的前m个向量组成，即

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_m)=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1m}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2m}\\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mm}\end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{p}_j=(a_{1j}a_{2j}\cdots a_{mj})^T$，$j=1,2,\cdots,m$，称为基向量，与基向量$\boldsymbol{p}_j$相应的变量$x_j$称为基变量；其他的向量和变量称为非基向量和非基变量。

将约束方程组表示为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{im}x_m=b_i-a_{im+1}x_{m+1}-\cdots-a_{in}x_n$$
$$i=1,2,\cdots,m$$

令非基变量$x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，则由

$$\boldsymbol{p}_1x_1+\boldsymbol{p}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{p}_mx_m=\boldsymbol{b}$$

能够得到唯一一组解

$$x_i=\bar{b}_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$

连同后面的$n-m$个0，构成了约束方程组的一个解

$$\boldsymbol{X}=(\bar{b}_1\bar{b}_2\cdots\bar{b}_m\ 0\ 0\cdots 0)^T$$

在$\boldsymbol{X}$中，非零分量最多为m个，$\boldsymbol{X}$称为对应基$\boldsymbol{B}$的基本解。由此可知，线性规划的每个基都对应一个基本解。因$\boldsymbol{A}$的非奇异的m阶子阵最多有

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$