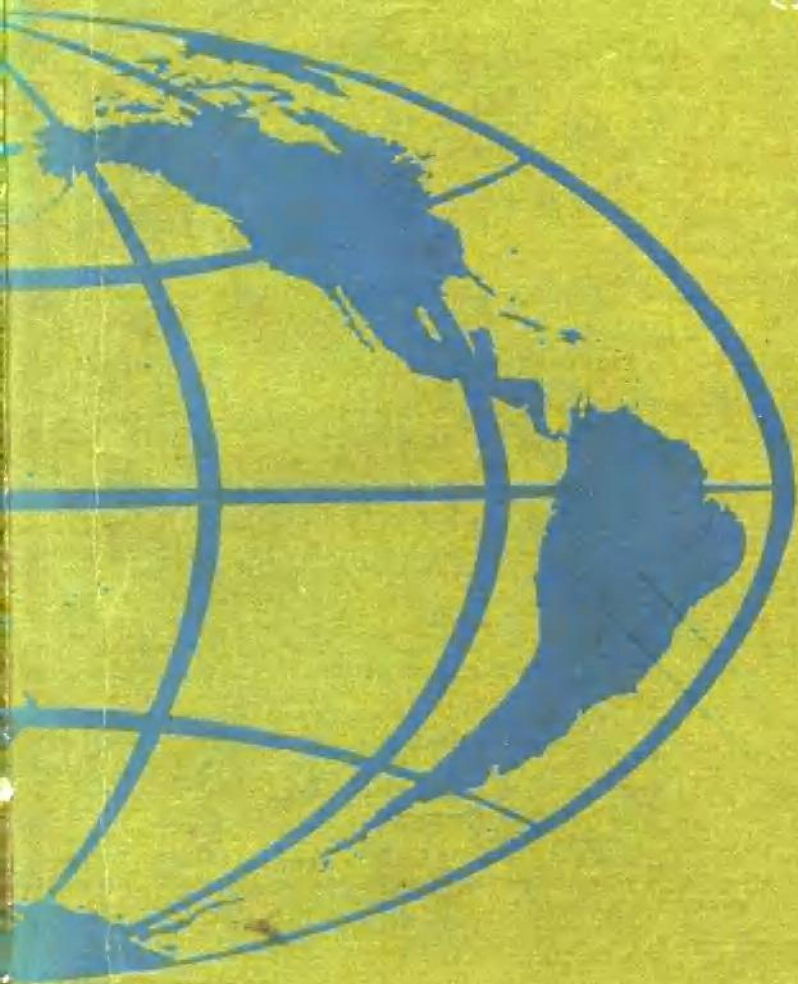


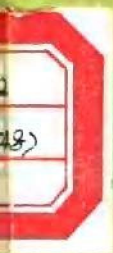
地球

— 它的起源和物理结构

[英] H. 杰弗里斯 著



科学出版社



55.52
334(178)
p

地 球

—它的起源和物理结构

[英] H. 杰弗里斯 著

张焕志 李致森 译

劳秋元 校

科 学 出 版 社

1985

851520

内 容 简 介

本书是根据英国剑桥大学出版社出版的哈罗德·杰弗里斯著的《The Earth》第六版译出。全书共十二章。第一章,岩石的力学性质;第二、三章,地震波理论和观测地震学;第四、五章,地、月形状的理论及其实际形状的分析;第六章,地球内部的应力差,即偏离流体静压的程度;第七章,地球的章动、固体潮和自由振荡;第八章,地球浅海区和行星内部的潮汐摩擦及弹性缺陷;第九章,地球的年龄;第十、十一章,地球的热史和地表特征的起因:收缩理论与观测比较;第十二章,地震的前震和余震、地极移动和大陆漂移等几个专题。

本书以文字叙述为主,既考虑了专业又照顾了非专业、数理基础好与差的人员的需要。因此对于天文、地学(地震,地质,地理,大地测量和重力,地球物理,岩体力学)方面的研究人员以及从事科普方面的作者和大、中学校的师生都有参考价值。

H. Jeffreys

THE EARTH

Its Origin History and Physical Constitution

Sixth edition

Cambridge University Press Cambridge London, New York, Melbourne, 1976

地 球

——它的起源和物理结构

〔英〕H. 杰弗里斯 著

张焕志 李致森 译

劳秋元 校

责任编辑 周文辅 邵正华

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1985年9月第 一 次印刷 开本:787×1092 1/16

1985年9月第一次印刷 印张:28 插页:1

印数:0001—3,000 字数:648,000

统一书号:13031·2964

本社书号:4020·13—14

定价:6.00 元

第 六 版 前 言

全书的内容都作了扩充。主要的变动如下：

(1) 重新确定了月球的力学椭率，看来它象一个近于均质的球体。

(2) 重订了 14 个月章动的阻尼。给出了木村 (Kimura) 项的若生 (Wako) 解释。

(3) 讨论了有关月球运动的长期加速和地球自转的新数据，三种被认为最不容易受迄今尚未考虑过的摄动的影响的测定结果似乎相当一致；它们与由化石资料得到的结果也是吻合的。

(4) 在本版中，大大增加了有关在目前状态下地球的对流、大陆漂移和板块构造学的否定论据。

(5) 更充分地描述了在前面各章中用以导出结论的统计学方法。

我的夫人在校订本书时给予我很大帮助，并修正和增补了参考书目和名词索引。

我应该感谢剑桥大学出版社的工作人员，由于他们的盛意和耐心，从而使本书在五十年中得以一再重版。

H. 杰弗里斯

于圣·约翰学院

1974 年 12 月 4 日

第五版前言

在第五版中我对内容作了大量的增补。通过对人造地球卫星的轨道运行的研究,至少定出了重力位中 8 次以内的带形和田形谐函数,它表明地球的形状与流体静态理论有一定差异;以前对其偏离均衡态的程度以及对深部的物质强度的估计值大体上已得到肯定。

我很重视弹性缺陷的 Lomnitz 定律及其稍加修正的形式。它阐明了许多以前难于理解的事实,最突出的是月球的自转速度与其过大的椭率的持久性的协调问题。它还说明目前状态下的地球不会发生对流和大陆漂移,尽管前者为早期流体状地球形成大陆方面提供了一种最接近于完满的理论。许多特性(比如放射性物质的向上集中)似乎都说明了早期的流动性。

新近的研究确定,地震波的走时具有虽然微小但肯定存在的地区性差异。地球整体的自由振荡的研究对地球的力学结构提供了有意义的检验。它们的阻尼、自由章动和面波的阻尼给出了弹性缺陷随深度分布的资料。

本版还对太阳系一些常数的最新修订结果作了阐述,并收集了修订的结果。

当编写本书头两版时,用 Jeans 的太阳系起源理论稍作修改似乎就足可确立一种地球物理学论据了。当撰写第三版时,对于略去了宇宙演化学的大部分内容,我是持充分的怀疑态度的。但更新的研究采用了另一些我认为不见得更好的理论,故我已补写了一节,说明为何我认为没有一种理论是令人满意的。可是,由于地球年龄的估计值已增大,因此,即使地球最初是冰冷的,地史早期的 ^{40}K 和 ^{235}U 的放射性所产生的热也完全可以使地球熔化。

另一些贯穿全书的实质性改变就是,弹性球的动能和位能的显式是按以下方式给出的,即我们应该很容易根据瑞利原理算作微小改正。

本版的修订工作大部分完成于我同时在美国南方教会大学和得克萨斯州达拉斯市的西南高级研究中心供职期间,我对该两单位的同仁,尤其是 J. E. Brooks, A. L. Hales 和 M. Landisman 几位教授给我的大力帮助表示感谢。Stoneley 一如既往地向我提供了资料。我已经采纳了 M. Ewing, F. Hoyle 等教授的有益指正。

我借此机会向近些年对我的同事及我本人提供过经费的各个机构表示谢忱:华盛顿卡内基学会;H. O. Wood 地震学奖金会;美国空军空间研究部(AFOSR 特许证 62.303);空军坎布里奇研究实验室(合同 AF 19 (604)-7376, Vela-Uniform 计划);美国航空与航天局(特许证 NGR445.63 和 NGR 33.008.037);为卓越的外国科学家设立的国家科学基金会;约翰·西蒙·古根海姆基金组织(地核研究补助金)。

曾帮助过我的合作者有 M. Shimshoni 博士, E. P. Arnold 博士和 M. L. Gogna 博士。

著 者 说 明

章节编号 本书各节的编号是采用十进制;对任意两节,序数低的排在前面.节号的整数部分是章号.各节内的方程式按累计编号,有时也把几个密切有关的节段联合起来给它们的方程式统一编号.在互相引用的情况下,若引用的是本节内的某一方程式,则只给出方程式的序号;但如引用前、后节中方程式时,章节号与方程式号一并写出,如:14.61(3).

文献 由于在本书中经常有许多资料引自同一文章或专著,把它们编成一套参考书目和作者索引附于书后就可减少无谓的重复.编目方法近似于皇家协会的系统,它与哈佛编目系统略有不同.这些系统的突出优点是,通过把年代放于著者之后来确定一篇文章,有助于让读者判断一篇文章的结果是否可能在其它文章中讨论过——1927年的一篇文章不可能使用1938年发表的结果.另一方面,了解一篇文献的页数总是有益处的,这些系统却没有对这个项目作明确的规定;为此,我给出了文献的起止页码.比如,读者也许想知道一下某篇文献究竟是一全面的讨论,还是一简要的提示,或者是一段摘要.当文献是专指某文章中某一页时,我便标出它在文章中的页码;这样一来便不必为了其中某一段讨论的问题而去翻阅一篇40页的文章了.在没有这一页码标志时就是认为整篇文章全应参考.

我未把年代标以括号.经过多年的实践,英国科学技术促进协会数学用表委员会及其继任者,还有皇家学会的相应委员会已经发现,在各项之间留以表示应该注意的空白,会更为清晰可读.年代上加括号反而会耽误阅读的时间.在几篇文献同属一个作者的情况下,作者的名字不作重复.为识别一篇文章,必须首先标出作者的姓名,然后是年代;下一步就容易了,当读者看到下面一系列以年代开头的文献时,就无需再看其内部便可断定它们的作者是同一人,显得更醒目.在一本物理常数表中引用某物质性质的各种测定值时,绝不会有人想要重复它的名称.

由于这两种按实践经验推荐的新方案有利于降低印刷成本,故推荐它们更广泛地采用看来是合适的.

文献编号的方法是不理想的,因为如果想新插进一篇,就需要重新编排,以至花费无益的劳动并且容易出错.

近似符号 $\sim$ 用之于 Poincaré 含义的渐近等号.

O 和 o 的含义同一般数学习惯.但须注意, x 为一小量时的 $y = O(x)$ 仅表示当 $x \rightarrow 0$ 零时, y/x 是有界的——并不需要 y 与 x 具有同样的量级. $a \doteq b$ (读为 a 近似地等于 b) 表示 $|a - b|$ 是一个比 a 或 b 要小的量.至于在有关讲述中需要小到何种程度,这取决于各个不同的问题.

$a \triangleq b$ (读为 a 与 b 是同一量级)是一有用的物理表达式,但并无确切的数学定义.它表明 a 和 b 为同样的大小量级,并且根据我们在计算中的一般经验(即微分方程的解式中高值系数极为少见),它俩中任何一个也不可能超过另一个的10倍.在应用时它通常表

示已将不可能超出 $1/3$ 到 3 之间的一些数值因子取成 1 。它用于确定方程式中的最主要的项,或是验证某些假说是否具有解释某一事实的希望。

$\sim$ 符号用之于物理方面的文章中。提出上述这些定义(均非我的独创)都是为了减少混乱。

$\approx$ 符号事实上不大常用;在假定了粗略计算值的情况下, $\approx$ 即指它们的结果,但在用于实际地球时, $\approx$ 应理解为 $\approx$ 。

译 者 的 话

本书的作者 H. Jeffreys 是一位世界上杰出的科学家。由于他那充沛的精力、娴熟的数学技巧和渊博的知识,使他在科学舞台上演出了一幕又一幕“魔术”,从而成为当今世界上地学界的一名大科学家。他一生的论文多达 300 多篇,论著内容广泛,包括天文、数学、纯物理、地球物理、气象和植物等各方面。从 1915 年(24 岁)起,他先后获得英、美各学会的奖金或奖(勋)章达十次之多,在科学史上是少见的。

《地球》一书是他的许多著作中的一本名著,于 1924 年问世。此后 1929, 1952, 1959, 1970 和 1976 年先后出了第 2—6 版(1962 年第 4 版曾重印),这本中译本是根据第六版译出的。

第六版的篇幅较大,文字十分简练,与其论文及前几版相比重于叙述,这对专业人员(数学基础好的和较差的)、大学生和非专业人员都有重大效益。专业读者除把本书作为范本阅读外最好参考有关文献,特别是他的选集(共六卷)和前五版。非专业读者可以阅读其中自己完全可以领会的章节。书中有十大主题,分十二章,这都是 Jeffreys 曾作过重大贡献的项目。

在研究物体的力学性能时,人们常常提出各种有代表性的流变体,例如,欧几里德固体;巴斯卡(理想)流体;牛顿液体;胡克弹性体;麦克斯韦液体;开尔文固体;标准线性固体;Lomnitz 体等等。在地球力学中,胡克体,麦克斯韦体和开尔文体都常用到。Lomnitz 于 1956 年根据岩石实验提出了以他命名的定律,解释了一些地球物理现象。但是 Lomnitz 定律本身存在一些缺点,Jeffreys 教授根据他自己的实践提出了 Lomnitz 修正律,从而解决了地球的一些实际难题。尽管还有人提出一些非议,我们不妨称它为 Jeffreys 体,用他自己的称呼就是指数后效定律。关于它的适用性,作者已在国际天文学会第 48 届讨论会(IAU Symp. no. 48: Rotation of the Earth)的一篇特邀论文和他与 Crampin 的协作论文中作了概述,必要时读者可详阅。

Jeffreys 的地球物理论文是广泛的。他有许多问题在学生时代就受到 G. H. Darwin 的一些著作的影响。例如,从大陆的形成和放射性物质向地表集中的过程推断地球曾是(或部分)是液态;再从早期(是早期,不是原始期,但至少在十亿年以前)的热状态推断后来的冷却收缩等等,这都是 Darwin 的思想。

在 1914 年左右,Jeffreys 受到太阳系起源的 Jeans 假说(潮汐说)的激励,对太阳系的起源理论发生兴趣。虽然他对 Jeans 理论作了修改,但后来的研究暴露了其中存在一些严重的问题。对现在的太阳系起源问题,国际天文学会及欧美有些研究所常组织专题会议,大家可阅有关论文集。

Jeffreys 毕生对地震波的研究作出了重大贡献,对这一学科的发展了如指掌。本书第三章是很值得我国地震界阅读的。他的研究盛期大概是在三十年代后半期至五十年代,他的 1940 年走时表(杰弗里斯-布伦走时表)已从 1948 年开始用作国际地震资料汇编(I. S. S.)的比较标准。Jeffreys 与 Bullen 和另一地震学家 Gutenberg 是当时发展地震

学的两大支柱。由于后者对地震研究的贡献也十分卓越，许多文献也是值得大家学习的。

关于地球形状一章，作者已基本上用了最新数据，但是由于近 20 年来人卫几何测地和物理测地技术日新月异，建议大家从 *Bulletin de la geodesie* 杂志中了解动态。现已知道，地球是个梨形，北极小而突出，南极肥而凹陷，椭球体的半长轴 $a = 6378160$ 米，扁度 $\alpha = 1/298.25$ ，动力椭率（岁差常数） $H = 1/305.615$ 。北极比椭球面高出 18.9 米，南极凹进 25.8 米。更具体的谐波参数可参考有关文献，例如 *JGR*, 79(35)、(1974) 的专刊或美国的史密逊天体物理台的标准地球模型系列。

Jeffreys 是研究地球内部的应力差和现代章动理论的主要开路先锋。后来，苏联的 Молоденский М. С. 在竹内均 (H. Takeuchi, 1950, *Trans. Amer. Geophys. Union*, vol 31, No. 5, Part 1. pp.651—689) 和他的工作 (Jeffreys H. and Vicente, R. M. N. 117, p. 142, 162, 1957) 的基础上形成了一套较完整的章动理论 (可见 P. Melchior (1966): *The Earth's tides*)。此后的发展和最新理论可见 J. M. Wahr, *GJRS*, 64 (1981), 705—727。

对地球的弹性缺陷和潮汐摩擦的研究也是作者的一大贡献。Newton, R. R. (1968, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 14, 305) 用人造卫星对两种浅海摩擦模式作了检验和讨论，也许此文对大家提高认识会有帮助。

关于地球的热史和表面特征的起因两章在本书中有其共同的内在联系。其基础就是冷却与收缩过程。Jeffreys 并没有反对地球的冷起源学说，他只是说，地球在早期的某个阶段是热的，后来慢慢冷却而收缩，这就与今天慢慢发展起来的热膨胀学派形成了对照，两派都持自己的论点，胜负不易分明。

众所周知，Jeffreys 是大陆漂移和海底扩张的主要反对者。他说，在应力没有超过物质强度时它不会流动（或断裂），这与大陆漂移学说的某些支持者所说的普遍对流论完全不同。有人用人卫测过内部的粘度，结果认为不会流动，有利于 Jeffreys。但是，今天掌握的地磁异常条带和条带年龄似乎是可靠的。我们认为，在靠近表面附近存在一个薄弱的软层（现在已有证据），它存在热致运动是完全可能的。软流沿断层（或叫板缘）向上扩张而驱动板块，这是大陆漂移的概念。Jeffreys 在书中也有类似设想。所以，今天的争论并非绝对不相容的，可能只是人们在讨论问题时取材有所偏向，暂时找不到共同语言而已。至于普遍对流是否存在，我们想，Jeffreys 是有一定道理的，从力学上说他的概念是对的。两派之争与协调无疑是促进科学发展的途径。

总之，《地球》一书是一本不可多得的巨著，它系统地概括了地球的演化和结构这一领域的发展，并高瞻远瞩，承前启后，为我们和后人提供了宝贵的财富。作者论证严谨，态度谦逊，实是科学家之美德，也是我们的榜样。人们常常觉得 Jeffreys 的作品难读，那是因为他考虑问题十分广泛，而论证的问题复杂而又深刻。有时人们想研究某个问题，一看他的书原来他已经考虑过。我们两位译者，为自己能为促进中英两国科学家之间的友谊而高兴。但是，由于我们水平有限，恐仍难免有错，切望读者多多指正。

我们在翻译中得到尹赞勋、傅承义和方俊三位先生的大力支持，对陈运泰、韩天岂，许厚泽等地学的有关同志阅读和修改过我们的译稿，对科学出版社三室的大力协助致以衷心的感谢。

目 录

第一章 岩石的力学性质.....	1
第二章 弹性波理论.....	20
第三章 观测地震学.....	62
第四章 地月形状理论.....	136
第五章 地球和月球的形状——观测资料的讨论.....	180
第六章 地球内部的应力差.....	210
第七章 地球的章动、固体潮和自由振荡.....	228
第八章 弹性缺陷：潮汐摩擦.....	252
第九章 地球的年龄.....	290
第十章 地球的热史.....	308
第十一章 地形特征的成因.....	337
第十二章 几个专题.....	367
附录.....	391
A 临界应力差	391
B 弹性球中的应变	393
C Castigliano 原理.....	403
D 球体的冷却	404
E 长周期潮汐	405
F 需要做的某些地球物理学方面的工作	405
G 统计方法	406
H 术语和单位	409
文献目录和作者索引.....	410

第一章 岩石的力学性质

“迄今,”老丁承认,“这多半还是一种想像。必然,要有许多次尝试,且很少几次能达到最终目的。但即使万里长江也是有其源的”。

Ernest Bramah, Kai Lung's Golden Hours

(凯伦的幸福日子)

§ 1.01. 在研究地球的构成和历史时,我们总要涉及到地球的大小,特别是它的形状的变化问题。因此我们首先应该掌握的物理特性便是弹性。理想弹性体是一门涉及范围很广的理论的研究主题,该理论已为小形变的实验所证实。但当形变量足够大时,不同物质的性状就大不一样。有用的资料主要是实验资料,同样在流变学的一般理论方面也取得了进展。

§ 1.02. 应力、运动方程式 对于各类物质,可用九个分量来定义其内部某点的应力,其中六个是两两相等的。使用直角坐标系 x_1, x_2, x_3 (简称 x_i) 最为方便,此处的 i 角标为 1、2、3¹⁾ 中任一个值。若过一点取一个 x_i 为常数的平面,则作用在平面两侧的物质之间单位面积上、并使 x_i 较小一侧的物质朝 x_k 增大方向位移的力就记为 p_{ik} 应力分量。在弹性和流体力学的文献中业已证明, $p_{ik} = p_{ki}$, 于是运动方程式即为

$$\rho f_i = \rho X_i + \sum_{k=1,2,3} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \quad (1)$$

式中 ρ 为密度;

f_i 为加速度的一个分量;

X_i 为单位质量上的外力(一般即指重力)。

此公式的前提只需假定物质连续,且在研究点附近的加速度不是无穷大。另外,我们还有连续性方程式,它表示某体积元中的质量增长率正好等于流入其中的质量的净得速率。此方程式是:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (2)$$

其中 v_i 为 x_i 方向的速度分量。

全面分析物质是连续的这个假设需要考虑原子理论。这里只简要地指出,方程式中诸值的确定要求达到相当于热运动的准确度。如果体积元内含有大约 10^6 颗原子,温度就要精确地测到 0.1%,并且由于固体或液体的原子间距大小为 10^{-8} 厘米,故只要不用于线度短于大约 10^{-6} 厘米的范围内,就应有希望得到正确的结果。在应力的概念基本上假定原子结构匀滑到如此程度,当我们考虑的线度超过 10^{-6} 厘米的范围时它们能保持实际的质量,动量矩与力。

若我们分析一个其法线的方向余弦为 l_i 的平面,它上面的应力可用 p_{ik} 表示,并可根

1) 对此详尽的讨论可参阅 H. and B. S. Jeffreys (1972, Chapters 2, 3)。

据 x_i 方向上的应力分量为 $\sum_k l_k p_{ik}$ 的方程来求得。尤其是, 当一个表面是自由面时, 也就是有一侧没有任何物质与之接触, 则它上面就不可能发生任何应力, 于是上述三项的和在该表面的任一点均为零。

另外, 还有一个重要的性质。如果我们另引进一组斜轴 x'_j , x_i 与 x'_j 夹角的余弦为 l_{ij} , 诸应力分量相对于此组新轴的值为 p'_{ij} , 其中 i 与 j 可取 1, 2, 3 各值, 并且

$$p'_{ij} = \sum_{k,l} l_{ij} l_{kl} p_{ik}. \quad (3)$$

(角标中的 l 表示坐标轴, 式中的 l 则表示方向余弦。这一点应牢记在心, 切莫混淆) 为了简写, 像 (1), (2), (3) 这类方程的求和符号习惯上予以省略¹⁾。这就是约定, 在一个含有重复角标的表达式中, 该角标应取一切可能的值, 然后将结果累加起来。所以重复角标的出现就意味着累加求和。

按照公式 (3) 变换到新坐标系中的九个分量集合 ω_{ik} 称作二阶张量, 如果它也有 $\omega_{ik} = \omega_{ki}$ 的性质, 则叫作对称二阶张量。这个张量的显著特点是能选出一组坐标轴使角标 j, l 不等的所有分量变为零; 这时, 具有 $j = l$ 的分量就是下述 λ 的三次方程式 (以 p_{ik} 表示典型情况) 的应力的根:

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

这些根全为实根, 并称为主应力。由于 p_{ik} 一般说来因地而异, 故主应力也是如此。我们用 P_1, P_2, P_3 来表示它们。因此, 在某点的任一应力系统都可用三个正交的压力或张力的合力来表示。 P_1, P_2 和 P_3 三个根的平均值也就是 p_{11}, p_{22} 和 p_{33} 的平均值。我们用 $-p$ 来表示它 (因为在我们的问题中它几乎总是负值)。若某点的应力有 $P_1 = P_2 = P_3$, 则称为流体静应力, 因为静止的流体满足这个条件。因此, 常常习惯地把应力看成是由流体静应力 (等于主应力的平均值) 加上部分所谓的偏应力 (张量) 所组成, 后者系应力偏离对称状态程度的量度。其理由是, 任何物质, 甚至连气体也不例外, 在纯流体静压力作用下的性状几乎都是理想弹性的; 密度仅仅取决于作用时的温度和压强, 而与其变化率或过去的作用历史无关, 不论有无偏应力存在, 这种关系都保持不变。对于气体, 它可用波义耳和查理斯 (Boyle and Charles) 定律来表述。然而实际上, 它还与变化率存在着某些不重要的关系 (Liebermann, 1949), 这种关系会使声波产生额外的阻尼, 而且对冲击波还很重要。考虑到这一点, 体积膨胀与平均压强之间的关系式要改为:

$$k \frac{d\Delta}{dt} = \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_1} \right) \left(\frac{1}{3} p_{ii} \right),$$

与表示切变的公式 (30) 类似, 并且 $k\tau_1$ 就像是第二粘性系数一样。对于某些液体, 它大约为普通粘滞率的 100 倍, 所以不论在液体还是在气体中, 它传播时所产生的声波阻尼要比按普通粘性求出的阻尼大很多 (Rosenhead *et al.* 1954)。它的影响, 特别是对冲击波形成的影响已为 M. J. Lighthill (In Batchelor and Davies, eds., 1956) 作了详尽的理论

1) 这时要记住凡角标出现两次的就要对此角标求和, 否则, 不能求和, 有时称为爱因斯坦求和守则。

分析。另一方面,形状变化与偏应力有关,而平均应力只有次级的效应。故此,为方便计,引进一组称为置换张量的值, δ_{ik} , 其定义方程式为:

$$\delta_{ik} = 1 \quad (i = k); \quad \delta_{ik} = 0 \quad (i \neq k). \quad (5)$$

这样一来,偏应力分量就可表示成:

$$p'_{ik} = p_{ik} + p\delta_{ik}. \quad (6)$$

§ 1.03. 转动和应变;液体和理想弹性固体的应力-应变公式 若已知某点的速度及其对参考坐标轴的九个导数,那就可足够准确地决定该点附近的运动。也就是说,我们需要速度分量 v_i 和其导数 $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ 。最好用这些量作如下组合。

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\}, \quad \xi_{ik} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\}. \quad (7)$$

这是因为,当 e_{ik} 到处为零时可以证明,已知质点间的距离没有变化,因而整体便像刚体一样运动;这时转动速度完全由 ξ_{ik} 确定,并且 ξ_{ik} 对整个物体是个常数。假如考虑两个相近的质点,则它们之间距离的变化率仅仅通过 e_{ik} , 取决于速度,故称为应变率。它们同 p_{ik} 一样,构成一个二阶张量。和数 e_{ii} 叫做体积膨胀率,因为借它可定出连续方程式中表达体积相对增率 $-\frac{d\rho}{\rho dt}$ 。

不论固体还是液体, p_{ii} 和 e_{ii} 之间都有一定关系,因为对成分已知的某物质而言, ρ 是由温度和压强决定的。假如变化不大,如同我们所讨论的情况那样,此关系式可写成

$$e_{ii} = \frac{1}{3k} \frac{\partial p_{ii}}{\partial t} + 3\alpha \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (8)$$

其中 k 系一物质参数,叫做体积弹性模量或不可压缩率 ($\frac{1}{k}$ 称为可压缩率), α 为线性热膨胀系数,而 θ 是温度。对当前的问题我们可以忽略温度的变化。

习惯上也把 e_{ik} 分解成膨胀和偏应变张量两部分,它们分别表示体积和形状的变化:

$$e_{ik} = \frac{1}{3} e_{mm} \delta_{ik} + e'_{ik}. \quad (9)$$

对于普通液体(即不是“液晶体”) p'_{ik} 与 e'_{ik} 之间的关系很简单,即

$$p'_{ik} = 2\eta e'_{ik}, \quad (10)$$

其中 η 为粘滞系数。这样我们便得到了应力各分量与应变率诸分量,以及与速度的关系式。将此式代入运动方程式,就推导出速度的微分方程。

所谓各向同性的理想弹性固体,即其 p'_{ik} 的变化率正比于 e'_{ik} 的物体;就是说,存在一个叫做刚度的常数 μ ,

$$\frac{\partial p'_{ik}}{\partial t} = 2\mu e'_{ik}. \quad (11)$$

此式对晶体是不成立的。但对大部分地球体的问题则相当准确。这可能是由于通常岩石由各种不同方向的晶体集合而成的。因而当我们分析如地球物理学所涉及的那种大小的样品时,不同方向性质的差异便给平均掉了。可以推断,在成层的岩石中就并非如此,不过对它们的弹性特点认识得还非常肤浅,对已经了解的那些,至今亦仍未能加以总结。

由于(10)与(11)两式的相似性,在弹性理论中往往认为位于 x_i 的质点原来曾在 $x_i - u_i$ 处,其中 u_i 为位移分量. 假定这些位移分量足够小,以致于其平方和乘积项便可忽略. 于是,在此准确度时有 $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$. 我们可以据此定义一组应变分量

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right), \quad (12)$$

和

$$e_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial t}. \quad (13)$$

现在我们令此物质处于应力为零的初始状态下,同时也无外力. 于是就有

$$p_{ii} = 3k e_{ii}, \quad p'_{ik} = 2\mu e'_{ik}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} p_{ik} &= \frac{1}{3} p_{mm} \delta_{ik} + p'_{ik} \\ &= k e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu \left(e_{ik} - \frac{1}{3} e_{mm} \delta_{ik} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

$$= \left(k - \frac{2}{3} \mu \right) e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu e_{ik}. \quad (16)$$

令
$$\lambda = \left(k - \frac{2}{3} \mu \right). \quad (17)$$

λ 并无专门的名称,引入它是为了简化书写. λ 与 μ 一起确定了物质的弹性特点,统称拉梅 (Lamé) 常数.

另外一种描述弹性的方法是在下述假定条件下推导出来的: p_{11} 已知,而其它应力分量皆为零,这相当于一根纵向受力而四周为自由面的杆. 杆沿 x_1 方向伸长,而在 x_2 和 x_3 方向上则发生相同比例的收缩. 因此,若 $e_{11} = e$, $e_{22} = e_{33} = -\sigma e$, $e_{12} = e_{23} = e_{31} = 0$,则得

$$e_{mm} = e(1 - 2\sigma), \quad (18)$$

$$p_{11} = \lambda e(1 - 2\sigma) + 2\mu e, \quad (19)$$

$$p_{22} = p_{33} = \lambda e(1 - 2\sigma) - 2\mu \sigma e = 0, \quad (20)$$

所以,
$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}, \quad p_{11} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu e. \quad (21)$$

(21)式中 e 的系数叫杨氏模量,用 E 表示:

$$E = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu. \quad (22)$$

σ 为泊松比. 另外, k , λ 和 μ 三个量都可表示成 E 与 σ 的函数. 不过 σ 难于测准,最易测定的量是 E 和 μ . 测量已知张力作用下细棒的伸长便得到 E ,而 μ 是测量施加于细杆两端的力偶作用下的扭转角度而获得的. k 也可用下述方法直接测出. 将一物质的圆柱体放在比它稍大一些的容器中,容器内注满水后用一活塞机给容器加压,水就把流体静压力传递给固体. 这种压强是用浸在液体中的仪器测量的,而体积的变化量亦可知. 液体的压缩性应予以考虑. 这一方法是由哈佛大学的 Bridgman 设计的,而后即为华盛顿地球

物理研究所采用。

如把(16)式代进运动方程,并略去位移的平方项则得到,

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i, \quad (23)$$

式中, $\Delta = \frac{\partial u_m}{\partial x_m}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$ (24)

在不略去位移平方项时的普遍情况已由一些作者进行了研究,其中主要是 F. D. Murnaghan. 照他们的理论,若应力值与 λ 和 μ 为同量级则这些高次项就非常重要了。对实际的物质而言,在相当小的应力的作用下,它们就是很明显的了。在地球物理学中,对处于破裂附近的岩石要考虑这点,因为此时的弹性缺陷较严重。在地球的深部,应力的对称部分与 K 同量级,而偏应力部分则更弱了。一种恰当的近似是假定应力与应变相对初始状态(往往认为是流体静态)的偏离之间存在一种线性关系。

§ 1.04. 弹性缺陷 在流体静应力作用下,弹性缺陷一般是忽略不计的。然而在本节我们主要是讲述偏应力和偏应变部分。大多数固态物质并不是完全理想的弹性体,甚至在应力较弱的情况下也是如此。如果给一细杆施加一个恒定不变的张力,那就会引起其性状发生明显的变异。开始时会发生振动,但它在极短时间内向四周传播而损失能量,所以我们可以忽略它。如果这种张力相当强,细杆就会马上破裂。若所加的张力不强,它便发生初始的伸长,而且精确地与张力的**大小成正比**。对于岩石, D. W. Phillips (1931, 1932, 1934) 已经证明了这一结论。但在大多数情况下,伸长继续缓慢地增加。Phillips 和 D. T. Griggs (1936) 每次的实验时间从数小时到数月不等。一般来说,应变速率随时间而越来越慢;但有时,尤其是在强应力的作用下,这种速率也会再次增高而最终使样品破裂。倘使样品未破裂而将应力解除,则原来的弹性位移会马上全部恢复,但随之发生进一步的变化。因此,物质的性状就有了重要的变异。

对于理想弹性,即使在长时间的应力的作用下,应变也仅仅取决于应力的强弱。应力一解除,物体就立刻恢复原状。

随着与理想弹性偏离的加大可发生下述变异:

弹性后效或粘弹性: 在恒定的应力作用下,应变以递减的速率增长,它可以也可以不趋于某一有限值。当应力一解除,初始应变会立即恢复但应变会进一步递减以至最终降为零。在一种有点变质的糖渍饼干中可看到与之类似的情形。这种饼干可以用手微弯,但松开后,它会徐徐地蠕变回其原始的形状,最后变成我们所看到的那种扁平的样子。人们常常用蠕变这个词来表示这种现象。

弹滞性: 一部分应变当外施应力解除后仍能保留下来,即使在应力解除后很长时间也是如此,但保留的这部分应变并不因为应力持续作用而增大。一个简单的实例便是拧进木头中的螺钉,用木头中的应力是不会把螺钉退出来的,它已由螺钉的摩擦力所平衡抵消。

流动与塑性: 如果应力持续时间足够长,在既定应力作用下的应变可能会或不会无限地增大。应力解除后只有一小部分应变消失。这类物质的典型代表便是泥巴和面团。它与弹滞性的区别是很明显的。在像铜一类的高延展性物质中,只要应力作用时间足够长,应变就会无限地增加。

这种现象一般只有在应力达到该物质的某类特征值之后才会发生。一个铸件在外施应力解除后，仍存在着由重力而产生的应力，然而通常它的表面并不因此而完全展平。

破裂：当破裂发生时物体内的位移分量不再是位置的连续函数。物体就会分裂成二个或更多的且以不同速度运动的部分。在应力分布不均匀的时候，可能产生内破裂，但不延及边缘。

所有这些弹性缺陷都遵从复杂的定律，一般是非线性的，并且对其结果的研究已经受到数学困难的严重限制。不过它们还是可以同一些相当简单的模型联系起来的，借助模型就能提出一个定性的解释。这类模型最早是麦克斯威尔（Maxwell）提出的，并经 J. G. Butcher（1876）定量地表述成应力-应变关系式。固体通常被认为是由两种分子（或分子团）构成的，一类为理想弹性，而另一类则仅能承受对称的压力或张力。前者，当物体保持一恒定变形时，认为会以正比其数目的速率而破坏并转化成后者，所以从整体平均上测到的剪切应力就指数衰减。于是对于恒定的形变分量 ϵ ，剪切应力的相应分量 P 就具有这样的式子：

$$P = 2\mu\epsilon e^{-t/\tau}, \quad (25)$$

式中的 μ, τ 为物质常数。

当 ϵ 变化时，我们可以把连续形变设想为在时刻 $u = t_1, t_2, \dots$ 产生的许多恒定形变来处理，故应力为

$$P = 2\mu \int_{u=0}^t e^{-(t-u)/\tau} d\epsilon, \quad (26)$$

可证它满足下述微分方程式：

$$\frac{dP}{dt} + \frac{P}{\tau} = 2\mu \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (27)$$

另一种方法是把 ϵ 分成 ϵ_1, ϵ_2 两部分，前者按照弹性定律和应力联系起来，而后者则遵从粘性定律，所以有

$$\frac{dP}{dt} = 2\mu \frac{d\epsilon_1}{dt}; \quad P = 2\eta \frac{d\epsilon_2}{dt}, \quad (28)$$

于是，

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_1}{dt} + \frac{d\epsilon_2}{dt} = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{2\eta} P, \quad (29)$$

$$2\mu \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dP}{dt} + \frac{P}{\tau}, \quad (30)$$

其中

$$\tau = \eta/\mu. \quad (31)$$

这个适用于应力和应变所有偏分量的规则称之为弹粘性定律。显而易见，若对理想弹性的问题已得解出，则对弹粘性的相应问题的解可以用下述算子代替 μ 来实现

$$\frac{\mu}{1 + Q/\tau}, \quad (32)$$

其中 Q 为定积分算子，定义是：

$$Qf(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du. \quad (33)$$

假如直到 $t = 0$ 之前应力 P 为零，因而是常数，则(27)式就有

$$\sigma = 0, \quad \tau < 0, \quad (34)$$

$$2\mu\sigma = (1 + \tau/\tau)P(\tau > 0). \quad (35)$$

所以,在 $\tau = 0$ 时的形变就像理想弹性体一样突然增加,但其后则均匀地随时俱增,且增率与应力的大小成正比。这一定律反映了塑性的一种极端情况。不过,它对反映实际物质的性状而言却过于简单了。应变的实际增率并非正比于应力。在某一应力值以下时它一般不很显著,但当在较强的应力作用下时它的增加要比应力快得多。这相当于(27)式中的 τ 随应力的增加而减小,而应力低于某一临界值时则变为无穷大。在这种情况下,若未超过这个临界值,则物体的性状和理想弹性体一样。

这种性状正好相当于把固体看作是由许多在应力不太大时呈理想弹性,而当应力足够强时呈流动性的质块所组成,其过渡对不同的部位所处的应力就不尽相同。这样一来,在应力相当低的时候,仅仅发生弹性位移,而当超过某一应力值之后,将有越来越多的部分开始流动。所以形变速率的增加将比按与应力成正比快得多。这样的结构正相当于在大多数岩石以至金属中常出现的情况。岩石中的较坚实部分大概就是各个晶体,而较弱部分则是它们的分界面;但后者的强度并不都一样。对许多金属,理想的晶体几乎没有什么强度值,在形变过程中才获得它。当应力相当强大时,即使较坚固的部分也会开始流动,因而形变就会无限地增大。但若应力适中,较弱的部分可能自动调整到流体静压状态,而让形变应力完全由那些较坚固的部分去承担。若是如此,位移将趋于一个有限值,其逼近速率决定于脆弱部分的粘滞度。如果应力解除,坚固部分就会力趋恢复其原始状态,在此过程中,引起形变的应力会转移到脆弱部分,从而使之重新流动起来,但方向相反。所以,缓慢的形变还原过程将一直延续到全部脆弱部分中的应力均降至其临界值之下时为止。假如脆弱部分不是绝对地无强度的,则可能产生剩余位移,这样便可解释弹滞现象,而弹性后效现象则可用脆弱部分的粘性来说明的。

这样的结构模型可以帮助理解延迟破裂过程。坚固部分可能就是在足够强应力作用下立刻破裂而不致流动的部分。我们假定外加的应力低于上述值。起初,所有各部分的强度都能承受它。但由于较弱部分会自动调整到流体静压状态,故会有更多的应力转给较坚固部分,如应力增加到足够大时,较坚固的部分就将破裂。

遗憾的是,对于这种定性的论述迄今未能给以定量的表述同时也没有和实验数据进行对比。我们可以立即指出两点。首先,当 μ 值无限而 $\mu\tau$ 有限时弹粘性定律就变成粘性定律。有争议的是,普通流体应该当成刚度无限大的固体,尽管其粘滞度是有限的。例如,对水的情况,其 η 约为 0.01 c. g. s. 单位,而弹性体积模量是 10^{10} c. g. s. 左右。对于固体,刚度一般与体积弹性模量同量级。但若水的刚度为 10^{10} , (27) 式中的 τ 将约为 10^{-12} 秒。于是在检验比 10^{-12} 秒还长的时间中的性状的所有实验中,流动要比弹性形变大得多,因而在应力-应变关系式中插入一弹性项丝毫也不会影响观测结果,根据下述事实还可获得一些关于液体刚性的正面证据:热传导似乎取决于横波的散射;同时,X射线的研究也揭示了液体有结晶结构的迹象。Raman 和 Venkateswaran (1939) 曾将周期为 0.65×10^{-10} 秒的超声波通过甘油,其传布速度肯定高于 $\sqrt{k/\rho}$ 。若认为它相当于 $\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, 则可推知 μ 的量级为 3×10^6 达因/平方厘米,又知甘油的粘滞度为 20 c. g. s., 所以求得的弛豫时间等于 10^{-5} 秒。