高等教育学历文凭考试
全国统一考试课程

高等数学

姚孟臣 编

高等教育
学历文凭考试
全国统一考试课程

北京大学出版社

高等教育学历文凭考试全国统一考试课程

高等数学

姚孟臣 编

北京大学出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/姚孟臣编. —北京:北京大学出版社,
1998.2
ISBN 7-301-03643-4

Ⅰ.高… Ⅱ.姚… Ⅲ.高等数学-高等教育-教材
Ⅳ.013

书　　名:高等数学
著作责任者:姚孟臣　编
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-03643-4/O·409
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话:出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部　62752032
排　印　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850×1168　32 开本　7.125 印张　175 千字
1998 年 2 月第一版　1998 年 2 月第一次印刷
印　　数:0001－3,000 册
定　　价:10.50 元

内 容 简 介

高等教育学历文凭统考课程高等数学是参加学历文凭考试的民办高校工科类与经济类各专科专业学生的公共基础课。本丛书是根据全国高等教育自学考试指导委员会颁发的高等教育学历文凭统考课程高等数学《教学大纲》编写的一套高等数学教学用书，其中包括：主教材《高等数学》以及辅导教材《高等数学(学习指导书)》和《高等数学(同步练习册)》共三册。

本丛书的主教材，供参加学历文凭考试的民办高校工科类与经济类各专科专业师生高等数学课教学使用，其内容包括函数、极限、连续及一元函数微积分等。本书涵盖了有关教学大纲的全部要求，在内容选取上注重科学性和系统性，删除部分繁琐的理论推导，并增补了应用性的内容，使之更贴切教学大纲。本丛书的辅导教材学习指导书和同步练习册是根据有关《考试大纲》的内容和要求编写的。学习指导书在内容讲解和典型例题分析上既注意到科学性和系统性，又有一定的广度与深度，是一本很好的教学辅导材料；同步练习册在每一章给出基本要求、考核知识点之后，逐节地给出了内容提要、题型示例，并配备了大量的练习题。本丛书在附录中分别给出了高等教育学历文凭统考课程高等数学《教学大纲》和《考试大纲》修订稿、1997 年高等教育学历文凭考试高等数学试题及标准答案，并给出了两份模拟试题供有关院校教学辅导时使用。

本丛书适合成人高等专科教育各个专业，特别适用于参加学历文凭考试的民办高校工科类与经济类各专科专业师生的高等数学课的教学与辅导，可作为参加学历文凭考试的工科类与经济类各专科专业师生的高等数学课的教材和学习辅导书。

序

高等教育学历文凭考试是按照《中国教育改革和发展纲要》的要求，由国家对尚不具备颁发学历文凭资格的民办高校学生组织的学历认定考试。它是国家教育考试制度的一个组成部分，同时，也是以学校办学和国家考试相结合、宽进严出、教考分离为特点的全日制高等学校教育。

高等教育学历文凭考试是国家对民办高校的重大扶持措施，也是广开学路、培养人才的重要途径。在北京试点的基础上，现正扩大到辽宁、上海、吉林、福建、陕西、四川、广东等地试点。高等教育学历文凭考试必将成为我国培养适应社会主义现代化建设所需要的各种人才的一支重要力量。

由于高等教育学历文凭考试正处于起步阶段，还没有自己的教材。"高等数学"课程是参加学历文凭考试理、工科类与经济学类各专业的公共基础课，急需一套适合学历文凭考试的《高等数学》教学用书。为此，北京大学数学科学学院姚孟臣等老师根据国家教育委员会制订的高等教育学历文凭考试全国统一考试课程《高等数学课程教学大纲》和全国高等教育自学考试指导委员会制订的高等教育学历文凭考试全国统一考试课程《高等数学课程考试大纲》，编写了高等数学教学丛书一套，其中包括：教材《高等数学》以及辅导教材《高等数学（学习指导书）》和《高等数学（同步练习册）》共三册。

这套丛书的出版，对于学历文凭考试事业的发展，定将起到积极的作用。

潘桂明

1998年1月2日

前　言

高等教育学历文凭考试是国家对尚不具备颁发学历文凭资格的民办高校学生组织的学历认定考试，是国家对民办高校的重大扶持措施，也是广开学路、培养人才的重要途径。在北京试点成功的基础上，现正在辽宁、上海、吉林、福建、陕西、四川、广东等地大范围试点。高等教育学历文凭考试必将成为我国高等教育全面适应社会主义现代化建设对各种人才培养所需要的一支重要力量。

由于高等教育学历文凭考试正处于起步阶段，还没有自己的教材。我们考虑到高等数学是参加学历文凭考试的民办高校工科类与经济类各专科专业的公共基础课，急需一套适合学历文凭考试试点院校使用的高等数学教学用书。为此，我们根据全国高等教育自学考试指导委员会颁发的高等教育学历文凭统考课程高等数学《教学大纲》和《考试大纲》，编写了高等教育学历文凭统考课程高等数学教学丛书一套，其中包括：教材《高等数学》以及辅导教材《高等数学（学习指导书）》和《高等数学（同步练习册）》共三册。

本书是高等数学的主教材，供参加学历文凭考试的民办高校工科类与经济类各专科专业高等数学课教学使用。这本书是在高等教育学历文凭统考课程高等数学《教学大纲》和《考试大纲》所推荐教材《大学文科基础数学（第一册）》（姚孟臣主编，北京大学出版社出版）的基础上改编的。本书涵盖了有关教学大纲的全部要求，在内容选取上注重科学性和系统性，删除部分繁琐的理论推导，并增补了应用性的内容，使之更贴切教学大纲。精选出的内容有一定的广度与深度，较好地体现了国家教委关于成人高等专科教育中“基础理论教育以应用为目的，以必需、够用为度。基础课程的内容应当贯彻宽口径，具有通用性和稳定性”的精神。适合成人高等专

科教育各个专业，特别适用于参加学历文凭考试的民办高校工科类与经济类各专科专业的高等数学课的教学。

通过本书的学习，能够使学生获取函数、极限、连续及一元函数微积分的基本概念、基本理论和基本运算技能，为学习后续课程以及进一步学习数学知识奠定必要的数学基础。在教学中，应当注意培养学生具有熟练的基本运算能力，一定程度的抽象思维和概括能力，逻辑推理能力以及应用所学的知识分析解决简单的实际问题的能力。为此，我们在附录Ⅰ中给出了高等教育学历文凭统考课程高等数学《教学大纲》修订稿仅供有关院校教学时参考。本书在每一节的后面都配有一定数量的习题(书后附有答案和提示)，供学生课后练习使用。书中有的部分内容和习题前面加了“*”号，在使用时可根据本校的教学要求及学时安排等具体情况进行取舍，不作为教学和考试内容的要求。

这套丛书是由北京大学姚孟臣副教授主持编写的，他负责全书的策划和审订，改编了《高等数学》主教材，编写辅导教材各章的知识点和基本要求以及部分练习题。《高等数学(学习指导书)》一书由北京电视大学刘德荫教授编写；北京大学张清允副研究馆员和吴宝科副教授参加了《高等数学(同步练习册)》的编写工作。

北京大学出版社为使本丛书在新学期开学前能与参加文凭考试试点院校的广大师生见面，给予了大力的支持；本书的责任编辑刘勇副编审付出了辛勤的劳动。在此向他们表示感谢。

全国高等教育自学考试指导委员会办公室的有关同志，对本书的出版给予了很大的支持与帮助。特别是潘桂明副主任在百忙中为本书作序，关心本书的出版工作，在此向他们致以最诚挚的谢意。

由于编者水平所限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

1997 年 10 月于北京

目　　录

第一章 函　数

函数概念起源于人类对运动与变化的定量研究,函数是对现实世界中各种变量之间相互关系的一种抽象,它也是微积分学研究的基本对象.因此,函数概念是高等数学中最重要的概念之一.在这一章里,我们将对函数的有关概念进行较系统的学习,为以后各章的学习作好准备.

§1 预备知识

1.1 集合初步

集合是一个不能给出数学定义的概念,尽管如此,我们仍然可以给它一个定性描述.所谓集合就是按照某些规定能够识别的一些具体对象或事物的全体.构成集合的每一个对象或事物叫做集合的元素.例如:

(1) 所有北京大学在校生的全体为一集合;

(2) 方程 $x^3-2x^2-5x+6=0$ 的根的全体为一集合;

(3) 所有自然数的全体为一集合;

(4) 一直线上所有点的全体为一集合.

在上述前两个例子中,每个集合只有有限多个元素,这种集合叫做有限集.后两个例子中所给出的集合不是由有限个元素组成,这种集合叫做无限集.

通常集合用大写字母 A,B,C 表示,其元素用小写字母 a,b,c 表示.

设 A 是一个集合,如果 a 是 A 的元素,记作

$$a\in A;$$

如果 a 不是 A 的元素，记作

$$a\overline{\in}A(\text{或 } a\notin A).$$

例如，变量 x 的取值范围构成的集合 X 叫做变化域，有 $x\in X$.

集合一般有两种表示法：**列举法**和**示性法**. 所谓列举法就是把集合的元素都列举出来. 例如，A 是由 1,3,5,7,9 这五个数组成的集合，记作

$$A=\{1,3,5,7,9\}.$$

也就是说{ }中将 A 的元素都一一列举出来了. 所谓示性法就是给出集合元素的特性. 一般用

$$A=\{a|a\text{ 具有的性质}\}$$

来表示具有某种性质的全体元素 a 构成的集合. 如上述的集合 A 也可以记作

$$A=\{2n+1|n<5,n\text{ 为自然数}\}.$$

由此可见同一个集合可以有不同的表示法，也就是说一个集合的表示法不是唯一的.

只含有一个元素 a 的集合叫做**单元集合**，记为$\{a\}$. 例如常数 c 的变化域就是单元集合$\{c\}$. 换句话说，若变量 x 的变化域是单元集合，则 x 是常量.

不含有任何元素的集合叫做**空集**，记为$\varnothing$. 例如方程 $x^2+1=0$的实数解的解集合就是空集. 把空集合也视为集合，正如我们把 0 也看作数一样，在数学上是方便的. 但是要注意空集$\varnothing$与单元集合$\{0\}$不是一回事.

由所研究对象的全体构成的集合称为**全集**，记作 Ω. 例如当讨论一元线性方程

$$ax+b=0(a\neq 0\text{ 且 } a\text{ 为自然数},b\text{ 为有理数})$$

的有理解集合时，有理数集是一个全集. 需要指出的是全集是相对的. 在一种条件下是全集的集合，在另一种条件下可能就不是全集. 前例中，如果在实数范围内讨论一元线性方程 $ax+b=0(a\neq 0)$的解集合时，那么有理数集就不是全集了.

设 A,B 是两个集合. 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即 $a\in A$ 必有 $a\in B$，那么称 A 为 B 的**子集合**，记作

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A,$$

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$. 这说明了包含具有传递性，例如{自然数}⊂{有理数}，{有理数}⊂{实数}，于是有{自然数}⊂{实数}. 容易看出，对于任意的集合 A，总有 $A\subset A$，$\varnothing\subset A$，$A\subset\Omega$ 成立.

例 1 设 $A=\{2,4,8\}$，则集合 A 的所有子集是 $\varnothing$，$\{2\}$，$\{4\}$，$\{8\}$，$\{2,4\}$，$\{2,8\}$，$\{4,8\}$，$\{2,4,8\}$. 注意，在考虑集合 A 的所有子集时，不要把空集 $\varnothing$ 和它本身忘掉.

设 A,B 是两个集合. 如果 $A\subset B$，$B\subset A$，那么称集合 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

很明显，含有相同元素的两个集合相等.

例 2 设 $A=\{0,2,3\}$，$B=\{x\mid x$ 为方程 $x^3-5x^2+6x=0$ 的解$\}$，则 $A=B$.

设 A,B 是两个集合，称集合 $\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的**并集**，即由 A 与 B 的全体元素构成的集合，记作 $A\cup B$.

例 3 $\{1,2,3,4,5,\}\cup\{1,3,5,7,9\}=\{1,2,3,4,5,7,9\}$.

并集具有以下的简单性质：

(1) $(A\cup B)\supset A$；

(2) $(A\cup B)\supset B$.

设 A,B 是两个集合. 称集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**，即由 A 与 B 的公共元素构成的集合，记作 $A\cap B$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B **互不相交**.

例 4 $\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}=\{1,3,5\}$；$\{1,3,5\}\cap\{2,4,6\}=\varnothing$.

交集具有以下的简单性质：

(1) $(A\cap B)\subset A$；

(2) $(A\cap B)\subset B$.

1.2 实数集

高等数学主要是在实数范围内讨论问题的，因此在这里我们有必要简单地回顾一下实数的一些属性.

人们对数的认识是逐步发展的，首先是自然数 0,1,2,3,….由自然数构成的集合叫做自然数集，记为 $\boldsymbol{N}$，在 $\boldsymbol{N}$ 中我们可以定义加法和乘法的运算. 其后发展到有理数，它包括一切整数(整数的集合用 $\boldsymbol{Z}$ 表示)与分数，每一个有理数都可以表示成$\frac{p}{q}$(其中 $p,q\in\boldsymbol{Z}$且 $q\neq 0$). 我们把有理数构成的集合叫做有理数集，记为 $\boldsymbol{Q}$，在 $\boldsymbol{Q}$ 中我们可以定义四则运算. 下面我们先来介绍有理数的两个性质.

在数轴上，每一个有理数都可以找到一个点表示它. 例如，图 1-1 中的点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 就可以分别代表有理数 $-4,-3/2,1/2,3,5$. 我们把代表有理数 x 的点叫做有理点 x. 由图可见，有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 除了可以在其中定义四则运算外，还具有**有序性**(即在数轴上有理点是从左向右按大小次序排列的)和**稠密性**(即在任意两个有理点之间有无穷多个有理点).

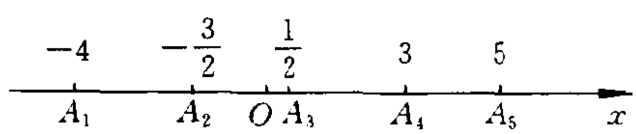

图 1-1

虽然有理点在数轴上是处处稠密的，但是它并没有充满整个数轴. 例如边长为 1 的正方形，其对角线长为 x(见图 1-2)，由勾股定理可知 $x^2=2$. 设在数轴上的点 x 代表的数为 $\sqrt{2}$，容易证明它不能表示成$\frac{p}{q}$($p,q\in\boldsymbol{Z},q\neq 0$)的形式，因此它不是有理数. 这说明在数轴上除了有理点以外还有许多空隙. 这些空隙处的点我们称之为**无理点**，无理点代表的数称为**无理数**. 无理数是无限不循环的小数，如 $\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，π 等，由它们所构成的集合叫做无理数集，

记为 $\boldsymbol{I}$. 我们把有理数与无理数统称为**实数**,全体实数构成的集合叫做实数集,记为 $\boldsymbol{R}$. 与有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 一样,实数集 $\boldsymbol{R}$ 也具有在其中可以定义四则运算,有序的以及处处稠密的等性质,而且还具有一个与 $\boldsymbol{Q}$ 不同的特性,这就是实数的连续性(即实数点充满了整个数轴).

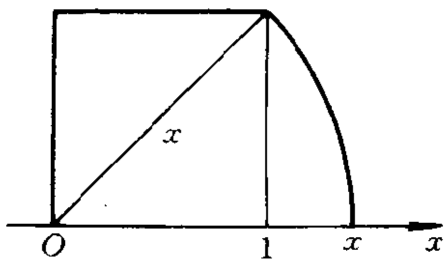

图 1-2

由于任给一个实数,数轴上就有唯一的点与它对应;反之,数轴上的任意一个点也对应着唯一的实数,可见实数集合等价于数轴上的点集. 因此在以后的讨论中,我们可以把点与实数不加区分.

1.3 区间与邻域

在 $\boldsymbol{R}$ 的子集中,我们今后经常遇到的是各种各样的区间. 所谓**区间**就是介于某两点之间的一切点所构成的集合,这两个点称为区间的**端点**. 如果两个端点都是定数,称此区间为有限的,否则称为无限的. 常见的区间有:设 $a\in\boldsymbol{R},b\in\boldsymbol{R}$ 且 $a<b$,我们把集合 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b);把集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$,把集合 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 称为**半开半闭区间**,分别记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$. 以上各种有限区间在数轴上都可以用一条线段来表示它们. 对于无限区间,例如 $\{x|x>a\}$,记作 $(a,+\infty)$;$\{x|x<a\}$,记作 $(-\infty,a)$;$\{a|a\in\boldsymbol{R}\}$,记作 $(-\infty,+\infty)$. 类似地,还有 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,a]$(注意,这里的 $+\infty,-\infty$ 以及 ∞ 只是一种符号,既不能把它们视为实数,也不能对它们进行运算).

设 $x\in\boldsymbol{R}$,x 的绝对值是一个非负实数,记为 $|x|$,其定义为

$$|x|\triangleq\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例如,$|4|=4$,$|0|=0$,$|-3.2|=-(-3.2)=3.2$.

根据绝对值的定义,可知

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|,$$

因此,当 $|x|\leqslant r(r>0)$时,又可以把它写成

$$-r\leqslant x\leqslant r$$

或用闭区间$[-r,r]$来表示. 下面给出绝对值的几个性质:

(1) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$;　　　(2) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$,$y\neq 0$;

(3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$;　　　(4) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

性质(1),(2)由绝对值定义可以直接得到,这里我们只证明性质(3),性质(4)留给读者作为练习.

证明 (3) 由绝对值定义,有

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,-|y|\leqslant y\leqslant|y|,$$

将上述两式逐项相加,得到

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant(|x|+|y|),$$

故有

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

最后我们介绍邻域的概念.

设 $a\in\boldsymbol{R}$,$h\in\boldsymbol{R}$ 且 $h>0$. 称集合

$$\{x\,|\,|x-a|<h\}$$

为 a 的一个**邻域**,记作 $N_h(a)$,其中 h 为邻域半径;称集合

$$\{x\,|\,0<|x-a|<h\}$$

为 a 的一个**空心邻域**,记作 $N_h(\bar{a})$. 当不必指明邻域半径时,我们分别用 $N(a)$,$N(\bar{a})$表示 a 的邻域和 a 的空心邻域. 称集合

$$\{x\,|\,a\leqslant x<a+h\}\text{和}\{x\,|\,a-h<x\leqslant a\}$$

为 a 的右邻域和左邻域,记作 $N_h^+(a)$和 $N_h^-(a)$. 若上述集合除去

a 点,就称为 a 的空心右邻域和空心左邻域,记作 $N_h^+(\bar{a})$ 和 $N_h^-(\bar{a})$. 不必指明邻域半径时,记号中可省略 h.

习 题 1-1

1. 写出集合 $\{1,2,3\}$ 的所有的子集.

2. 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{2,4,6\}$,求

(1) $A\cup B$;　　(2) $A\cap B$;

(3) $A\cup B\cup C$;　　(4) $A\cap B\cap C$.

3. 求下面各小题中集合的并与交:

(1) $A=[0,1]$,　　$B=[1,3]$;

(2) $A=[-1,4]$,　　$B=[2,4]$.

4. 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{4,5,6\}$,则下列运算结果为单元集合的是(　　).

(A) $A\cap B$;　　(B) $B\cap C$;

(C) $A\cap C$;　　(D) $A\cap B\cap C$.

5. 求下面方程的实根:

(1) $|x|=x+1$;　　(2) $|2x+3|=x^2$.

6. 证明不等式: $|x\pm y|\geqslant ||x|-|y||$.

§2　函数的概念

2.1　函数的概念

在初等数学中,我们通过讨论变量之间的依赖关系,给出了函数概念的一个直观的描述:

设在某变化过程中有两个变量 x 和 y,变量 y 依赖于 x. 如果对于 x 的每一个确定的值,按照某个对应关系,y 都有唯一的值和它对应,y 就叫做 x 的函数,x 叫做自变量. x 的取值范围叫做函数的定义域. 和 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值,函数值的集合叫做函数的值域.

例 1 在真空中，物体在重力的作用下，从高度为 h m 处自由下落，下落的路程 S 是下落时间 t 的函数. 这个函数可以通过关系式：

$$S=\frac{1}{2}gt^2, \quad t\in\left[0, \sqrt{2h/g}\right]$$

给出，其中 g 为重力加速度，它是一个常数.

历史上，"函数"一词是由著名的德国数学家莱布尼兹(Leibniz)首先引入数学的. 他是针对某种类型的数学公式来使用这一术语的，尽管当时他已经考虑到变量 x 以及和 x 同时变化的变量 y 之间的依赖关系，但还是没有能够给出一个明确的函数定义. 其后经欧拉(Euler)等人不断修正、扩充才逐步形成一个较为完整的函数概念.

从本质上讲，函数是从一个集合到另一个集合的映射. 即给定两个集合 A 和 B，若对于 A 中的每个元素 a，按照某一对应关系 f，在 B 中都有唯一确定的一个元素 b 与它对应，则称 f 为 A 上的一个函数，记作

$$f: A\to B.$$

集合 A 称为函数的定义域，与 A 中元素对应的 B 中元素 b 构成的集合称为函数的值域.

在函数定义中对定义域 A 和集合 B 中元素的性质没有加以限制，但在微积分中我们感兴趣的是一些定义域和值域均为实数集的函数，这类函数称为实变数的实值函数，简称为实函数. 下面给出它的定义：

定义 设 X 是一个给定的数集，f 是一个确定的对应关系. 如果对于 X 中的每一个元素 x，通过 f 都有 $\boldsymbol{R}$ 内的唯一确定的一个元素 y 与之对应，那么这个关系 f 就叫做从 X 到 $\boldsymbol{R}$ 的**函数关系**，简称为**函数**，记为

$$f: X\to\boldsymbol{R} \text{ 或 } f(x)=y.$$

我们把按照函数 f 与 $x\in X$ 所对应的 $y\in\boldsymbol{R}$ 叫做 f 在 x 处的