[苏] В.Д.鲍尔沙科夫
Ю.И.马尔库泽

城市导线测量

测绘出版社

［苏］В.Д. 鲍尔沙科夫
Ю.И 马尔库泽 著

李锡泉 译

章书寿 校

城市导线测量

（平差及设计依据）

测绘出版社

内 容 简 介

本书阐述城市导线测量的布设、精度估算与平差的新方法。作者考虑了国家导线网的特点，使这些方法也可广泛应用于国家导线网。本书特点是应用了大地测量数学处理的现代理论，其中包括用相关矩阵的概念进行非独立观测平差，以及当存在系统误差与顾及起算数据误差时的平差计算。

本书可供测量工作者、科研人员以及测绘高等学校的研究生和学生参考。

城市导线测量

［苏］В.Д. 鲍尔沙科夫 著
Ю.И. 马尔库泽

李锡泉 译

章书寿 校

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 · 印张 11 1/8 · 字数 289 千字

1982 年 12 月第一版 · 1982 年 12 月第一次印刷

印数 1—5,300 册 · 定价 1.35 元

统一书号：15039 · 新224

前　言

本书阐述城市导线测量的布设、精度估算与平差。根据现代最小二乘法进行论述，作者认为，在第一章中叙述有关控制测量数学处理的理论知识是有益的，因此，叙述中着重于矩阵推算和相关矩阵的概念。这一章中还论述了最小二乘法的一些重要问题，例如顾及起始数据误差的平差，存在系统误差的平差等等。

第二章叙述了单一导线的平差与精度估算。首先对等边直伸导线的全面精度估算问题进行了充分的讨论，然后讨论了未测联接角的导线平差和精度估算问题。

第三章叙述了结点法平差。详尽地介绍了由作者提出的改进结点平差法，它最适用于手编程序和手工计算。对于含有某种系统误差的导线网平差和未测联接角的导线网平差也作了充分论述。

第四章叙述了多边形平差法(附有未知数的联系数平差法)，其中包括两组平差法。

第五章叙述近似平差法，但其精度能够代替严密平差。

第六章叙述导线网模型的平差与精度分析。还叙述了导线网设计的依据。

本书正文和附录中，有各种算例来说明导线测量平差与精度估算主要方法的实际应用。

本书作者如同其他许多从事测量成果处理的大地测量学家、物理学家和数学家一样，认为采用“误差”(ошибка)这一术语来代替“错误”(погрешность)是有理由的。首先，在大地测量学，天文测量学和其他学科里，误差这一术语的采用已成为传统，它在历史上最先同测量联系在一起。其次，这一术语的构词能力较强。倘若顾及哲学上是把偶然性作为客观范畴来解释的，那么采用误差这一术语显然就更有根据了。错误这一术语最好是

用在计算的过程中。应该指出，在大百科全书中也有误差一词（见1975年莫斯科第三版，第19卷第53页《误差理论》词条）。

本书第§15，§16，§18和§19节的写作，有科学副博士E.B.格罗莫夫参加，§20则有科学副博士Г.С.勃隆什坚参加。

作者希望，本书讨论的问题将对生产人员、科研人员以及测绘高等学校的研究生和学生有所裨益。

目　　录

绪论……………………………………………………（ 1 ）

第一章　大地测量数学处理理论的基本原理……………（ 3 ）

§1　观测误差理论的有关知识……………………………（ 3 ）

§2　矩阵代数的必要知识…………………………………（ 28 ）

§3　相关矩阵的概念………………………………………（ 37 ）

§4　最小二乘法的实质。参数平差法……………………（ 44 ）

§5　联系数平差法。附有未知数的条件平差法……（ 51 ）

§6　两组平差法……………………………………………（ 64 ）

§7　顾及起始数据误差与系统误差的平差法………（ 70 ）

第二章　单一导线的平差和精度估算……………………（ 80 ）

§8　单一导线的平差………………………………………（ 80 ）

§9　两组平差法……………………………………………（ 88 ）

§10　等边直伸导线平差元素的精度估算……………（ 97 ）

§11　任意形状导线元素的精度估算……………………（ 111 ）

§12　导线未进行坐标方位角联测时的精度估算……（ 124 ）

§13　导线未与固定坐标方位角联测时的精度研究
………………………………………………………（ 139 ）

第三章　导线网的结点平差法……………………………（ 144 ）

§14　现有的导线网平差法………………………………（ 144 ）

§15　结点法的改进…………………………………………（ 153 ）

§16　观测方向的初步平差………………………………（ 161 ）

§17　带有固定系统误差的导线网平差…………………（ 168 ）

§18　导线网未经角度联测的平差计算…………………（ 173 ）

§19　光电测距导线中权的确定…………………………（ 178 ）

§20　用组合法测距来测定光电测距仪的常数误差
……………………………………………（182）
第四章　其它平差方法……………………………（189）
§21　结点-多边形平差法………………………（189）
§22　在结点上测定坐标方位角时导线网的平差……（199）
§23　导线网两组平差法的一般理论…………………（209）
§24　在电子计算机上按两组平差法进行导线网平差
……………………………………………（224）
§25　导线网平差元素的精度估算……………………（233）
第五章　导线网的近似平差法…………………………（241）
§26　两组近似平差法及其应用的依据………………（241）
§27　近似平差成果的分析……………………………（249）
第六章　导线网的设计……………………………（261）
§28　导线网模型的平差和精度估算…………………（261）
§29　导线网模型精度估算严密性的分析……………（277）
§30　城市光电测距导线网的设计依据………………（282）
§31　导线与结点的联测………………………………（294）
文献目录……………………………………………（302）
附录Ⅰ　导线网（图44）的结点法平差……………（305）
附录Ⅱ　导线网按结点-多边形法平差……………（316）
附录Ⅲ　严密的两组平差法…………………………（332）
附录Ⅳ　近似平差法…………………………………（336）
附录Ⅴ　两组近似平差法……………………………（340）
附录Ⅵ　结点上用全圆测回法测角时导线网的两
组平差法……………………………………（342）

绪　　论

随着长度测量各种新方法和新仪器的广泛发展，且能有效地获得很高精度，使得作为平面控制网的导线测量重新得到发展。在苏联，导线测量的作业范围逐年扩大，同时，鉴于进行长度测量用的新仪器的改进和推广，完全可以肯定，导线测量将来还会获得更为广泛的应用。

由于新技术的采用和建立大地平面控制的各种方法的改进，这就要求有效地利用电子计算机来发展和改进测量成果的数学处理方法。

苏联的大地测量学家成功地解决了导线测量的设计、平差计算和精度估算等许多理论和实践问题。在这方面有著名论述的大地测量学家有 A.C.契巴塔廖夫，B.B.达尼洛夫，И.Ю.普拉尼斯·普拉涅维奇，H.H.列别杰夫，И.И.库普奇诺夫，Б.A.利特维诺夫等等。

考虑到布设导线网有各种不同的形式，因此，相同的平差方法应用于不同的导线网，显然会有不同的效果。于是，有目的地掌握几种在具体情况下最为有效的平差计算，看来是必要的。

应用严密的平差方法往往受到限制，这是因为其难度较大。要使它们获得广泛的应用，须有预先制定好的用于电子计算机的算法和程序。专题学术论文的主要目的，就是研究这一类算法。

可惜目前经常采用的，仍然是近似平差的算法和程序，其中包括低精度的分别平差法。多数近似平差法不能得出满意的成果。但是不能由此认定，所有近似平差法一概不能使用。作者认为，在近似平差法中，只要能够得出能代替严密平差的成果，这些方法还是可以采用的。因此，本书将不叙述经过改变的分别平差法，而介绍能保证成果质量的近似平差法。

在设计导线网时，对结点坐标的精度估算往往采用一些近似

的方法。这些方法常常得出远非严密的成果。因此，本书也不讨论这类方法，而是推荐一种又快又简单的方法组成法方程式系数矩阵，根据标准程序在电子计算机上可求得所有结点坐标的相关矩阵。

平差导线网时必须考虑的一个重要情况是导线与结点的角度联测问题。此时经常采用某种单一的联测方法而使平差简化。当结点上的角度与一虚拟照准目标的辅助方向联测时，便可求得最简单的平差公式。但是，这个方向通常是不存在的。在这种情况下，所有的书中，都建议在每一个结点上取一个公共边作为结边方向，所算得的 $n-1$ 个角度来代替 n 个观测方向，此时所有的角度都是独立的。在本书中，作者建议对所有的情况在结点上用全圆测回法测角，并与同一条导线边相联系等。在固定点上建议联测两个固定坐标方位角以提高成果的精度。

当前，在建立苏联的国家控制网中，导线测量是同三角测量与三边测量同时采用的，并且可以代替它们。在城市中，导线测量有着最广泛的应用。在建立测量控制，以及在大比例尺测图和专门的工程建筑测量中，导线测量同样也有广泛的应用。苏联学者对布设导线网的方法和最有利的形式进行了研究。这类研究的成果在苏联出版的有关测量细则（见文献[27]，[28]，[29]）和有关的专著与文章中已有介绍。因此，本书对这些问题不再叙述。但是必须指出，在本书叙述有关平差方法和布设导线网的方案时，我们将谈到布设现代导线网的特点和测量方法。

第　一　章

大地测量数学处理理论的基本原理

§1　观测误差理论的有关知识

现代的观测误差理论，完全是以概率论的概念为基础的。我们认为，读者已经知道了这些原理的基本知识，因此，下面仅叙述其中最重要的一些概念。

概率论的最重要的基本概念之一，就是随机变量的概念。

在试验结果中可以取这样或那样的数值，而这个数值是预先不能确定的，这样的数值就称为随机变量。随机变量的例子有：（1）n次射击的命中数，（2）某一数量的测量结果，（3）射击时命中点的坐标，等等。

随机变量可以是不连续型的变量(离散值)，也可以是连续型的变量。

当全部可能取到的值是有限个或可列无限多个时，这种随机变量称为离散型随机变量。

其可能的数值将连续地落在某一区间，同时此数值能预先计算出来(上述的例2和例3)，这种随机变量称为连续型随机变量。

与非随机变量不同，随机变量不能只用一个数值来表示它的特征，而是必须对随机变量的每一个可能值附以其可能出现的概率。

确定随机变量的可能值与其相应概率之间的各种关系，称为随机变量的分布规律。这种分布规律就是概率论的基本概念。

用于确定离散型随机变量和连续型随机变量分布规律的函数，称为分布函数。分布函数是这样情形下的一种概率，即随机

变量所取的数值小于随机变量X的某一指定数x的概率：

$$F(x)=P(X<x).$$

函数$F(x)$还可称为可积分布函数，它的某些特性是：

1. $F(-\infty)=0$，

2. $F(+\infty)=1$，

3. 当$x_2\geqslant x_1$时，$F(x_2)\geqslant F(x_1)$.

通常，当随机变量在某一区间取值(例如由α到β)时，必须知道随机变量的概率。

此时，设左端α包括在(α,β)的范围内，而右端不包括在内，则所求概率可以写为：

$$P\{\alpha\leqslant X<\beta\}=F(\beta)-F(\alpha).$$

我们注意到

$$P(X=\alpha)=\lim_{\beta\to\alpha}[F(\beta)-F(\alpha)],$$

此时，对于连续型随机变量可得$P(X=\alpha)=0$. 但是这个随机变量与离散型随机变量不同，我们不能认为它是不可能发生的（这种情况会发生，但极为罕见）。

连续型随机变量的分布规律用分布密度（分布密度曲线）来表示是很方便的，它可以作为分布函数的导数来确定：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)=\varphi(x)$$

密度$\varphi(x)$还称为微分的分布规律（而函数$F(x)$为可积分布规律）。

密度$\varphi(x)$的特性是：

1. $\varphi(x)\geqslant 0$，

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$，

即分布密度曲线范围内的面积永远等于1。如果所有可能值X都在α至β的范围内，那么

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx = 1.$$

在许多实践的问题中，并不需要全部地说明随机变量的性质，而常常是只要晓得个别的数字参数，用以说明分布规律便足够了。例如随机变量的各个可能值围绕着一个分布中心，以及这些可能值相对于这个中心的离散程度等等，都叫做数字参数。随机变量的数学期望就是分布中心，它可由下式确定：

离散型时为 $$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i,$$

连续型时为 $$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx.$$

当试验的次数为无限时，算术平均值为

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i Q_i,$$

式中 Q_i 为频率，它是趋于$M[X]$的概率，即

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x} = M[X].$$

数学期望具有下列特性：

1. $M[c] = c$,

式中 c 是一个常数（非随机变量），

2. $M[cx] = cM[x]$,

3. $M[\Sigma c_i x_i] = \Sigma c_i M[x_i]$,

4. $M[x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n] = \prod_{i=1}^{n} M[x_i]$.

上述最后一个特性仅仅是独立时才具有。

除了数学期望，在概率论中还采用一系列称之为矩的特性曲线。

随机变量 s 次幂的数学期望叫做随机变量关于原点的第 s 阶原点矩：

$$\alpha_s = M[X^s].$$

当 $s=1$ 时，可得：

$$\alpha_1 = M[X].$$

随机变量X与其数学期望的偏差 s 次幂的期望，称为该变量X的 s 阶中心距：

$$\mu_s = M[(X - M[X])^s].$$

二阶中心矩 $\mu_2 = D = M[(X - M[X])^2]$具有特别的意义，它叫做方差，因为它可以说明随机变量相对于分布中心的偏离程度。

方差具有下列基本性质：

1. $D(c) = 0$，

2. $D(cX) = c^2 D[X]$，

3. $D[\Sigma c_i x_i] = \Sigma c_i^2 D[x_i]$，式中 c =常数。

上述最后一个性质仅适用于独立变量。而方差具有随机变量平方的量纲。为了一目了然地说明期望的偏离程度，可以采用均方差或称为标准差

$$\sigma = +\sqrt{D}.$$

除标准差 σ 之外，有时也采用其他的随机变量分布的标准，或者当随机变量是测量误差时，也可采用测量精度作为标准。

平均偏差 ϑ 作为一次绝对中心矩为

$$\vartheta = M[|X - M[X]|].$$

在一系列等精度测量中，其误差的绝对值可能趋于相同；大于或小于此相同绝对值的数量可称为或然偏差 r，即

$$P\{|\varDelta| < r\} = \frac{1}{2}.$$

对于正态分布的情况，$\sigma = 1.25\,\vartheta_1$，$r = 0.67\,\sigma$。

除用方差之外，还常用三阶和四阶中心矩来表明分布的特点。

数值 $S_k = \frac{\mu_3}{\sigma_3}$叫做偏倚系数(偏度)。在对称分布的情况下，$S_k = 0$．图 1 表示两种不对称的分布。

曲线Ⅰ为正偏($S_k>0$)，曲线Ⅱ为负偏($S_k<0$).

数值$E=\frac{\mu_4}{\sigma_4}-3$叫做峰凸系数(峰度)。它是表明陡峭(尖峰分布或平峰分布) 的程度。对于标准正态分布来说，$E=0$.
图2表示三条分布曲线，分别为正的、等于零的和负的。此外还采用所谓绝对中心矩

$$\gamma_s=M[|X-M[X]|^s],$$

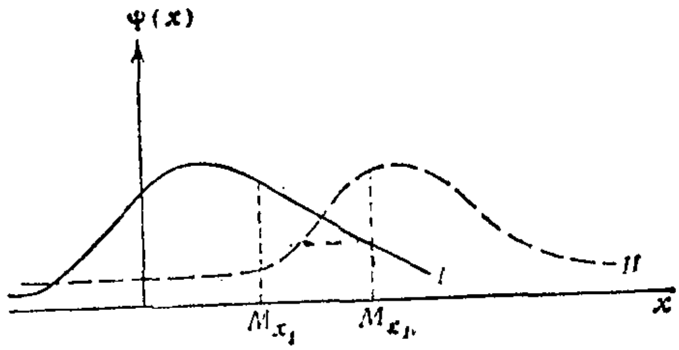

图 1

其中以平均偏差(Ⅰ-1)有最重要的意义

$$\vartheta=M[|X-M[X]|]=\gamma_1 \qquad (\text{Ⅰ}-1)$$

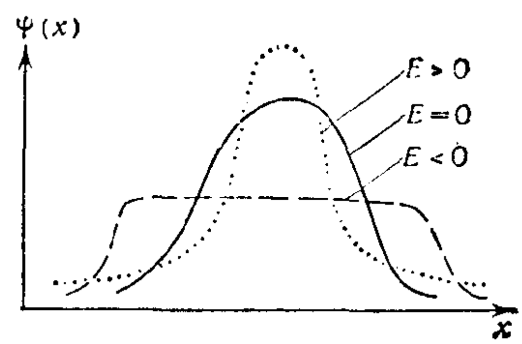

图 2

利亚普诺夫定理确定了自然界最重要和最常见的正态分布规律的产生条件。此分布规律的密度是：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

式中$a=M[x]$,　$\sigma=\sqrt{D[x]}$.

利亚普诺夫定理可以简化。如果某一随机变量乃是相当大量的其他各个独立随机变量之和，而这些独立随机变量同其数学期

望的偏差极小（即这种偏差与累计数的偏差相比极小），那么，这个累计随机变量的分布规律便与正态分布相接近。

依据这个原理可以认为，测量误差服从于这一正态分布，因为测量误差是由大量误差元素累计起来的。根据同样的理由，射击时命中点的坐标也服从于正态分布。这样的例子不胜枚举。

按正态分布计算概率 $P\{a<x<b\}$时，可以代入函数 $\Phi(t)$：

$$\Phi(t)=P\{|X-M[X]|<t\sigma\}. \qquad (\text{I}-2)$$

函数 $\Phi(t)$是射击点落在与数学期望相对称的区间里的概率，如图 3 所示，它在 x 轴和 $\varphi(x)$轴中，或在 t 轴和 $\varphi(t)$轴中，在数量上应等于线划所表示的面积。

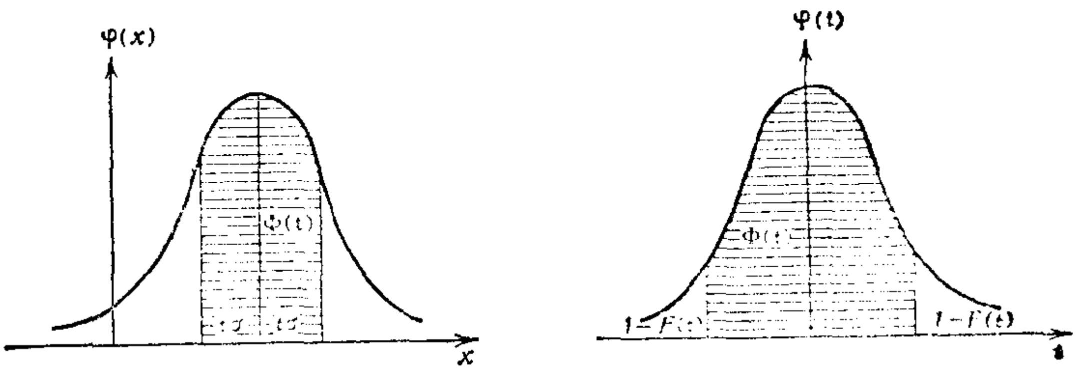

图 3

由此得出公式

$$P\{a<X<b\}=\frac{1}{2}\{\Phi(t_2)-\Phi(t_1)\},$$

式中

$$t_2=\frac{b-M_x}{\sigma}, \qquad t_1=\frac{a-M_x}{\sigma}.$$

函数 $\Phi(t)$具有 $\Phi(-t)=-\Phi(t)$的特性。

为便于说明，下面解算一个在误差理论中很重要的问题。

当观测的真误差为 Δ，其绝对值没有超出 $t\sigma$ 的限度时，要求计算 Δ 的概率，即求出概率 $P\{|\Delta|\leqslant t\sigma\}$，式中 $t=1, 2,$

2.5，3。

根据（Ⅰ-2），得 $P\{|\Delta|<t\sigma\}=\Phi(t)$。

利用函数 $\Phi(t)$ 表可求得未知概率

t	$\Phi(t)$
1	0.683
2	0.954
2.5	0.986
3	0.997

解决这个问题与确定观测误差的限差有关，而且除求得的结果外，还必须以实际的要求为原则。依据可靠的程度，凡概率近似于1的事件（实际上是可靠的）便应当作为必然事件，凡概率近似于0的事件（实际上是不可能的）便应当作为不可能的事件。做这样的替换，要根据可能的程度来进行。

根据上述原则，误差 $|\Delta|>3\sigma$ 应视为粗差，观测本身则应作废。显然，工作越准确、越负责，则所选择的 t 将越小。

若随机变量 Y 的分布规律与已采用的随机变量 X 无关，则 Y 称为与 X 无关的独立变量。对于连续型随机变量，Y 和 X 的关系式可写成

$$\varphi(y/x)=\varphi_2(y),$$

式中 $\varphi(y/x)$——X 取值 x 时，Y 的分布密度；$\varphi_2(y)$——Y 的分布密度。与此类似，可以写出独立的条件为

$$\varphi(x/y)=\varphi_1(x).$$

对于两个独立的连续型随机变量，采用乘法定理则有

$$\varphi(x,\ y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y),$$

式中 $\varphi(x,\ y)=\dfrac{\partial^2F(x,\ y)}{\partial x\partial y}$——共同的分布密度，而 $F(x,\ y)=P\{X<x,\ Y<y\}$——共同分布的函数。可能遇到两种关系式：函数形式与统计（概率的）形式。

当有一个变量 X，则有一个相应的 Y 准确与之相对应（例如 $y=\sqrt{x}$，$V=4/3\pi R^3$ 等等），X 与 Y 之间的这种关系，称为函数关系。

对于每一个X量，相应地有一个Y分布与之对应，而Y分布随着X的变化而变化（即条件分布），X与Y两变量之间的这种关系，称为统计关系。

经常可以遇到的统计关系是，随着X的变化，Y的数学期望按照线性关系进行变化。X和Y的这种关系称为线性相关；例如一个人的身高与体重之间的关系为

$$(Y_{\text{公斤}} = X_{\text{米}} - 100).$$

如待测量数值之间的关系业已确定，并用公式加以表示，则可用来适当组织测量和进行测量结果的计算。

两个随机变量X和Y之间的相关关系的紧密程度，可以用所谓相关系数来测定，计算此系数的方法如下：

$$r = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \tag{I-3}$$

式中

$$\begin{aligned} k_{xy} = \mu_{1,1} &= M[(X - M[X])(Y - M[Y])] \\ &= M[XY] - M[X]M[Y] \end{aligned} \tag{I-4}$$

为二阶中心混合矩，是两随机变量最重要的数字特征。一般说，$p+s$阶中心混合矩为

$$\mu_{p,s} = M[(X - M[X])^p (Y - M[Y])^s].$$

在个别情形下，显然可得

$$\mu_{2,0} = D[X], \quad \mu_{0,2} = D[Y].$$

相关系数在$-1 \leqslant r \leqslant 1$的范围内变化。

当相关系数等于$+1$或-1时，x和y之间存在着准确的直线函数关系，即

$$y = ax + c,$$

$$x = by + d.$$

当$r < 0$时，产生负相关，即随着x减少(或增大)，y有增大（或减少）的趋势；而当$r > 0$时，则产生正相关，即随着x减少(或增大)，y有减少(或增大)的趋势。