

# 快速傅里叶变换 及沃尔什变换



FWT

张彦仲 沈乃汉 编著

FFT

航空工业出版社



# 快速傅里叶变换及沃尔什变换

张彦仲 编著  
沈乃汉

航空工业出版社

1989

## 内 容 简 介

本书介绍快速傅里叶变换及沃尔什变换,重点放在离散傅里叶变换及其快速算法。全书分9章,内容包括FFT算法、WFTA算法、子群卷积及快速递归算法、FWT算法等快速变换算法。书中附有习题、程序及习题解答,可作为大专院校选修课教材,也可供从事计算技术的工程技术人员参考。

### 快速傅里叶变换及沃尔什变换

张彦仲 编著  
沈乃汉

---

航空工业出版社出版发行  
(北京市和平里小关东里14号)  
全国各地新华书店经售  
北京市通县向阳印刷厂印刷

---

1989年8月第1版      1989年8月第1次印刷

787×1092毫米1/32      印张: 17.75

印数: 1—2500      字数: 445千字

ISBN 7-80046-144-0/O·003

定价: 7.50元

## 序 言

快速傅里叶变换是计算离散傅里叶变换，对信号作数字频谱分析及实现数字滤波的基本方法。它在谱分析、谱估计、数字通信、语音信号分析、图象处理、雷达、声纳、地震、生物医学工程等各个领域都有着日益广泛的应用。作为非正弦正交变换的典型代表，沃尔什变换及其快速算法，由于它计算简单、变换速度快，在数字频谱分析上有重要作用，在科技领域也有广泛的应用与发展前途。

本书论述了这两种基本变换，主要是讨论它们的基本原理及各种快速算法。第一章介绍连续信号傅里叶级数和傅里叶变换。第二章讨论如何从连续傅里叶变换发展为离散傅里叶变换及离散傅里叶变换的性质。第三章介绍快速傅里叶变换( $FFT$ )。第四章介绍数论的基础知识，它是以下几章需用的一些基本概念。第五、六、七章则介绍了计算离散傅里叶变换的高效快速新算法： $WFTA$ 算法，子群卷积算法及快速递归算法。第八章讨论沃尔什函数及其基本性质。第九章讨论离散沃尔什变换及其快速算法。

本书内容由浅入深，取材上照顾到不同层次需要，既着眼于基础知识，详细论述了离散傅里叶变换及沃尔什变换的基本原理及概念，又选取了难度较大的内容如 $WFTA$ 及子群卷积等算法。书中附有习题和部分计算程序。书后附有习题解答，它可作为大专院校选修课教材，也可作为工程技术人员学习快速变换的参考书。

本书由张彦仲、沈乃汉合作编著，卢爱国同志参加了习题及解答的编写工作。

编著者

1988年

# 目 录

第一部分 快速傅里叶变换 .....	(1)
第一章 傅里叶级数和傅里叶变换概述 .....	(1)
1.1 正交的概念和正交函数 .....	(1)
1.2 傅里叶级数 .....	(3)
1.3 傅里叶变换 .....	(6)
1.3.1 傅里叶变换对 .....	(6)
1.3.2 傅里叶变换的性质 .....	(7)
(1) 线性 (2) 对称性 (3) 标度变换 (4) 时延特性 (5) 频移特性 (6) 巴什瓦尔定理	
(7) 卷积和相关特性	
习题 一 .....	(10)
第二章 离散傅里叶变换(DFT) .....	(13)
2.1 从连续傅里叶变换到离散傅里叶变换 .....	(13)
2.1.1 傅里叶变换的数值积分计算 .....	(13)
2.1.2 截断和抽样对连续傅里叶变换频谱的影响 .....	(16)
2.1.3 傅里叶积分变换的离散变换对 .....	(18)
2.2 离散傅里叶变换 .....	(21)
2.2.1 离散傅里叶变换的定义 .....	(21)
2.2.2 计算举例 .....	(21)
2.3 离散傅里叶变换和离散傅里叶级数的关系 .....	(26)
2.3.1 周期序列的展开——离散傅里叶级数 .....	(26)
2.3.2 举例 .....	(28)
2.3.3 离散傅里叶变换和离散傅里叶级数的关系 .....	(28)
2.4 离散傅里叶变换和 Z 变换的关系 .....	(29)
2.5 离散傅里叶变换的性质 .....	(31)
2.5.1 线性组合特性 .....	(31)
2.5.2 对称关系 .....	(31)
2.5.3 奇偶特性 .....	(32)
2.5.4 循环位移特性 .....	(33)
(1) 循环位移的概念 (2) 循环位移特性	
2.5.5 卷积和相关定理 .....	(36)
(1) 线性卷积和循环卷积 (2) 卷积和相关运算的矩阵表示 (3) 时域卷积定理	
(4) 频域卷积定理 (5) 离散相关定理	
2.5.6 复共轭定理 .....	(44)
2.5.7 巴什瓦尔定理 .....	(45)
(1) 功率谱、振幅谱及相位谱的计算	
(2) 巴什瓦尔定理	

2.6	二维离散傅里叶变换 .....	(46)
	习题二 .....	(49)
第三章	离散傅里叶变换的快速算法(FFT) .....	(55)
3.1	引言 .....	(55)
3.2	离散傅里叶变换(DFT)的信号流图表示方法 .....	(56)
3.3	DET变换系数 $W_N^{nk}$ 的周期性和对称性 .....	(57)
3.4	FFT及其信号流图 .....	(58)
3.4.1	时间抽选FFT的蝶形运算流程分析 .....	(58)
3.4.2	频率抽选FFT的蝶形运算流程分析 .....	(65)
3.5	快速傅里叶反变换IFFT .....	(67)
3.6	FFT运算的加法及乘法次数 .....	(68)
3.7	数据的码位倒置(反序)和即位运算 .....	(69)
3.8	FFT的矩阵分析 .....	(71)
3.9	基2算法FFT计算程序分析 .....	(78)
3.9.1	例题及计算程序 .....	(78)
3.9.2	信号流图及程序框图 .....	(84)
3.9.3	程序分析 .....	(85)
3.1.0	各种FFT算法简介 .....	(87)
3.1.1	FFT的应用简介 .....	(91)
	习题三 .....	(93)
第四章	数论和域的基础知识 .....	(97)
4.1	引言 .....	(97)
4.2	数论的基础知识 .....	(97)
4.2.1	整数的整除性 .....	(97)
4.2.2	同余的概念 .....	(97)
4.3	欧拉函数及其有关定理 .....	(98)
4.3.1	欧拉(Euler)函数 .....	(98)
4.3.2	欧拉定理 .....	(99)
4.3.3	费尔马(Fermat)定理 .....	(99)
4.4	原根 .....	(99)
4.4.1	单位根及原根的概念 .....	(99)
4.4.2	原根的映射关系 .....	(100)
4.5	中国余数定理(孙子定理) .....	(101)
4.6	群、环和域的概念 .....	(104)
4.6.1	群 .....	(104)
4.6.2	数环 .....	(105)
4.6.3	域 .....	(105)
	习题四 .....	(109)
第五章	WFTA的原理及算法 .....	(111)
5.1	引言 .....	(111)
5.2	小NWFTA算法 .....	(111)
5.2.1	小NWFTA算法原理 .....	(111)

5.2.2	举例	(116)
5.3	小NWFTA算法的矩阵分解、算法及流图	(122)
5.4	大NWFTA算法	(135)
5.4.1	一维DFT化为多维DFT	(135)
5.4.2	一维化多维的数据重排	(139)
5.4.3	用矩阵嵌套减少乘法次数的大NWFTA算法	(141)
5.4.4	大NWFTA计算程序	(145)
	习题五	(159)
第六章	运用子群卷积的快速傅里叶变换算法	(161)
6.1	概述	(161)
6.2	整数环 $Z_N$ 中, $N=P^M-1$ 的子群循环特性	(162)
6.3	用子群卷积计算DFT的快速算法	(164)
6.4	算法的实现	(166)
6.4.1	输入与输出序列的重新排序	(166)
6.4.2	例子	(167)
6.4.3	排序的快速算法	(169)
6.5	计算速度的实验比较	(173)
6.6	小结	(173)
第七章	单系数递归傅里叶变换	(175)
7.1	概述	(175)
7.2	离散傅里叶变换的单系数递归算法	(175)
7.3	最佳递归傅里叶变换	(180)
7.4	快速递归傅里叶变换	(182)
7.4.1	快速递归DFT原理	(182)
7.4.2	快速递归傅里叶变换的硬件实现	(182)
7.4.3	运算次数估算	(183)
7.4.4	系数误差的影响	(185)
7.4.5	高精度的实现	(187)
7.5	小结	(189)
	习题七	(189)

## 第二部分 快速沃尔什变换 (191)

	前言	(191)
第八章	沃尔什(Walsh)函数及其基本性质	(191)
8.1	沃尔什函数的波形及其参数	(191)
8.1.1	沃尔什函数的波形及其特点	(192)
8.1.2	沃尔什函数的四个参数	(192)
8.2	沃尔什函数的定义	(194)
8.2.1	按沃尔什编号排列的沃尔什函数表示法	(195)
8.2.2	按自然序数排列的沃尔什函数表示法	(197)

8.2.3	按哈达马顺序排列的沃尔什函数表示法	(199)
8.2.4	三种编号沃尔什函数的关系	(203)
8.2.5	用拉德马赫函数统一定义三种编号的沃尔什函数	(206)
8.3	沃尔什函数的主要性质	(209)
8.3.1	乘法定理	(209)
8.3.2	正交性质	(210)
8.3.3	完备性	(211)
8.3.4	对称关系	(211)
8.3.5	倒转关系	(211)
8.4	沃尔什级数	(213)
8.5	沃尔什积分变换	(216)
	习题八	(219)
第九章	离散沃尔什变换及其快速算法	(221)
9.1	离散沃尔什函数	(221)
9.1.1	离散沃尔什函数的定义	(222)
9.1.2	离散沃尔什函数的性质	(224)
9.2	离散沃尔什变换(DWT)	(224)
9.3	离散哈达马变换(DHT)	(228)
9.4	离散沃尔什变换的性质	(230)
9.4.1	线性	(230)
9.4.2	并元移位定理(模二移位定理)	(231)
9.4.3	并元卷积定理	(232)
9.4.4	并元自相关定理	(234)
9.4.5	帕什瓦尔定理	(234)
9.5	离散沃尔什变换的快速算法	(235)
9.5.1	快速沃尔什-哈达马变换(FWHT) <sub>H</sub>	(235)
9.5.2	P编号快速沃尔什-哈达马变换(FWHT) <sub>P</sub>	(241)
9.5.3	W编号快速沃尔什-哈达马变换(FWHT) <sub>W</sub>	(241)
9.6	FWHT的FORTRAN语言程序	(245)
9.7	沃尔什-哈达马功率谱的快速算法	(250)
9.7.1	沃尔什变换功率谱 $P_W(n)$	(250)
9.7.2	(DWT) <sub>H</sub> 的功率谱	(250)
9.7.3	沃尔什-哈达马功率谱的快速计算	(254)
9.8	二维离散沃尔什变换	(255)
	习题九	(260)
	习题答案	(261)
	参考文献	(274)



# 第一部分 快速傅里叶变换

## 第一章 傅里叶级数和傅里叶变换概述

本章将简要地叙述正交的概念，并复习傅里叶级数和傅里叶变换。它是学习变换及其快速算法的基础知识。还有许多必要的基础知识则是通过以后的各章逐步地介绍。本章还要讨论傅里叶变换的近似计算——数值积分计算。从傅里叶变换的数值积分，可以得到离散傅里叶变换。当然，从连续信号的傅里叶积分变换到离散傅里叶变换，可以将它看成是将连续信号经过了截断和离散的处理。但是，这种处理对频谱的影响，有时是不能忽略的。分析截断和抽样对频谱的影响，有助于了解连续信号的傅里叶积分变换和离散傅里叶变换的关系。

### 1.1 正交的概念和正交函数

“正交”这个词广泛用于正交函数和正交变换。但最初它是用于形容矢量，如果两个矢量 $V_1$ 和 $V_2$ (如图1-1所示)彼此相互垂直，则 $V_1$ 沿着 $V_2$ 没有分量，称它们是正交的。

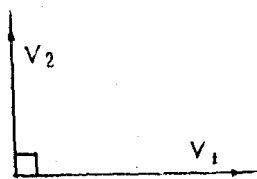


图1.1 正交矢量

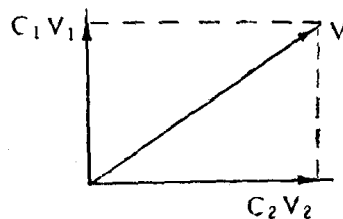


图1.2 矢量的分解

两个矢量正交的条件是

$$V_1 \cdot V_2 = 0 \quad (1-1)$$

在二维平面上，两个正交矢量 $V_1$ 和 $V_2$ 构成了正交矢量集 $\{V_1, V_2\}$ 。它是完备正交集。所谓完备，是指在二维平面上再也找不出另外一个和它们正交的矢量。于是，在二维平面上任何一个矢量 $V$ ，可以毫无误差地用两个正交矢量 $V_1$ 和 $V_2$ 的线性组合来表示，如图1-2所示。即

$$V = C_1 V_1 + C_2 V_2 \quad (1-2)$$

正交系数 $C_1, C_2$ 可以利用 $V_1, V_2$ 正交性求出： $V_1$ 和 $V_2$ 正交，则有 $V_1 \cdot V_2 = 0$

$$\text{及 } V_1 \cdot V_1 = |V_1|^2$$

于是  $V \cdot V_1 = (C_1 V_1 + C_2 V_2) \cdot V_1 = C_1 |V_1|^2$

$$\therefore C_1 = \frac{V \cdot V_1}{|V_1|^2} \quad (1-3)$$

同样可得:

$$C_2 = \frac{V \cdot V_2}{|V_2|^2} \quad (1-4)$$

正交系数 $C_1$ 只和 $V$ 及 $V_1$ 有关。系数 $C_2$ 只和 $V$ 及 $V_2$ 有关。但是, 如果矢量 $V$ 是用两个非正交的矢量来线性组合, 则 $C_1$ 和 $C_2$ 将是和 $V$ 及 $V_1$ 、 $V_2$ 都有关, 而不能用式(1-3)及式(1-4)独立求出。

更一般的情况是在 $n$ 维空间, 则是由 $n$ 个正交矢量 $V_1, V_2, \dots, V_n$ 构成一个完备的正交集 $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ 。 $n$ 维空间中任一矢量 $V$ , 若用这个完备正交集中正交矢量的线性组合来表示, 则可毫无误差, 即

$$V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \dots + C_n V_n = \sum_{i=1}^n C_i V_i \quad (1-5)$$

其正交系数

$$C_i = \frac{V \cdot V_i}{|V_i|^2} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1-6)$$

系数 $C_i$ 只与 $V$ 和 $V_i$ 有关, 可以彼此独立地分别求出。

正交函数的概念类似于正交矢量的概念, 例如, 我们有 $\{f_n\}$ 及 $\{g_n\}$ 是两个函数 $f(t)$ 及 $g(t)$ 的样本集, 我们则把样本集 $\{f_n\}$ 及 $\{g_n\}$ 看成是 $N$ 维空间的矢量, 当且仅当

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot g_n = 0 \quad (1-7)$$

则称两个函数对于抽样点 $\{t_n\}$ 是正交的。

对于连续时间函数, 正交的定义与式(1-7)相似, 当且仅当

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot g(t) dt = 0. \quad (1-8)$$

则称函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在区间 $(t_1, t_2)$ 上是正交。

若在区间 $(t_1, t_2)$ 内有 $N$ 个函数 $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ 构成一个完备正交函数集 $\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\}$ 所谓完备, 则是指除此 $N$ 个函数之外, 再也找不出一个与之正交的函数。在此区间 $(t_1, t_2)$ 内的任意函数 $f(t)$ , 则可以毫无误差地用这个完备正交函数集中的正交函数的线性组合来表示, 即

$$\begin{aligned} f(t) &= C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + \dots + C_n g_n(t) \\ &= \sum_{i=1}^n C_i \cdot g_i(t) \quad t_1 < t < t_2 \end{aligned} \quad (1-9)$$

各分量的系数为

$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt}{K_i} \quad (1-10)$$

若 $g_i(t)$ 是 $t$ 的复函数,  $g_i^*(t)$ 为其共轭, 则

$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_i^*(t) dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i^*(t) dt}{K_i} \quad (1-11)$$

正弦, 余弦正交函数集, 指数正交函数集和沃尔什(walsh)正交函数集等, 都是常用的完备正交函数集。

例如正弦函数  $\sin n\omega_0 t$  和余弦函数  $\cos n\omega_0 t$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) 在区间  $(t_0, t_0+T)$  内, 满足

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0 \quad (m \neq n)$$

上式中  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  为基波周期

根据式(1-3)的定义, 它们互相都是正交函数。当  $n=0$  时  $\cos n\omega_0 t = 1$  当  $n \rightarrow \infty$  这个正交函数集构成一个完备正交函数集:

$$\{1, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots, \sin\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \dots\}$$

应当指出, 在决定两个函数是否正交时, 正交区间  $(t_1, t_2)$  的选择和函数本身一样重要。一般说来, 函数对于某一个区间是正交的, 而对于另一个区间并不正交。

## 1.2 傅里叶级数

正弦余弦函数在区间  $(t_0, t_0+T)$  内构成一个完备的正交函数集。因此可以在这个正交区间内, 用这个完备正交函数集的线性组合来表示任意函数  $f(t)$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \end{aligned} \quad (1-12)$$

这就是任意函数  $f(t)$  在有限区间  $(t_0, t_0+T)$  内三角函数形式傅里叶级数展开式。

当  $f(t)$  是以  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  为周期的周期函数, 则式(1-12)在整个区间  $(-\infty, \infty)$  内都成立。

各分量的系数可分别由式(1-10)求出

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n\omega_0 t dt} \\ b_n &= \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2 n\omega_0 t dt} \end{aligned} \quad (1-13)$$

式(1-13)中令  $t_0 = -T/2$ ,

$$n=0: \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (1-14)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (1-15)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (1-16)$$

在傅里叶级数中, 当  $n$  取有限值时, 则正交函数集是不完备的, 式(1-12)仅为  $f(t)$  的近似逼近, 可以证明, 由式(1-14)~(1-16)所确定的分量系数, 其逼近的均方误差最小。

指数函数集  $\{e^{jn\omega_0 t}\}$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 在区间  $(t_0, t_0+T)$  内也是完备正交函数集。

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  为基频分量周期。

任意函数  $f(t)$  在区间  $(t_0, t_0+T)$  内, 可以用  $\{e^{jn\omega_0 t}\}$  这个完备正交集来表示:

$$\begin{aligned} f(t) &= F_0 + F_1 e^{j\omega_0 t} + F_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots + F_n e^{jn\omega_0 t} + \dots \\ &\quad + F_{-1} e^{-j\omega_0 t} + F_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \dots + F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (1-17)$$

$e^{jn\omega_0 t}$  是实变量  $t$  的复数函数, 上式中各分量系数可按式(1-11)计算, 令  $t_0 = -T/2$  则有

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(t) (e^{jn\omega_0 t})^* dt}{\int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 t} (e^{jn\omega_0 t})^* dt} = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}{\int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt} \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (1-18)$$

当  $f(t)$  为周期信号时, 式(1-18)在整个区间  $(-\infty, \infty)$  内成立。式(1-17)是指数形式的傅里叶级数。

### 例1.1 矩形函数

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

如图1-3所示。应用不同的有限项正弦函数  $\sin n\omega_0 t$  在区间  $(0, 2\pi)$  来近似该函数, 试求均方误差为最小时, 各分量系数以及相应的均方误差值。

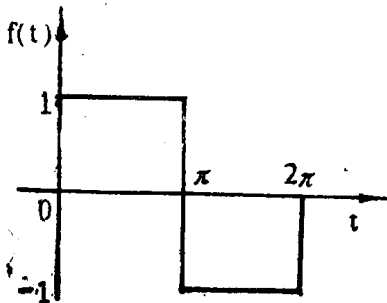


图1.3 矩形函数

解:

区间  $(0, 2\pi)$  对应于  $t_0 = 0$  和  $T = 2\pi$ , 故  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$ 。

正弦函数  $\sin t, \sin 2t, \dots, \sin nt, \dots$  在区间  $(0, 2\pi)$  内互相正交, 当用有限项正弦函数来近似表示矩形函数时, 则有

$$f(t) \approx b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \dots + b_n \sin nt$$

在均方误差为最小时, 各分量的系数  $b_n$  可由(1-16)式来计算

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \sin nt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin nt dt \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{若 } n \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{若 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

因此  $f(t) \approx \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \frac{1}{7} \sin 7t + \dots \right)$   
 $(0 < t < 2\pi)$

均方误差可用下式计算:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left( f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t) \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left( \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt + \sum_{r=1}^n c_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{r=1}^n c_r \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left( \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt + \sum_{r=1}^n c_r^2 K_r - 2 \sum_{r=1}^n c_r^2 K_r \right) \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left( \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{r=1}^n c_r^2 K_r \right) \end{aligned}$$

在这里,  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 2\pi$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

因此  $\int_0^{2\pi} f^2(t) dt = 2\pi$

而  $c_r = b_r = \begin{cases} \frac{4}{\pi r} & \text{若 } r \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{若 } r \text{ 为偶数} \end{cases}$

和  $K_r = \int_0^{2\pi} \sin^2 r t dt = \pi$

所以  $\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \left( 2\pi - \sum_{r=1}^n c_r^2 \pi \right)$

对于一项近似  $\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi - \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \pi \right] = 0.19$

对于二项近似

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi - \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \pi - \left( \frac{4}{3\pi} \right)^2 \pi \right] = 0.1$$

同样可得, 三项近似的误差为  $\varepsilon = 0.0675$ , 四项近似的误差  $\varepsilon = 0.051$ , ...

图1-4给出了实际函数和分别用一项、二项、三项、四项正弦函数近似时而得到的近似

函数的图形。可以看出，当用正弦函数逼近矩形函数时，项数取得越多，近似程度就越好，均方误差也就越小。

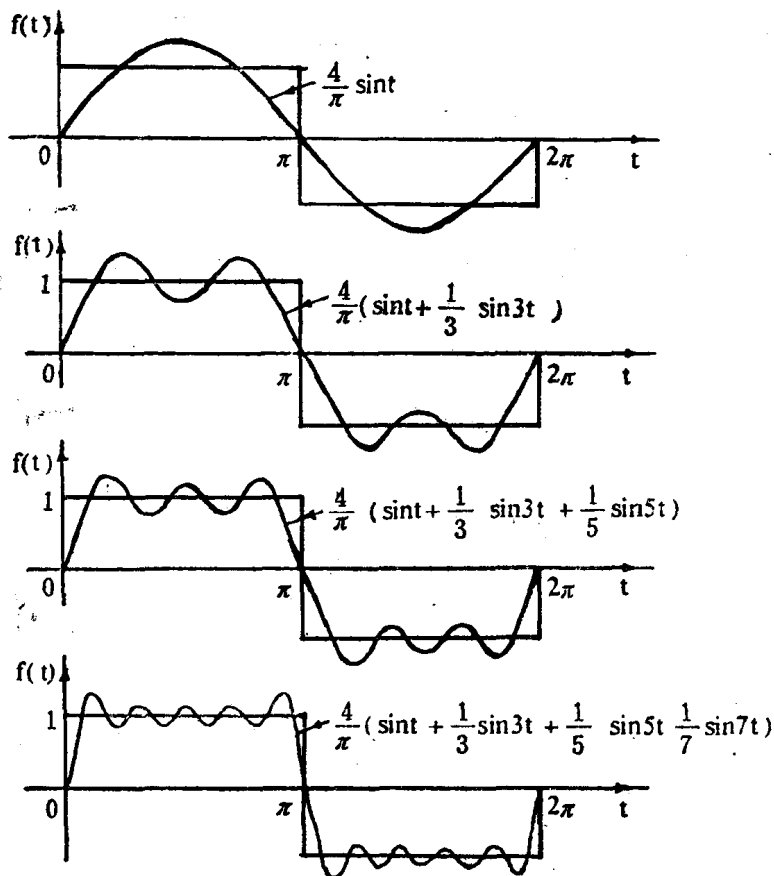


图1.4 用正弦函数近似矩形函数

### 1.3 傅里叶变换

#### 1.3.1 傅里叶变换对

将非周期信号看成周期为无穷大的周期信号，应用指数形式傅里叶级数，可以得到傅里叶正变换和反变换，它们构成一个傅里叶变换对。其典型表示式如下：

正变换：

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-19)$$

反变换：

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-20)$$

傅里叶变换对记为：

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

频域变量 $\omega$ 亦可用 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ 代替：

正变换:

$$F(f) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1-21)$$

反变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1-22)$$

记为

$$F(f) \longleftrightarrow f(t)$$

傅里叶积分变换一般用于非周期。因此, 函数存在傅里叶变换的条件是函数  $f(t)$  应当绝对可积。即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (1-23)$$

实际的物理问题中, 这个条件总是可以满足的。例如每个实际波形  $f(t)$  都存在一个频谱。但是, 在分析问题中十分有用的许多理想信号, 却不一定能满足式(1-23)。也就是说, 从上面的傅里叶积分变换公式计算不出它们的傅里叶变换对。例如, 常用的阶跃信号就是一个例子。为此, 可以将广义函数  $\delta(\omega)$  引入傅里叶分析, 则许多不满足式(1-23)的奇异信号以及周期信号, 都可以应用傅里叶积分变换作分析, 都可以有其傅里叶变换对。

例如:

$$\begin{aligned} U(t) &\longleftrightarrow F(\omega) = \frac{1}{j\omega} + 2\pi\delta(\omega) \\ e^{j\omega_0 t} &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\ \cos\omega_0 t &\longleftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

### 1.3.2 傅里叶变换的性质

1. 线性: 傅里叶变换是线性运算

若  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  所对应的傅里叶变换分别为  $F_1(\omega), F_2(\omega), \dots, F_n(\omega)$  则下列变换对成立:

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \longleftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i F_i(\omega) \quad (1-24)$$

式中:  $n$  为有限正整数,  $a_i$  为常系数。

2. 对称性

$$\begin{aligned} \text{若} & f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \\ \text{则} & F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{aligned} \quad (1-25)$$

证:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将变量  $t$  和  $\omega$  对换

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{即 } F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

当  $f(t)$  为偶函数,  $f(t) = f(-t)$

$$\text{则 } F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(\omega) \quad (1-26)$$

### 3. 标度变换特性

若  $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ , 则对实常数  $a$ , 有以下关系:

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (1-27)$$

证: (1),  $a > 0$

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

令  $x = at$  代入上式

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(2),  $a < 0$  类似地可求得

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{-1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\text{因此 } f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

它表明时域和频域的压缩和扩展关系,  $f(at)$  表示  $f(t)$  沿对时间轴压缩(或扩展)了  $a$  倍, 相应地  $F\left(\frac{\omega}{a}\right)$  则表示  $F(\omega)$  沿频率轴扩展(或压缩)了  $a$  倍。

### 4. 时延特性

若  $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

$$\text{则 } f(t-t_0) \longleftrightarrow F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \quad (1-28)$$

$$\text{证: } \mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) e^{-j\omega t} dt$$

令  $t-t_0 = x$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(t_0+x)} dx \\ &= F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

### 5. 频移特性

若  $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

$$\text{则 } e^{j\omega_0 t} f(t) \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0) \quad (1-29)$$

$$\begin{aligned} \text{证: } \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_0 t} f(t)] e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

### 6. 巴塞瓦尔定理

若  $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

$$\text{则 } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (1-30)$$

此为计算非周期信号的能量公式。它表明作傅里叶分析时, 时域中所求得能量, 等于



各频率分量能量之和。

### 7. 卷积和相关特性

#### 两个函数的卷积运算

$$\begin{aligned}y(t) &= f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \\ &= f_2(t) * f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau\end{aligned}\quad (1-31)$$

#### 自相关函数 $R(\tau)$

在求函数 $f(t)$ 自身卷积时

$$y(t) = f(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

它的积分核中，有一个时间变量是倒置的。自相关运算和卷积运算不同之处在于积分核中时间变量不倒置。

$$\begin{aligned}R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t-\tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt\end{aligned}\quad (1-32)$$

自相关函数是偶函数： $R(\tau) = R(-\tau)$

若 $f(t)$ 是实变量 $t$ 的复数函数

$$\begin{aligned}\text{则 } R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t-\tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) f(t+\tau) dt\end{aligned}\quad (1-33)$$

#### 互相关函数 $R_{xy}(\tau)$

(1) 若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是时间变量的实函数，它们作相关运算；其互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 为：

$$\left. \begin{aligned}R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t+\tau) dt \\ R_{yx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) x(t+\tau) dt\end{aligned}\right\} \quad (1-34)$$

互相关运算不满足交换律，即

$$R_{xy}(\tau) \neq R_{yx}(\tau)$$

(2) 若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是时间变量 $t$ 的复函数，它们作相关运算，其中有一个函数要取共轭函数，其互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 为：

$$\begin{aligned}R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t-\tau) y(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t+\tau) dt\end{aligned}\quad (1-35)$$

#### 时域卷积定理

若  $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ ,  $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$

则  $y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow X(\omega)H(\omega)$  (1-36)

证：  $\mathcal{F}[x(t) * h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$