复旦大学数学系主编

常微分方程

尚汉冀编

上海科学技术出版社

常 微 分 方 程

复旦大学数学系 主编

尚汉冀 编

上海科学技术出版社

常微分方程

复旦大学数学系　主编

尚汉冀　编

责任编辑　赵序明

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　　江苏扬中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 4.75　字数 123,000

1987 年 7 月第 1 版　1987 年 7 月第 1 次印刷

印数 1－8,000

统一书号：13119·1379　　定价：1.10 元

内 容 提 要

本书是复旦大学数学系主编的一套数学教材中的一册. 主要内容包括: 一阶常微分方程, n 阶线性常微分方程, 常系数线性方程, 一阶常微分方程组, 幂级数解法, 数值解法.

本书简明扼要, 重点突出, 重视数值解法及应用. 适合于理工科、师范院校数学系以外的系科专业以及管理、经济等专业作教材(供授课 35 学时左右)或重要参考书用.

序

多年以来，我系一直在尝试着对数学专业以及计算数学、力学专业的教材进行改革．这项工作从六十年代一开始就着手进行了，在上海科学技术出版社的大力支持下，1960年出版了一套试用教材，并在此基础上经过修订，从1962年到1965年陆续出版了《数学分析》、《常微分方程》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》、《实变函数与泛函分析概要》等教材，为我系教材改革提供了一些经验．当时就数学教材提出的一些问题，如理论联系实际和教学内容现代化等问题，在今天也仍然是有意义的．

1980年，教育部颁发了部属综合性大学理科数学专业、计算数学专业的教学计划和各门课程的教学大纲．同时指出，执行教学计划和教学大纲应该体现“统一性与灵活性相结合的原则”．按照我们的体会，所谓统一性是指：教学计划和教学大纲是从总体上反映了教和学两个方面所应该达到的基本要求；而灵活性则是指在具体实施时应该从实际情况出发，在不降低基本要求的前提下，有所创新和改革．我们打算按照这一指导思想陆续编写一套教材．

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一套比较成熟的教材，实在不是一件轻而易举的事，它应该是一个长期努力的过程．这次编写只是作为这个过程的又一个新的开端．

数学学科与某些别的学科不同，它的基础知识相对地来说是比较成熟和稳定的．其中大量经典的内容，即使是按照现代科学技术的发展水平来看，也是必不可少的．这是一个基本的事实．是我们编写时选材的重要依据．但是我们还注意到，在各门基础课程的教材中应当防止片面追求自身的完备化，应当根据每门课程在整个教学计划中的作用和地位以及学时的安排，作整体的考虑．使各门教材内容的深度和广度互相衔接，协调一致，既能和教学计

划中的安排相一致，又符合学生学习过程中由浅入深的认识规律．我们希望做到各门课程的教材，都能在教学计划规定的学时数内完成教学．

对某些经典的内容，我们尝试按现代数学的观点加以处理，使思想更严谨、陈述更明确简炼，并起到承上启下的作用．在进行这种尝试的时候，力求使这些处理方法能为大多数教师所接受．正确处理好具体和抽象、特殊和一般、实际和理论的辩证关系．

不断总结课堂教学的经验，是编好教材的前提之一，这次编写的教材都经过多次的课堂教学实践．一般是先编成讲义，在教学过程中，检查交流，听取有关教师和学生的意见，不断改进，其目的是为了在保证教学要求的前提下，教师便于教，学生便于学．我们将按照各门教材在教学实践中的成熟程度，陆续交付出版．

编写一套适应于四个现代化发展需要的数学教材，是一项长期而又艰巨的任务．由于我们的水平有限，实践也还不够，教材中出现各种各样的缺点和错误在所难免，殷切期望专家和广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正，使我们的教材编写工作，日趋成熟．

上海科学技术出版社的同志对于我们的教材建设多年来一直给予密切配合和大力支持，我们表示衷心的感谢．

复旦大学数学系

1982. 4.

编者的话

在多年教学实践和多次修改讲义的基础上，我们编写了这套供高等学校非数学专业选用的高等数学教材．共包括以下五个分册：

《一元微积分》(陈开明编)；《多元微积分》(魏国华编)；《常微分方程》(尚汉冀编)；《线性代数》(陈开明编)；《概率论与数理统计》(陈开明编)．

根据我们的教学实践，以上各分册依次可供60学时，85学时、35学时、40学时、30学时左右教学之用．

随着科学技术的迅速发展及电子计算机的普及使用，在自然科学、工程技术乃至社会科学等各个领域中越来越广泛地应用近代数学和应用数学的成果．与此相适应，高等学校的许多非数学类专业对本专业的学生应具备的数学素质提出新的要求，要求高等学校的数学课程能在不增加或少增加教学时数的前提下，使学生能学到更丰富、更有用的数学知识；学到更强的运用数学工具的能力．我们就是基于这一精神编写这套教材的．

考虑到教材内容现代化的总趋势，这套教材除了在叙述表达方面注意了恰当地运用近代数学的观点和语言外，还注意到了调整教材中各部分内容的比例，协调了各部分内容的深度和广度．总的来说，与传统的高等数学教材相比，微积分部分内容作了合理压缩；而线性代数、常微分方程、概率论与数理统计等部分内容适当加强了．这套教材中还增添了一些与数值方法相联系的内容，以适应推广使用电子计算机的需要．

在本教材的编写风格上，我们力求做到线索清楚、组织科学、叙述准确、详简适当，以便于读者能抓住高等数学的中心内容，提高分析问题和解决问题的能力；有助于读者提高阅读与自学数学的能力，本教材配备的习题也力求有助于读者通过系统训练而获

得较好的分析与解题的能力.

这套教材适合于理工、师范(非数学类专业)、管理、经济等各类专业作教材或参考书用. 由于这些专业对数学内容的选择有很大的差异，为了方便于教学的选用，我们将这套教材分为五个分册，各分册之间既有联系又有相对独立性. 每分册的编排也尽量采用"分块结构"，尽量设置相对独立的章节. 有的独立性较强的或非基本内容的章节和习题，加上了*号，以示醒目. 不同专业使用这套教材时，可根据各自情况选用全部或部分；另外，也可供高等学校的一些进修班、培训班选用.

在教材的编写、修改及试教过程中，我们得到复旦大学中许多同事的帮助. 其中朱学炎、徐振远、陈惠江、王婉华、郑广平等老师给书稿提出了宝贵的修改意见；陆飞、黄云敏等老师协助做了一些编写工作，在此谨向上述同志表示衷心的感谢.

编　者　1986 年 8 月

目　录

第一章　一阶常微分方程

§1.1　微分方程的一般概念

在以往的数学课程中，我们经常接触到各种各样的方程，例如

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1.1}$$

是代数方程，求解此方程就是寻找满足(1.1)式的未知量 x. 又如在隐函数存在定理中，讨论如何从方程

$$F(x, y)=0 \tag{1.2}$$

中确定 y 为 x 的函数，这时对方程(1.2)来说，求解的不是某个未知量，而是未知函数 $y(x)$，这种方程称为*函数方程*.

在描述和研究许多科学技术问题中，还时常碰到另一种类型的方程，方程中不仅含有自变量和未知函数，还含有未知函数的导数(或微分)，这种方程就称为*微分方程*.

例如有一定数量的放射性元素镭，因不断放射出各种射线而逐渐减少其质量(这种现象称为*衰变*)，欲求其质量变化的规律. 为此，可设在任意时刻 t，镭的质量为 $x(t)$，根据物理规律，衰变率 $-\frac{dx}{dt}$ 与 $x(t)$ 成比例，故得到

$$\frac{dx}{dt}=-kx, \tag{1.3}$$

其中 k 为常数.

方程(1.3)中含有未知函数 $x(t)$ 的导数，因此它是微分方程.

又如以下几个方程也都是微分方程.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-e^y=0; \tag{1.4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\sin t; \tag{1.5}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-1)y=0; \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0. \tag{1.7}$$

如果在微分方程中，未知函数是一元函数，则相应的微分方程就称为*常微分方程*；如果未知函数是多元函数，方程中则含有未知函数的偏导数，这时相应的微分方程就称为*偏微分方程*. 例如(1.3)，(1.4)，(1.5)，(1.6)都是常微分方程，而(1.7)则是偏微分方程. 在本书中我们只讨论常微分方程.

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为这微分方程的阶. 例如常微分方程(1.3)、(1.4)是一阶的，(1.5)和(1.6)是二阶的，而偏微分方程(1.7)是四阶的.

讨论一个微分方程，主要的目的常常是要求出其中的未知函数，通常称为*求解*. 下面我们给出微分方程解的定义. 假如讨论一个 n 阶的常微分方程，其一般形式可以写为

$$F(t,\ x,\ x',\ x'',\ \cdots,\ x^{(n)})=0, \tag{1.8}$$

这里 t 是自变量，$x(t)$是未知函数，F 是 $n+2$ 元函数. 假如有某个函数 $x=\varphi(t)$，它在区间 $a<t<b$ 有定义，且有直到 n 阶的连续导数，并在区间 $a<t<b$ 中满足恒等式

$$F(t,\ \varphi(t),\ \varphi'(t),\ \varphi''(t),\ \cdots,\ \varphi^{(n)}(t))\equiv 0. \tag{1.9}$$

则称函数 $x=\varphi(t)$在区间 $a<t<b$ 中是方程(1.8)的解. 解 $x=\varphi(t)$在变量 t, x 平面上的几何图形是一条曲线，称为方程(1.8)的*积分曲线*.

例 1 求微分方程

$$\frac{dx}{dt}=2t \tag{1.10}$$

的解.

这个问题其实我们在微积分学中已经碰到过了，它实际上就是求函数 $2t$ 的原函数 $x(t)$，应当有

$$x=\int 2t\,dt=t^2+c, \tag{1.11}$$

其中 c 为任意常数，当 c 取任何值时，由(1.11)确定的 $x(t)$ 都是微分方程(1.10)的解．从这里可以看到，一个常微分方程可以有无穷多个解，常常表示成含有任意常数的形式．一般说来，n 阶常微分方程的解的表达式中可以含有 n 个任意常数，具有这样性质的解的表达式称为微分方程的通解．例如(1.11)就是(1.10)的通解．

根据具体问题的需要，有时要找某一微分方程的一个特定的解(称为特解)，这时就应确定通解中任意常数的值．为此需给出一定的条件，称为定解条件．例如要在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 中求方程(1.10)的满足条件

$$x(0)=0 \tag{1.12}$$

的特解 $x(t)$，这时(1.12)就是定解条件(如果将 t 看为时间，则 $t=0$ 即为所讨论的时间范围的初始时刻，因此，这样的定解条件也称为初始条件或初值条件)．如将(1.10)的通解表达式(1.11)代入(1.12)中，就得到 $c=0$，因而所求特解为 $x=t^2$．

求某个微分方程满足一定的定解条件的特解，这种问题叫做定解问题．上面所举的例子就是一个定解问题，它可以写成如下形式：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2t, \\ x\big|_{t=0}=0. \end{cases} \tag{1.13}$$

当定解条件是初始条件时，相应的定解问题称为初始问题或初值问题．如果定解条件给在自变量所在区间的终端，此种定解条件称为终端条件；而相应的定解问题称为终端值问题．

讨论定解问题的办法有两种：一种是先找出微分方程的通解，然后根据定解条件来确定任意常数，上面在解定解问题(1.13)时就采用这种做法．另一种是对于比较复杂、不易找出通解表达式的微分方程，也可设法直接求定解问题的解或近似解，例如本书后面要讨论的数值解法就是这样做的．虽然本书的主要篇幅仍用于介绍第一种方法，但第二种方法也是很有价值的，近代有很大的

发展.

§1.2　已解出导数的一阶方程

本章是讨论一阶常微分方程,它的一般形式可写为

$$F(x,\ y,\ y')=0, \tag{1.14}$$

其中 F 为三元函数.

在一定条件下,可以从(1.14)中确定 y' 为 x 与 y 的函数,即

$$y'=f(x,\ y), \tag{1.15}$$

此称为导数已解出的一阶方程,这一节就讨论(1.15).先对 $f(x,\ y)$ 的几种特殊形式来给出求通解的方法,然后对一般形式的 $f(x,\ y)$ 叙述(1.15)初值问题解的存在唯一性定理.

1. 变量可分离的方程

形状如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{1.16}$$

的微分方程称为变量可分离的方程,它又可改写为

$$\frac{1}{g(y)}\cdot dy=f(x)\cdot dx. \tag{1.17}$$

在方程(1.17)中,左端只含有变量 y 及其微分,右端只含有变量 x 及其微分,这样变量 x 和 y 就被分离开来(象这样一种处理方法称为"分离变量法",它对解常微分方程和偏微分方程都是有用的).现在将(1.17)的两端分别对各自的变量进行积分,就得到

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\cdot dx, \tag{1.18}$$

设 $\dfrac{1}{g(y)}$ 的原函数为 $G(y)+c_1$, $f(x)$ 的原函数为 $F(x)+c_2$, 其中 c_1 与 c_2 均为任意常数,则得

$$G(y)+c_1=F(x)+c_2, \tag{1.19}$$

或者

$$G(y)=F(x)+c_2-c_1=F(x)+c, \tag{1.20}$$

其中 c 为任意常数. 因为(1.20)是一阶常微分方程(1.16)的含有

一个任意常数的解，所以它就是(1.16)的通解[注1]. 不过在这种通解中，y 与 x 的关系是以隐函数形式出现的，故称为隐式通解.

如果 $G(y)$ 有单值反函数 $G^{-1}(y)$，则可从(1.20)中解得

$$y=G^{-1}(F(x)+c)=h(x,\ c), \tag{1.23}$$

这种通解就称为显式通解. 对形式比较复杂的方程，常常得不到显式通解，而只能得到隐式通解.

还需指出，在以上运算中，实际上假定 $g(y)\neq 0$，如果对于某个值 y_0，$g(y_0)=0$（即 y_0 是方程 $g(y)=0$ 的根），则显然可验证函数 $y\equiv y_0$ 必为微分方程(1.16)的一个特解，它一般不包括在通解(1.20)或(1.23)之中，可见某一微分方程的通解并不一定包含该微分方程的全部解.

例1 求方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1.24}$$

的通解.

解 分离变量，得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{1.25}$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.26}$$

由此可得隐式通解

$$\arcsin y=\arcsin x+c. \tag{1.27}$$

上式还可改写为

注1 在以上推导过程中曾采用将(1.17)两端分别对 y 和 x 积分这种“可疑”的做法，其实这样做是合理的，因为我们可验证由(1.20)确定的 $y(x)$ 确为(1.16)或(1.17)的解.

事实上，将(1.20)中的 y 看为 $y(x)$，并将(1.20)两端对 x 求导，就得:

$$\frac{dG}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dF}{dx}, \tag{1.21}$$

即

$$\frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx}=f(x). \tag{1.22}$$

可见 $y(x)$ 满足(1.17)或(1.16).

$$
\begin{aligned}
y &= \sin(\arcsin x + c) \\
&= \sin(\arcsin x)\cdot\cos c + \cos(\arcsin x)\sin c \\
&= x\cdot\cos c + \sqrt{1-x^2}\cdot\sin c.
\end{aligned} \tag{1.28}
$$

此为显式通解.

又 $g(y)=\sqrt{1-y^2}=0$ 有两个根 $y=1$ 和 $y=-1$，故 $y\equiv 1$ 和 $y\equiv -1$ 是(1.24)的两个特解.

例 2 求微分方程

$$x\cdot dx + y\cdot dy = 0 \tag{1.29}$$

满足条件

$$y|_{x=0}=1 \tag{1.30}$$

的特解.

解 由(1.29)可得

$$\int x\cdot dx = -\int y\cdot dy, \tag{1.31}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{-y^2}{2} + c, \tag{1.32}$$

$$\therefore \qquad x^2+y^2=2c=c_1. \tag{1.33}$$

其中 c_1 也为任意常数，此为隐式通解，再将条件(1.30)代入(1.33)，即得 $c_1=1$，故所求解为 $x^2+y^2=1$ 或 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

但满足条件(1.30)的解实际上只有

$$y=\sqrt{1-x^2}. \tag{1.34}$$

例 3 求方程

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.35}$$

的通解.

解 此方程的右端是一元函数 $g(u)$ 和 $u=\frac{y}{x}$ 的复合函数，如将 $g\left(\frac{y}{x}\right)$ 看为 x 和 y 的二元函数 $f(x, y)$，则对于任何 $\tau\neq 0$，有性质

$$f(\tau x, \tau y)\equiv f(x, y). \tag{1.36}$$

具有这种性质的函数称为零次齐次函数，故亦将方程(1.35)称为

齐次方程，齐次方程并不是变量可分离的方程，但是只要对未知函数作一变换，就可化为变量可分离的方程．事实上，如引进新的未知函数

$$u(x)=\frac{y(x)}{x}, \tag{1.37}$$

这时

$$y(x)=x\cdot u(x), \tag{1.38}$$

代入方程(1.35)，得

$$x\cdot\frac{du}{dx}+u=g(u), \tag{1.39}$$

或改写为

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}. \tag{1.40}$$

这就是变量可分离的方程，可用前述方法求通解，然后再将通解中的 $u(x)$ 用(1.37)代回去，就得到了关于 $y(x)$ 的通解表示式．

例如具体考察

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}, \tag{1.41}$$

通过变换(1.38)可化成

$$\frac{du}{dx}=\frac{2\sqrt{u}}{x}, \tag{1.42}$$

$$\int\frac{du}{2\sqrt{u}}=\int\frac{dx}{x}, \tag{1.43}$$

$$\sqrt{u}=\ln|x|+c, \tag{1.44}$$

即

$$\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln|x|+c, \tag{1.45}$$

$$\therefore\quad y=x\cdot(\ln|x|+c)^2. \tag{1.46}$$

这是方程(1.41)的通解．

由于(1.42)还有特解 $u\equiv0$，故相应地(1.41)也有特解 $y\equiv0$，它不包括在(1.46)之中．

在求齐次方程通解时，我们使用了引进一个新未知函数