

评价 相对有效性的 DEA方法

——运筹学的新领域

中国人民大学出版社

评价相对有效性的DEA方法

——运筹学的新领域

魏权龄 著

中国人民大学出版社

评价相对有效性的DEA方法

——运筹学的新领域

魏权龄 著

中国人民大学出版社出版发行
(北京西郊海淀路39号)

中国人民大学出版社印刷厂印刷
(北京鼓楼西大石桥胡同61号)

新华书店经销

开本: 787×1092毫米32开 印张: 4.5 插页1

1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷

字数: 94 000 册数: 1-4 000

ISBN 7-300-00450-4

O·18 定价: 1.65元

序

运筹学的产生和发展是与军事、生产、管理、经济等活动密切相关的。至今它的研究领域还在不断地扩大。这里介绍的“数据包络分析”(即DEA)就是运筹学的一个新的研究领域。它是研究具有相同类型的部门(或单位)间的相对有效性的十分有用的方法;也是处理一类多目标决策问题的,理论上非常完备的方法;更是经济理论中估计具有多个输入,特别是具有多个输出的“生产前沿函数”(也称生产前沿面)的有力工具。目前,它的应用领域正在不断地扩大,新的模型也在不断地完善和发展。我们希望这本小书能够有助于DEA方法在我国的应用和推广。

在编写本书的过程中,得到许国志教授、徐利治教授的热情指导和帮助,在此由衷地表示感谢。对美国德克萨斯(Texas)大学查恩斯(A.Charnes)教授、库伯(W.W.Cooper)教授给予的指导与合作研究表示衷心地感谢。在这里还要感谢我的学生崔宇刚和岳明同志,他们仔细地阅读了全部书稿,提出了很好的修改意见,并对个别章、节做了某些补充。

由于作者水平有限,书中肯定会有不足之处,请广大读者批评指正。

魏权龄

1987年9月,北京

目 录

序

第一章	绪论	1
第二章	评价规模有效性与技术有效性的DEA模型	6
§2.1	C^2R 模型和DEA有效性的定义	7
§2.2	具有非阿基米德无穷小的 C^2R 模型	18
§2.3	DEA有效性的经济含义	26
§2.4	DEA有效性与多目标规划pareto有效解的等价性	34
§2.5	判定DEA有效性的目标规划 (Goal Programming) 方法	53
§2.6	数据包络分析 (DEA) 的相对有效面	57
§2.7	决策单元在DEA的相对有效面上的“投影”	67
附注		77
第三章	评价相对有效性的其它几个DEA模型	80
§3.1	评价技术有效性的 C^2GS^2 模型	81
§3.2	锥比率的 C^2WH 模型	100
§3.3	具有无穷多个决策单元的 C^2W 模型	120
§3.4	模型 C^2R 、 C^2GS^2 、 C^2WH 、 C^2W 之间的关系	127
后记		132
参考文献		133

第一章 绪论

在人们的生产活动和社会活动中常常会遇到这样的问题：经过一段时间之后，需要对具有相同类型的部门或单位（称为决策单元）进行评价，其评价的依据是决策单元的“输入”数据和“输出”数据。输入数据是指决策单元在某种活动中需要耗费的某些量，例如投入的资金总额，投入的总劳力数，占地面积等等；输出数据是指决策单元经过一定的输入之后，产生的表明该活动成效的某些信息量，例如不同类型的产品数量，产品的质量，经济效益等等。再具体些说，譬如在评价某城市的高等学校时，输入可以是学校的全年的资金，教职员工的总人数，教学用房的总面积，各类职称的教师人数等等；输出可以是培养博士研究生的人数、硕士研究生的人数、大学生的人数，学生的质量（德、智、体），教师的教学工作量，学校的科研成果（数量与质量）等等。根据输入数据和输出数据来评价决策单元的优劣，即所谓评价部门（或单位）间的相对有效性。

1978年由著名的运筹学家查恩斯，库伯以及罗兹（E. Rhodes）首先提出了一个被称为数据包络分析（Data Envelopment Analysis，简称DEA）的方法，去评价部门间的相对有效性（因此被称为DEA有效）。他们的第一个模型被命名为C²R模型。从生产函数的角度看，这一模

型是用来研究具有多个输入、特别是具有多个输出的“生产部门”同时为“规模有效”与“技术有效”的十分理想且卓有成效的方法。1985年查恩斯、库伯、格拉尼 (B.Golany)、赛福德 (L.Seiford) 和斯图茨 (J.Stutz) 给出了另一个模型 (称为 C^2GS^2 模型), 这一模型是用来研究生产部门间的“技术有效”性的。1986年查恩斯、库伯和魏权龄为了更进一步地估计“有效生产前沿面”, 利用查恩斯、库伯和克达尼克 (K.Kortanek) 于1962年首先提出的半无限规划理论, 研究了具有无穷多个决策单元的情况, 给出了一个新的数据包络模型—— C^2W 模型。1987年查恩斯、库伯、魏权龄和黄志民又得到了称为锥比率的数据包络模型—— C^2WH 模型。这一模型可用来处理具有过多的输入及输出的情况, 而且锥的选取可以体现决策者的“偏好”。灵活地应用这一模型, 可以将 C^2R 模型中确定出的DEA有效决策单元进行分类或排队等等。这些模型以及新的模型正在被不断地完善和进一步发展。

上述的一些模型都可以看作是处理具有多个输入 (输入愈小愈好) 和多个输出 (输出愈大愈好) 的多目标决策问题的方法。可以证明, DEA有效性与相应的多目标规划问题的pareto有效解 (或非支配解) 是等价的。

数据包络分析 (即 DEA) 可以看作是一种统计分析的新方法。它是根据一组关于输入-输出的观察值来估计有效生产前沿面的。在经济学和计量经济学中, 估计有效生产前沿面, 通常使用统计回归以及其它的一些统计方法, 这些方法估计出的生产函数并没有表现出实际的前沿面, 得出的函数实际上是非有效的。因为这种估计是将有效决策单元与非

有效决策单元混为一谈而得出来的。在有效性的评价方面，除了DEA方法之外，还有其它的一些方法，但是那些方法几乎仅限于单输出的情况。相比之下，DEA方法处理多输入、特别是多输出的问题的能力是具有绝对优势的。并且，DEA方法不仅可以用线性规划来判断决策单元对应的点是否位于有效生产前沿面上，同时又可获得许多有用的管理信息。因此，它比其它的一些方法（包括采用统计的方法）优越，用处也更广泛。

数据包络分析是运筹学的一个新的研究领域。查恩斯和库伯等人的第一个应用DEA的十分成功的案例，是在评价为弱智儿童开设公立学校项目的同时，描绘出可以反映大规模社会实验结果的研究方法。在评估中，输出包括“自尊”等无形的指标；输入包括父母的照料和父母的文化程度等，无论哪种指标都无法与市场价格相比较，也难以轻易定出适当的权重（权系数），这也是DEA的优点之一。

DEA的优点吸引了众多的应用者，应用范围已扩展到美国军用飞机的飞行、基地维修与保养，以及陆军征兵、城市、银行等方面。目前，这一方法应用的领域正在不断地扩大。它也可以用来研究多种方案之间的相对有效性（例如投资项目评价）；研究在做决策之前去预测一旦做出决策后它的相对效果如何（例如建立新厂后，新厂相对于已有的一些工厂是否有效）。DEA模型甚至可以用来进行政策评价。

最引人注目的研究是把DEA与其它评价方法进行比较。例如将DEA应用于北卡罗来纳州各医院的有效性评价。已有的按计量经济学方式给出的回归生产函数认为，此

例中不存在规模收益。DEA 的研究发现, 尽管使用同样的数据, 回归生产函数不能象DEA 那样正确测定规模收益。其关键在于(a)DEA和回归方法虽然都使用给定的同样数据, 但使用方式不一样; (b)DEA 致力于每个单个医院的优化, 而不是对整个集合的统计回归优化。在其它的研究中, 例如在评价医院经营有效性时, 将DEA与马萨诸塞州有效性评定委员会使用的比例方法进行了比较, 当使用模拟方法对DEA 进行检验后认为, 尽管由回归函数产生的数据有利于回归方法的使用, 但是DEA方法显得更有效。

DEA方法和模型, 以及对DEA 方法的理解和应用还在不断地发展和深入。除了上面提到的新的模型 C^2GS^2 、 C^2W 和 C^2WH 模型外, 在具体使用DEA 方法时, 例如“窗口分析”方法, 使DEA 的应用范围拓广到动态情形; 将DEA应用于决策单元为私人部门(商业公司)时, 各决策单元之间存在着激烈的相互竞争作用等情况。

特别值得指出的是, DEA 方法是纯技术性的, 与市场(价格)可以无关。可以预言, 这一方法在我们社会主义国家也会得到广泛应用。

这本书的以下两章将介绍四个DEA 模型。第二章讲述 C^2R 模型。所需预备知识只限于线性规划以及多目标规划的一些基本概念。考虑到DEA 方法是运筹学的一个新的研究领域, 目前参考资料还不是很多, 因此本章的叙述将尽量做到系统与完整, 当然, 也注意到了数学的严密性。第三章介绍三个DEA模型: C^2GS^2 模型, C^2WH 模型和 C^2W 模型。其中后两个模型是作者在德克萨斯大学(奥斯汀)访问、工作期间与查恩斯教授和库伯教授以及他们的攻读博士学位的中国

学生们共同研究的成果。这部分内容较多地涉及到数学规划中关于半无限规划、锥对偶,以及多目标规划非支配解的基本定理等专题,本书基本上不进行数学上严格的推导与论证,有兴趣的读者请见参考文献[14],[13]以及[17]—[24]。

第二章 评价规模有效性与技术有效性的DEA模型

本章系统地论述评价部门间的相对有效性的 C^2R 模型。原始的 C^2R 模型是一个分式规划,当使用Charnes-Cooper变换时,可将分式规划化为一个等价的线性规划问题。再利用线性规划的对偶理论,可以得到一个对偶规划。该对偶规划是有其经济含义的,它可用来判断决策单元对应的点是否位于生产可能集的前沿面上(称为生产前沿面)。这里所说的生产前沿面,实际上是指由观察到的有限多个决策单元的活动信息所得到的经验的生产前沿面,它是决策单元对应的点的数据包络面的一部分。可见,该方法被称为数据包络分析(即DEA)是名符其实的。 C^2R 模型所对应的生产可能集是一个凸锥,因此它的生产前沿面上的点不仅仅是技术有效的,也是规模有效的。

从多目标规划的角度看,生产前沿面实际上就是对应的线性多目标规划问题的pareto有效解所构成的面。在这一章中我们将以较多的篇幅论述DEA有效性与pareto有效解之间的等价关系,从而可以看出,DEA方法也是处理一类多目标决策问题的、具有很完备的理论基础的方法。

§ 2.1 C²R模型和DEA有效性的定义

假设有 n 个部门或单位 [称为决策单元 (Decision Making Units)], 每个部门都有 m 种类型的“输入” (表示该部门对“资源”的耗费) 以及 s 种类型的“输出” (表示该部门消耗了“资源”之后表明“成效”的信息量), 它们由表2.1给出。

表2.1

		1	2	...	j	...	n (决策单元)	
v_1	1	→ x_{11} x_{12} ... x_{1j} ... x_{1n} x_{21} x_{22} ... x_{2j} ... x_{2n} ... x_{m1} x_{m2} ... x_{mj} ... x_{mn}						
v_2	2							
$\vdots$	$\vdots$							
v_m	m							
		y_{11} y_{12} ... y_{1j} ... y_{1n} y_{21} y_{22} ... y_{2j} ... y_{2n} ... y_{s1} y_{s2} ... y_{sj} ... y_{sn}						→ 1 → 2 ⋮ → s u_1 u_2 ⋮ u_s

其中

- x_{ij} = 第 j 个决策单元对第 i 种类型输入的投入总量,
- $x_{ij} > 0$,
- y_{rj} = 第 j 个决策单元对第 r 种类型输出的产出总量,
- $y_{rj} > 0$,
- v_i = 对第 i 种类型输入的一种度量 (或称权),
- u_r = 对第 r 种类型输出的一种度量 (或称权),

$$i = 1, 2, \dots, m, r = 1, 2, \dots, s,$$

$$j = 1, 2, \dots, n。$$

($x_{i,}$ 及 $y_{r,}$ 为已知的数据, 它可以根据历史的资料或预测的数据得到; v_i 及 u_r 为变量。) 对应于权系数

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T, u = (u_1, u_2, \dots, u_s)^T,$$

每个决策单元都有相应的效率评价指标

$$h_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r,j}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i,j}}, \quad j = 1, 2, \dots, n。$$

我们总可以适当地选取权系数 v 及 u , 使其满足

$$h_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n。$$

现在对第 j_0 个决策单元进行效率评价 ($1 \leq j_0 \leq n$), 以权系数 v 及 u 为变量, 以第 j_0 个决策单元的效率指数为目标, 以所有决策单元 (也包括第 j_0 个决策单元) 的效率指数

$$h_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

为约束, 构成如下的最优化模型

$$(C^2R) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r,j_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i,j_0}} \quad \text{①} \\ \text{s.t.} \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r,j}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i,j}} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T \geq 0 \quad \text{②} \\ u = (u_1, u_2, \dots, u_s)^T \geq 0。 \end{array} \right.$$

不难看出, 利用上述模型来评价决策单元 j_0 是不是有效, 是相对于其它所有决策单元而言的。使用矩阵符号, 有

$$(\bar{P}) \begin{cases} \max & \frac{u^T y_0}{v^T x_0} = V_{\bar{P}} \textcircled{3} \\ \text{s.t.} & \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & v \geq 0 \\ & u \geq 0, \end{cases}$$

其中

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})^T, \quad j = 1, 2, \dots, n_0$$

上述问题是一个分式规划。使用 Charnes-Cooper 变换, 可以化为一个等价的线性规划问题 (见参考文献[2])。为此, 令

$$t = \frac{1}{v^T x_0}, \quad \omega = tv, \quad \mu = tu,$$

则有

$$\mu^T y_0 = \frac{u^T y_0}{v^T x_0},$$

①③ 本书中为方便起见, 记 y_{r, j_0} 为 y_{r0} , x_{i, j_0} 为 x_{i0} ; 类似地, 记 $y_0 = y_{j_0}$, $x_0 = x_{j_0}$ 。

② $v \geq 0$ 表示 v 的每个分量 $v_i \geq 0$, 并且至少存在某一分量 $v_{i_0} > 0$ 。

$$\frac{\mu^T y_j}{\omega^T x_j} = \frac{u^T y_j}{v^T x_j} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\omega^T x_0 = 1,$$

$$\omega \geq 0, \mu \geq 0.$$

因此分式规划变为

$$(P) \begin{cases} \max & \mu^T y_0 = V_P \\ \text{s.t.} & \omega^T x_j - \mu^T y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & \omega^T x_0 = 1 \\ & \omega \geq 0 \quad \mu \geq 0. \end{cases}$$

(这里, 由于规划(P)存在使得目标函数 $\mu^T y_0$ 为正数的可行解, 因此目标函数的最优值也为正, 故(P)的最优解中必满足 $\mu \geq 0$ 。此外, 由 $\omega^T x_0 = 1$ 知 $\omega \geq 0$ 。因此可将 $\mu \geq 0, \omega \geq 0$ 分别改写为 $\mu \geq 0, \omega \geq 0$ 。)

分式规划 $(\bar{P})$ 与线性规划(P)是等价的, 由下面定理给出。

定理1 分式规划 $(\bar{P})$ 与线性规划(P)在下述意义下等价。

(i) 若 v^0, u^0 为 $(\bar{P})$ 的最优解, 则

$$\omega^0 = t^0 v^0, \mu^0 = t^0 u^0$$

为(P)的最优解, 并且最优值相等, 其中

$$t^0 = \frac{1}{v^{0T} x_0}.$$

(ii) 若 ω^0, μ^0 为(P)的最优解, 则 ω^0, μ^0 也为 $(\bar{P})$ 的最优解, 并且最优值相等。

证明 首先证(i)。设 v^0, u^0 为 $(\bar{P})$ 的最优解。对于

(P) 的满足 $\omega \geq 0, \mu \geq 0$ 的可行解, 不难看出它也是 $(\bar{P})$ 的可行解, 故 (由 $\omega^T x_0 = 1$)

$$\frac{u^{0T} y_0}{v^{0T} x_0} \geq \frac{\mu^T y_0}{\omega^T x_0} = \mu^T y_0,$$

又由

$$\frac{u^{0T} y_0}{v^{0T} x_0} = \mu^{0T} y_0,$$

以及

$$\omega^0 = t^0 v^0 = \frac{v^0}{v^{0T} x_0},$$

$$\mu^0 = t^0 u^0 = \frac{u^0}{v^{0T} x_0}$$

为 (P) 的可行解, 因此 ω^0, μ^0 为 (P) 的最优解, 并且两问题的最优值

$$V_{\bar{P}} = \frac{u^{0T} y_0}{v^{0T} x_0} = \mu^{0T} y_0 = V_P.$$

然后证 (ii)。设 ω^0, μ^0 为 (P) 的最优解。可知 $\omega^0 \geq 0, \mu^0 \geq 0$, 并且是 $(\bar{P})$ 的可行解。此外, 对于 $(\bar{P})$ 的任意可行解 v, u , 不难看出

$$\omega = tv, \mu = tu$$

也为 (P) 的可行解, 其中

$$t = \frac{1}{v^T x_0}.$$

于是有

$$\mu^{0T} y_0 \geq \mu^T y_0 = \frac{u^T y_0}{v^T x_0},$$

因为 $\omega^{0T} x_0 = 1$ ，故

$$\frac{\mu^{0T} y_0}{\omega^{0T} x_0} = \mu^{0T} y_0.$$

因此，对于 $(\bar{P})$ 的任意可行解 v, u 均有

$$\frac{\mu^{0T} y_0}{\omega^{0T} x_0} \geq \frac{u^T y_0}{v^T x_0},$$

知 ω^0, μ^0 也为 (P) 的最优解，并且两问题的最优值

$$V_{\bar{P}} = \frac{\mu^{0T} y_0}{\omega^{0T} x_0} = \mu^{0T} y_0 = V_P. \quad \text{Q.E.D.}$$

线性规划 (P) 的对偶规划为

$$(D) \begin{cases} \min \theta = V_D \\ \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j + s^- = \theta x_0 \\ \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j - s^+ = y_0 \\ \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ s^+ \geq 0 \quad s^- \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

有如下的定理。

定理2 线性规划 (P) 和 (D) 都存在最优解，并且最优值 $V_D = V_P \leq 1$ 。

证明 对于线性规划 (P) ，令

$$\omega^* = \frac{x_0}{\|x_0\|^2},$$