册

微积分题解

WEIJIFEN TIJIE

石殿璋 编

陕西科学技术出版社

微积分题解

下册

石殿璋　编

陕西科学技术出版社

微积分题解

下　册

石殿璋编

陕西科学技术出版社出版发行

（西安北大街131号）

新华书店经销　　陕建总公司印刷厂印刷

787×1092毫米　32开本　30.75印张　字数658千字

1987年6月第1版　1987年6月第1次印刷

印数1—4500

统一书号：7202·107　　定价：7.55元

编者说明

(1) 微积分，是目前我国工科院校《高等数学》这门重要基础理论课的主要组成部分。《微积分题解》的编写，目的在于帮助工科院校（包括电大、函授与理科相近专业）学生学习这部分内容，同时也为大专及中学教师进行微积分教学提供一些辅导参考资料。

(2) 本书内容（基本概念、基本理论、基本方法）的编排取舍基本参照1980年6月工科院校数学教材编审委员会扩大会议通过的《高等数学教学大纲(试行草案)》，个别地方略有伸缩或侧重。

(3) 本题解着眼于帮助读者学习有关教材，着眼于培养学生的比较熟练的运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力、几何直观能力和空间想象能力，从而使学生受到数学分析方法和运用这些方法去解决几何、力学和物理等实际问题的初步训练，为学习后继课程和进一步扩大数学知识奠定基础。

(4) 全书共分五篇。上册内容包括：预篇分析引论，第一篇一元函数微分学。下册内容包括：第二篇一元函数积分学，第三篇多元函数微积分学，补篇包括无穷级数和常微分方程。

每篇按内容分为若干章。为便于复习总结，巩固所学，突出重点，加强练习，将每章又划分为若干大段。每一大段均包括三部分内容：其一，提要，要求读者在阅读这部分内容之前已初步系统地读过教材有关章节，或者根据提要的指点，去补读教材有关章节。其二，例题，建议读者看到题目

尽量先自己试做，然后再与本题解提供的解法相对照，日久天长，必将有长足的进步。其三，习题，这是留给读者独立完成的。为便于读者自学，每章最后有该章的习题解答供参考。

(5) 题目是从国内各种教材、习题集及某些外国教材收集、整理编写的。考虑到题解的特点和篇幅，所收题目没有面面俱到，而侧重于重点和难点，侧重于解决初学者容易出现的问题。

(6) 西安冶金建筑学院高等数学教研室刘则刚主任在百忙中审阅了全部初稿，提出了许多宝贵意见。张英华同志为本书绘制大部分插图，杨泮池、张陵、赵冬、郑森泉等同志协助进行了誊写工作，对此表示衷心感谢。

(7) 由于水平所限，缺乏经验，不妥和错误之处一定很多，敬请读者给予批评指正。

编　者

1981 年 4 月

目　录

第二篇　一元函数积分学

第六章　不定积分

第七章　定 积 分

第八章　定积分的应用

第三篇 多元函数微积分学

第九章 多元函数微分学

第十章 重积分

第十一章 曲线积分与曲面积分

补　　篇

第十二章　常微分方程

第十三章　无穷级数

第二篇　一元函数积分学

一元函数积分学有两个最基本的概念，就是不定积分和定积分．它们是分别针对解决两类不同的问题而引出的：不定积分，是为了解决从某函数的导数去寻求“原函数”的问题；而定积分则是为了确定函数在某区间上的“和式的极限”问题．

不定积分与定积分也象导数与微分那样，虽然是两个不同的概念，但在运算方面却有着密切联系．通常把求不定积分的运算称为积分法．读者应通过做一定数量的习题来熟练不定积分的求法和积分表的用法，以便给学好积分学在运算方面打下必要的基础．

第六章　不定积分

学习本章除要求掌握有关的基本概念和知识外，要着重通过做一定数量的习题，反复思考，不断地归纳、总结和积累经验，较为熟练地掌握积分法．

积分法是微分法的逆运算．积分法的问题在原则上远比微分法的问题困难得多．这首先是由于这两个问题在逻辑上的性质的差异：导数的定义带有“构造性”，即导数被直接规定为某些确定的运算加在已知函数上的结果；而不定积分

的定义却没有任何构造性的成份，它没有告诉我们应该怎样去求不定积分，甚至于没有告诉我们应该怎样着手这项工作．正因为如此，对于积分的运算还没有一整套的法则．尽管如此，经过努力还是可以积分足够多的函数，而这些函数恰是经常碰到的函数．为能较熟练地掌握积分法，建议读者注意以下三点：

第一，要熟记必要的基本积分表．虽然欲求的积分往往不和表上的类型相同，但各种积分法都是通过改变被积函数的"构造"，最后化成表上的类型，然后再按表求出而奏效．

第二，要掌握最常用的"化法"，主要地有三种：（1）直接或间接（先将被积函数作恒等变形）用分解积分法；（2）换元积分法；（3）分部积分法．

第三，掌握某些常用类型的被积函数（如有理函数，……）的一般性积分法．当然，适用于某种类型被积函数的一般性积分法，对于属于该类型的某个特定的积分不一定是最好的方法．因此，在掌握一般性方法的前提下，还是应遵循具体地分析具体的情况的原则找出合适的积分法．为此，平时做题时尽量一题多解，注意比较，掌握技巧．

Ⅰ．不定积分的概念、性质和基本积分表

【提要】

(1) 原函数

1)定义：设 $f(x)$ 是定义在某区间 X 上的已知函数．如果存在函数 $F(x)$，使之对于每一 $x\in X$ 都有

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad dF(x)=f(x)dx,$$

则称函数 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个原函数，或简称为

$f(x)$的原函数.

这里的区间X可以是有限的，也可以是无限的；可以是开的，也可以是闭的，或者半开半闭的.

2)[定理] 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在X上的一个原函数，则 $F(x)+C$ 在C为任何常数时也必为$f(x)$的原函数；而且$f(x)$的每个原函数都可以表示成这个形式.

由定理易知，任何两个原函数之差等于常数.如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(x)+C$（C是任意常数）就是$f(x)$的原函数全体.

(2) 不定积分的定义

函数$f(x)$的原函数的全体称为$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)dx$.（其中符号$\int$称分积分号，$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式，而x称为积分变量.）

(3) 不定积分的性质

1)如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则有

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

这里C是任意常数，称为积分常数.

$y=F(x)$的图象称为函数$f(x)$的积分曲线.积分曲线上任一点处的切线斜率$F'(x)$恰等于被积函数$f(x)$在相应点x处的函数值. 而不定积分$\int f(x)dx$在几何上表示积分曲线族. 对于同一个x值，各积分曲线的切线互相平行，族中任一条积分曲线可由另一条积分曲线沿y轴平移得到.

2)求不定积分与求导数（或微分）是互逆的运算，即

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x) \quad 或 \quad d\int f(x)dx=f(x)dx;$$

$$\int f'(x)dx=f(x)+C \quad 或 \quad \int df(x)=f(x)+C.$$

(4) 基本积分表

1) $\int 0\,dx=C$;

2) $\int 1\,dx=x+C$;

3) $\int x^{\mu}dx=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C \quad (\mu\neq-1)$;

4) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$;

5) $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$，特别地，$\int e^{x}dx=e^{x}+C$;

6) $\int \sin x dx=-\cos x+C$;

7) $\int \cos x dx=\sin x+C$;

8) $\int \mathrm{tg} x dx=-\ln|\cos x|+C$;

9) $\int \mathrm{ctg} x dx=\ln|\sin x|+C$;

10) $\int \sec x dx=\ln|\sec x+\mathrm{tg} x|+C$;

11) $\int \csc x dx=\ln|\csc x-\mathrm{ctg} x|+C$;

12) $\int \sec^2 x dx=\mathrm{tg} x+C$;

13) $\int \csc^2 x dx=-\mathrm{ctg} x+C$;

14) $\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + C$;

15) $\int \csc x \operatorname{ctg} x dx = -\csc x + C$;

16) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$

或 $-\frac{1}{a} \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a} + C$;

17) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$;

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ 或 $-\arccos \frac{x}{a} + C$;

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln |x + \sqrt{x^2+A}| + C$;

20) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;

21) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

为能熟练而又准确地使用公式，要注意公式的比较和联系．比如导数公式与积分公式的比较：象$(\sin x)' = \cos x$，而$\int \sin x dx = -\cos x + C$；$(a^x)' = a^x \ln a$，而$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$，等等．再如同类函数的积分公式的比较：象$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$，而$\int \cos x dx = \sin x + C$；$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$，而$\int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C$，等等．

【例题】

6.1.1. 验证：$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\mathrm{tg}x-\sec x+C$.

证 根据不定积分的定义，欲证上述结果的正确性，只须证明 $(\mathrm{tg}x-\sec x)'=\frac{1}{1+\sin x}$. 事实上，

$$(\mathrm{tg}x-\sec x)'=\sec^2x-\sec x\,\mathrm{tg}x=\frac{1}{\cos^2x}-\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{1-\sin x}{1-\sin^2x}=\frac{1}{1+\sin x}.$$

由于同一个函数的不定积分可以通过不同的形式表出(参看下面的例题 6.1.2.)，上述验证方法，在判断积分结果是否正确时，是很根本的.

6.1.2. 甲由 $(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$ 推得 $\int\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arc\ tg}x+C$；而乙由 $(-\mathrm{arcctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$ 推得 $\int\frac{dx}{1+x^2}=-\mathrm{arc\ ctg}x+C$. 这两个结果有无矛盾？为什么？

解 两个结果是一致的，只是表达形式不同. 这是因为不定积分 $\int\frac{dx}{1+x^2}$ 是函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 的原函数的全体，而根据提要中(1)的定理：如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ (C 是任意常数)就是体 $f(x)$ 的原函数全体. 既然 $\mathrm{arctg}x$ 与 $-\mathrm{arcctg}x$ 都是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的原函数，那么 $\mathrm{arctg}x+C$ 与 $-\mathrm{arcctg}x+C$ 便都表示 $\frac{1}{1+x^2}$ 的原函数的全体——不定积分. (事实上，由 $\mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$ 可知，$\mathrm{arctg}x$ 与 $-\mathrm{arcctg}x$ 只差一个常数.)

6.1.3. 求下列不定积分：

(1) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$;　　(2) $\int 3^x e^x dx$.

解 (1) $\because$ $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=x^{\frac{7}{8}}$,

$$\therefore \int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx=\int x^{\frac{7}{8}}dx$$

$$=\frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1}+C=\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C.$$

(2) 被积函数是两个指数函数的乘积，不能直接套用基本积分表，但可先把被积函数作恒等变形，使之成为表上有的形式：

$$\because \quad 3^x e^x=(3e)^x,$$

$$\therefore \int 3^x e^x dx=\int(3e)^x dx=\frac{(3e)^x}{\ln(3e)}+C \quad (\text{公式}5)$$

$$=\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C.$$

6.1.4. 试求满足下列两个条件的函数 $f(x)$：

1° $f'(x)=\cos x$;　　2° $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

解 满足条件 1° 的全体为

$$f(x)=\int\cos x dx=\sin x+C,$$

为使 $f(x)$ 还满足条件 2°，应取积分常数 C 满足

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+C=0,$$

$$\therefore \quad C=-1,$$

从而 $$f(x)=\sin x-1.$$

√ 6.1.5. 试证函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 当\ x\neq 0;\\ 1, & 当\ x=0\end{cases}$$

在$(-\infty, +\infty)$没有原函数.

证 用反证法. 假若$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$有原函数$F(x)$，则有

$$F'(x)=f(x)\quad x\in(-\infty, +\infty),$$

即$F(x)$应以所给函数$f(x)$为其导数，从而当$x>0$时，$F(x)=\int 0\,dx=C$；当$x<0$时，$F(x)=\int 0\,dx=C^*$. 但$F(x)$在$(-\infty, +\infty)$连续（原函数在所论区间可导，于是必连续！），因而$F(x)$在$x=0$处连续，该有

$$F(0-0)=F(0+0)=F(0),$$

$$\therefore\qquad C=C^*=F(0),$$

即$F(x)\equiv C$. 于是$F'(0)=f(0)=0$，这与条件$f(0)=1$相矛盾. 因此$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$没有原函数. 证完.

【习题 6－1】

1. 试证：函数$F_1(x)=(e^x+e^{-x})^2$和$F_2(x)=(e^x-e^{-x})^2$是同一函数的原函数.

2. 求过点$(2, 5)$，且其上点(x, y)处的切线斜率为$2x$的曲线方程.

3. 试证：如果被积函数可以写成$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$的形式，则有

$$\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\ln|g(x)|+C.$$

4. 用上题的结果，求下列不定积分：

(1) $\int \operatorname{ctg} x dx$;　(2) $\int \frac{dx}{x+a}$;　(3) $\int \frac{2x}{x^2+4} dx$;

(4) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$;　(5) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} -\sin x, & x \geqslant 0; \\ x, & x<0, \end{cases}$

试求$\int f(x) dx$.

6. 求不定积分 $\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{-3x} dx$.

Ⅱ. 分解积分法

【提要】

(1) [定理]如果在同一个区间讨论的函数$f_1(x), f_2(x)$, …, $f_n(x)$中的每一个在该区间都有原函数，则有

$$\int [k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+\cdots+k_n f_n(x)] dx$$
$$=k_1 \int f_1(x) dx+k_2 \int f_2(x) dx+\cdots+k_n \int f_n(x) dx,$$

这里的 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是实常数，且至少有一个异于零.

(2) 根据上述定理，如果被积函数

$$f(x)=k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+\cdots+k_n f_n(x),$$

或经过恒等变形化成这种形式，且其中的 $f_1(x), f_2(x), \cdots$, $f_n(x)$的不定积分可以从基本积分表查出或用别的方法积出，则$\int f(x) dx$ 便可用定理中的公式逐项积分求出，这就是分解积分法.