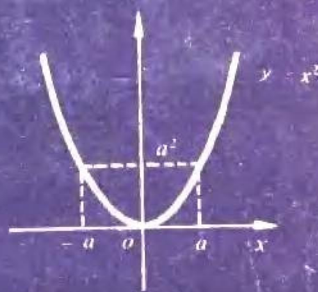
工科大学数学丛书

# 高等数学

GAODENGSHUXUE

祝肇栋 · 吕沅熙 等编

下




天津大学出版社

工科大学数学丛书

# 高 等 数 学

（下 册）

祝肇栋 吕沅熙 编



天 津 大 学 出 版 社

1 9 8 8. 2.

## 内容提要

本书参照高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的高等数学课程教学基本要求编写，分上、下册出版。下册内容包括矢量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分及曲面积分、级数、微分方程等六章。

本书可作高等工科院校本科生教材，也可供工程技术人员参考。

工科大学数学丛书
高等数学
（下册）
祝肇栋　吕沅熙　编
※
天津大学出版社出版
（天津大学内）
河北省永清县印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行
※
开本：850×1168毫米 1/32　印张：13¼　字数：350千字
1988年2月第一版　1988年2月第一次印刷
印数：1-10000
ISBN 7-5618-0014-2/O·1
定价：2.15元

# 目　录

# 第七章　矢量代数与空间解析几何

矢量是研究物理、力学的重要工具，在数学学科研究中也有广泛应用。

本章介绍矢量的基本概念和矢量的加法、减法、乘法等运算，并应用矢量研究空间解析几何。

## §7.1　矢量概念及矢量的加减运算

### 7.1.1 矢量的概念

在物理学和工程技术中，有些物理量如温度、时间、面积、密度和能量等，只有大小，没有方向，这一类量叫做**数量**或**标量**；还有一类物理量如位移、速度、力、冲量和电场强度等，除了大小之外，还有方向，这一类量叫做**矢量**或**向量**。

以$A$为起点，$B$为终点，方向从$A$指向$B$的有向线段就表示一个矢量（图7—1），记为$\overrightarrow{AB}$。有时也用黑体字母$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$等作为矢量的记号，书写时为$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$。

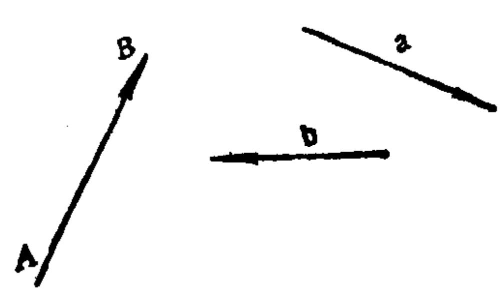


图7—1

有向线段的长度叫做矢量的**模**，表示矢量的大小。矢量$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$和$\overrightarrow{AB}$的模分别记作$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$和$|\overrightarrow{AB}|$。模等于1的矢量叫做**单位矢量**。模等于零的矢量叫做**零矢量**，记作$\boldsymbol{0}$或$\vec{0}$。零矢量没有确定的方向，也可说零矢量的方向是任意的。

两个矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，如果方向相同且模相等，就说这两个**矢量**

相等，记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。根据以上规定，两个矢量相等，并不需要它们在位置上完全重合。把一个矢量平行移动到空间任何位置，所得矢量与原矢量仍相等。因此这种矢量叫做**自由矢量**。如不另外声明，本章研究的矢量都是自由矢量。

### 7.1.2 矢量的加减运算

由物理实验知，力、速度和位移都可以合成。矢量的加法就是从这些量的合成法则抽象出来的运算。

**1. 矢量的加法** 设有两个力$\boldsymbol{F}_1=\overrightarrow{OA}$和$\boldsymbol{F}_2=\overrightarrow{OB}$作用于$O$点。此二力的合力$\boldsymbol{F}$是以$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形的对角线矢量$\overrightarrow{OC}$(图7—2)。记为

$$\boldsymbol{F}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2.$$

$\boldsymbol{F}$是$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$的合力或叫做$\boldsymbol{F}_1$与$\boldsymbol{F}_2$的和，而$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$则是$\boldsymbol{F}$的两个分力。

力的合成法则（平行四边形法则）也适用于速度、位移等物理量。总结这些物理量所遵循的规律，便可给出矢量的加法定义。

**定义** 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$是两个矢量，经平行移动后使这两个矢量的起点重合于一点$O$，以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为邻边作平行四边形，则称对角线矢量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$为矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和(图7—3)。记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

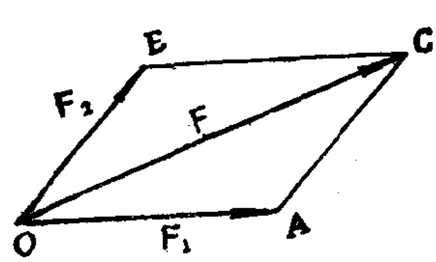



图7—2

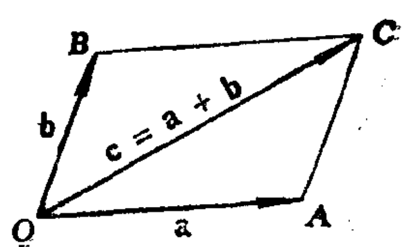



图7—3

按上述定义求矢量和的方法叫做**平行四边形法**。

由图7—3，因$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$，所以，也可将$\boldsymbol{b}$的起点接在$\boldsymbol{a}$的终点上，然后以$\boldsymbol{a}$的起点为起点，以$\boldsymbol{b}$的终点为终点作矢量$\boldsymbol{c}$（图7—4），容易看出，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。这种求矢量和的方法叫做**三角形法**。

由求矢量和的三角形法可以推出求多于两个矢量的和的方法。例如，求三个矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的和时，可将相加的各矢量平行移动，使首尾相接，然后以第一个矢量的起点为起点、以最后一个矢量的终点为终点作矢量，即为所求的和矢量（图7—5）。由图可见，和矢量与首尾相接的矢量折线组成一封闭多边形。这种作折线的封闭线的方法适用于求空间任意多个矢量的和。

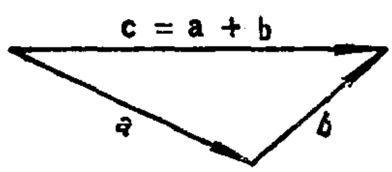



图7—4

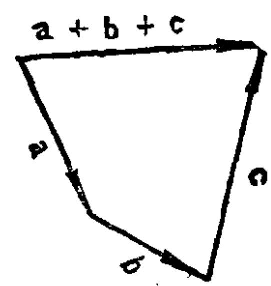



图7—5

容易证明，矢量的加法满足以下规律：

（i） 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（ii） 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

**2．矢量的减法** 与数量的减法相类似，定义矢量的减法为矢量加法的逆运算。

**定义** 若矢量$\boldsymbol{b}$与矢量$\boldsymbol{c}$的和为矢量$\boldsymbol{a}$，则称矢量$\boldsymbol{c}$为矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差，记为：

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

即：若$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

与矢量$\boldsymbol{b}$方向相反且模相等的矢量称为$\boldsymbol{b}$的**逆矢量**。$\boldsymbol{b}$的逆矢量记为$-\boldsymbol{b}$。例如在力学中，力$\boldsymbol{F}$与反作用力$-\boldsymbol{F}$互为逆矢量。

用作图法可知$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$（图7—6），即$\boldsymbol{a}$减$\boldsymbol{b}$等于$\boldsymbol{a}$

加 $(-\boldsymbol{b})$. 这与熟知的数量的代数法则一致。因此，应用逆矢量的概念，可以把矢量减法变成被减矢量与减矢量的逆矢量的加法来运算。

### 7.1.3 标量与矢量的乘法

由矢量加法知$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$仍为一矢量，这矢量与$\boldsymbol{a}$平行且同向，它的模是$\boldsymbol{a}$的模的 2 倍，可记为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}$. $2\boldsymbol{a}$是标量 2 与矢量$\boldsymbol{a}$的"积"。

**定义** 标量 $\lambda$ 与矢量$\boldsymbol{a}$的乘积仍是一个矢量，用记号

$$\lambda\boldsymbol{a}\text{或}\boldsymbol{a}\lambda$$

表示. $\lambda\boldsymbol{a}$的模是$\boldsymbol{a}$的模的$|\lambda|$倍. 当$\lambda>0$时, $\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同向；当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反向；当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$是零矢量。

例如，当 $\lambda=0$，1，$-1$ 时，有

$$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\ 1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零矢量. 令 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$, 于是$\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$的模等于 1，与$\boldsymbol{a}$同向，即$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是与$\boldsymbol{a}$同向的单位矢量，记$\boldsymbol{a}^\circ=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 这样，可把$\boldsymbol{a}$表示为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ.$$

这种记法明显地标出了一个向量的"向"和"量"两个方面，这将给以后的运算带来方便。

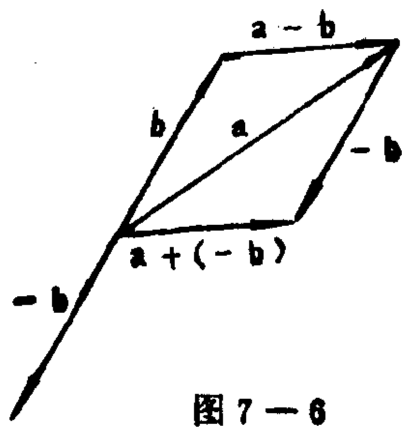



图 7－6

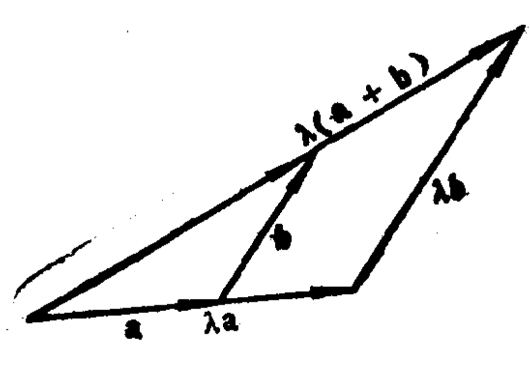



图 7－7

标量与矢量的乘法，满足以下结合律和分配律：

若$\lambda$、$\mu$是数量（标量），$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$是矢量，则

（i） $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{b}$；

(ii) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(iii) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

根据定义易知（i）、（ii）成立。利用相似三角形对应边成比例的性质可证明（iii）。图7—7是$\lambda>1$的情形。

### 7.1.4 矢量在轴上的投影

设矢量$\overrightarrow{AB}$与轴$l$正向间的夹角为$\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）。过$A$点和$B$点分别作平面垂直于轴$l$。设垂足分别为$A_0$和$B_0$。于是$\overrightarrow{A_0B_0}$为轴$l$上的矢量（图7—8）。

**定义** 矢量$\overrightarrow{AB}$在轴$l$上的投影（projectio）n记为$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}$。规定

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=\begin{cases}|\overrightarrow{A_0B_0}|, & \text{当}\overrightarrow{A_0B_0}\text{与}l\text{同向}\left(\text{即}0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\right);\\ -|\overrightarrow{A_0B_0}|, & \text{当}\overrightarrow{A_0B_0}\text{与}l\text{反向}\left(\text{即}\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\right);\\ 0, & \text{当}\overrightarrow{A_0B_0}=\overrightarrow{0}\left(\text{即}\ \theta=\dfrac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

(7.1.2)

如果在轴$l$上也选定原点与刻度单位，并以$x_1$、$x_2$分别表示点$A_0$、$B_0$在数轴$l$上的坐标，则（7.1.2）式可简单表示为：

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=x_2-x_1.$$

(7.1.3)

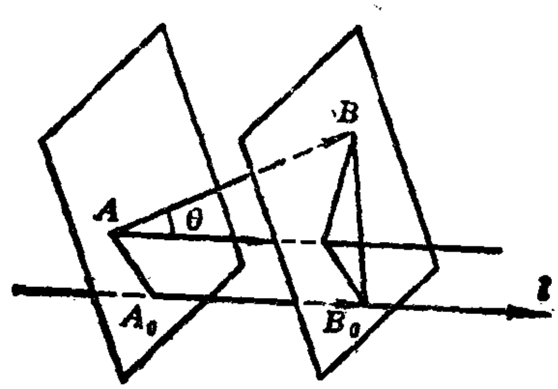



图7—8

由图7—8知，

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \qquad (7.1.4)$$

即矢量在轴上的投影等于该矢量的模乘以矢量与轴夹角的余弦。

由（7.1.3）或(7.1.4)式易知，矢量$\overrightarrow{AB}$经平行移动后，在轴$l$上的投影不变。

读者注意，由上述定义显然可知，矢量在轴上的投影是标量。

现在来看两个矢量$\boldsymbol{a}_1$与$\boldsymbol{a}_2$的和在$l$轴上的投影.如图7—9所

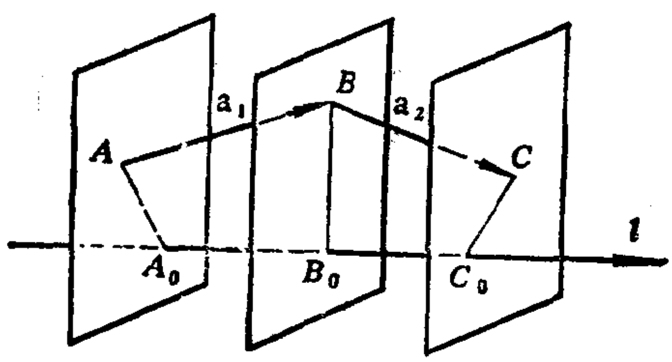



图7—9

示，设$\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}_2=\overrightarrow{BC}$，过点$A$、$B$、$C$分别作平面垂直于轴$l$，设垂足分别为$A_0$、$B_0$、$C_0$。在轴$l$上选定原点与刻度单位，设$A_0$、$B_0$、$C_0$在数轴$l$上的坐标分别为$x_1$、$x_2$、$x_3$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2) &= x_3 - x_1 = (x_2-x_1)+(x_3-x_2)\\ &= \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_2,\end{aligned}$$

即两个矢量的和在轴上的投影等于这两个矢量在轴上投影的和。

一般地，$n$个矢量的和有下面的**投影定理**:

$$\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n) = \mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_l\boldsymbol{a}_n.$$

## §7.2 矢量的坐标及其运算法

除了用几何方法研究以外，还可以用代数方法研究矢量。几

何法的优点是有直观性，缺点是不便于计算。代数法用一组数量（矢量的坐标）来表示矢量，能解除对几何图形的依赖而使矢量运算“数量化”。

### 7.2.1 空间直角坐标系

人们生活的空间叫做**三维空间**或**三度空间**，是因为人们的活动有前后、左右、上下三个自由度。数轴是一维空间，其上任一点的位置可用一个实数确定；平面是二维空间，其上任一点的位置用两个有序实数组成的数组确定；三维空间任一点的位置用三个有序的实数组成的数组确定。

在空间过定点 $O$ 作三条互相垂直的数轴 $Ox$、$Oy$ 和 $Oz$。这样，在空间构成了一个直角坐标系 $O\text{-}xyz$。$O$ 点叫做坐标原点。习惯上，将 $Ox$ 轴和 $Oy$ 轴放置在水平面上，$Oz$ 轴放在铅垂线上。$Oz$ 轴的正向按所谓右手法则规定：用右手握住 $Oz$ 轴，当右手的四个手指从 $Ox$ 轴正向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 $Oy$ 轴正向时，大拇指的指向为 $Oz$ 轴的正向。这种坐标系叫做**右手系**，与右旋螺纹相对应。若将 $Ox$ 轴和 $Oy$ 轴的位置互换，便成**左手系**。今后我们采用的是右手系（图7—10）。$Ox$ 轴叫做**横轴**，$Oy$ 轴叫做**纵轴**，$Oz$ 轴叫做**竖轴**或**立轴**。这三根坐标轴两两决定一个平面，即 $xOy$ 面、$yOz$ 面

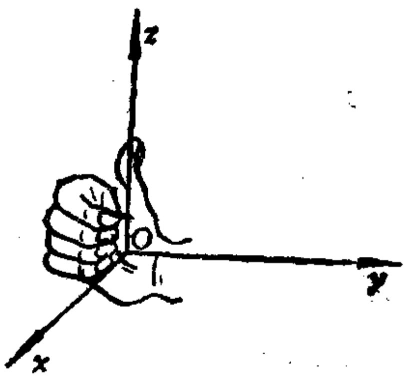



图 7—10

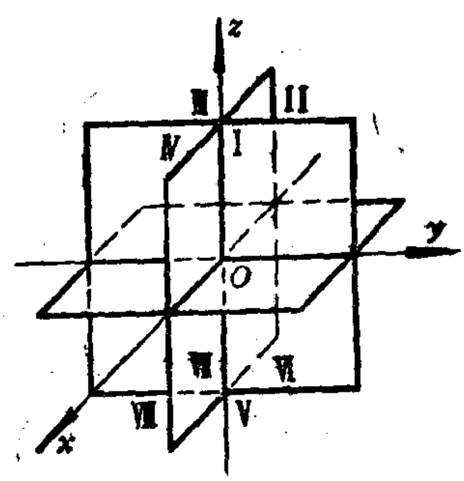



图 7—11

和$zOx$面，**叫做坐标面**。它们是互相垂直的三个平面。坐标面划分整个空间为八个部分，每一部分叫做**卦限**，共有八个卦限（图7—11）。

设$M$为空间任一点，过$M$点分别作三个平面与坐标轴垂直，设垂足依次为$P$、$Q$、$R$，它们在坐标轴上的坐标依次为$x$、$y$、$z$。这样，任给空间一点$M$，就有唯一的一组有序实数$x$、$y$、$z$与之对应。反之，任给一组有序实数$x$、$y$、$z$，在$Ox$轴、$Oy$轴、$Oz$轴上依次取坐标为$x$、$y$、$z$的点$P$、$Q$、$R$分别作与坐标轴垂直的平面，则此三个平面的交点$M$是唯一的对应于实数组$x$、$y$、$z$的点（图7—12）。这样，就建立了空间点$M$与有序实数组$x$、$y$、$z$之间的一一对应关系，称$x$、$y$、$z$为点$M$的直角坐标，记为$M(x, y, z)$。分别称$x$为$M$点的横坐标，$y$为纵坐标，$z$为竖坐标或立坐标。

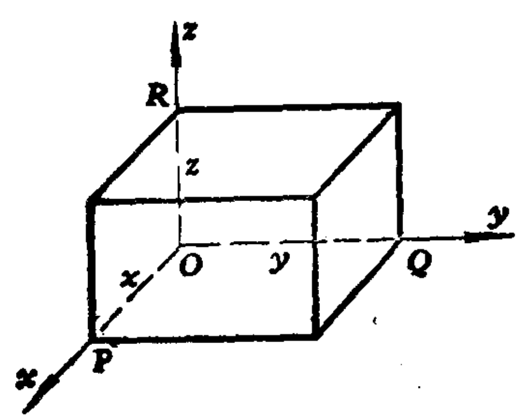


图7—12

读者可以依照平面直角坐标系的情况，分别指出当点$M$在坐标轴上或坐标面上时，其坐标的特点以及当点在不同的卦限时，其坐标的符号。

### 7.2.2 矢量的坐标

**1. 矢量的坐标** 用$\boldsymbol{i}$表示与$Ox$轴同向的单位矢量，$\boldsymbol{j}$表示与$Oy$轴同向的单位矢量，$\boldsymbol{k}$表示与$Oz$轴同向的单位矢量。$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$两两互相垂直，并组成右手系，称它们为**基本单位矢量**。

首先考虑起点在原点的矢量$\overrightarrow{OM}$，设点$M$的坐标为$(x, y, z)$。矢量$\overrightarrow{OM}$亦称为点$M$的**矢径**。如图7—13所示，过$M$点分别作垂直于各坐标轴的平面，分别与三个坐标轴交于$P$、$Q$、$R$三点。则

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM},$$

即 $$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

因 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，所以

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

有序实数组$\{x, y, z\}$称为矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标．$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$称为矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示法．也记为

$$\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}.$$

显然，零矢量的坐标全为 0，即$\boldsymbol{0}=\{0, 0, 0\}$。

一般地，当矢量$\overrightarrow{AB}$的起点为$A(x_1, y_1, z_1)$，终点为$B(x_2, y_2, z_2)$时，因为

$$\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\qquad \overrightarrow{OB}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

所以，在图 7—14中：

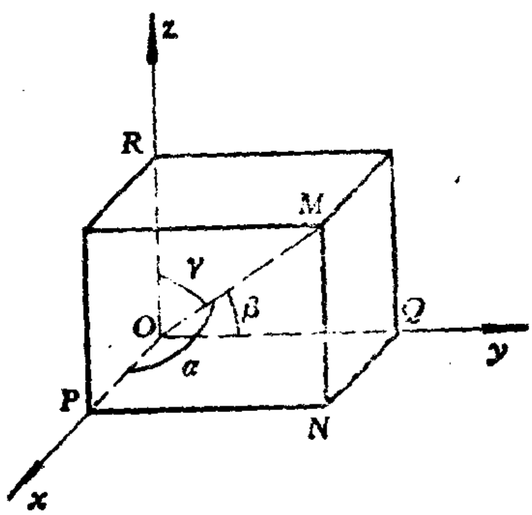



图 7—13

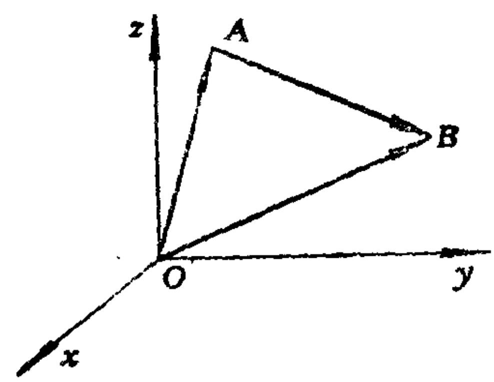



图 7—14

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

称$\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$为矢量$\overrightarrow{AB}$的坐标．记

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}.$$

根据（7.1.3）式，$x_2-x_1$为矢量$\overrightarrow{AB}$在$Ox$ 轴上的投影，$y_2-y_1$为矢量$\overrightarrow{AB}$在$Oy$轴上的投影，$z_2-z_1$为矢量$AB$在$Oz$轴上的投影。因为矢量$\overrightarrow{AB}$的坐标是该矢量在坐标轴上的投影，而矢量经平行移动后，在轴上的投影不变，所以矢量$\overrightarrow{AB}$平行移动后，这个矢量的坐标并不变。如果矢量是一个矢径，亦即是起点在原点的矢量$\overrightarrow{OM}$，那么矢量$\overrightarrow{OM}$的坐标恰是点$M$的坐标.但对于任意矢量$\overrightarrow{AB}$，其坐标一般不是终点$B$的坐标（除非$A$点是原点），当然也不是$A$点的坐标，而是终点$B$的坐标减去起点$A$的坐标。

设 $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} &=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})+(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\ &=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\}.$$

同理，

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\}.$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\},$$

其中$\lambda$为数量（标量）.

例1 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$. 求$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}=\{2, -3, 5\}$，　$3\boldsymbol{a}=\{6, -9, 15\}$，

$\boldsymbol{b}=\{3, 1, -2\}$，　$2\boldsymbol{b}=\{6, 2, -4\}$，

$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}=\{0, -11, 19\}$.

**2. 矢量的模和方向余弦** 上一节已讲过，一个非零矢量$\boldsymbol{a}$可表示为$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ$，其中$\boldsymbol{a}^\circ$是与$\boldsymbol{a}$同向的单位矢量。现在考虑如何用矢量$\boldsymbol{a}$的坐标来表示$|\boldsymbol{a}|$及$\boldsymbol{a}^\circ$。

设 $\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$ 是矢径，$\overrightarrow{OM}\neq 0$，由图7—13，$|\overrightarrow{OM}|$为长方体的对角线长度，所以

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

现在来看矢量$\overrightarrow{OM}$的方向，在几何和三角中，常用“角”表示方向或方位。设矢量$\overrightarrow{OM}$与坐标轴$Ox$、$Oy$、$Oz$的夹角依次为

$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ （$0\leqslant\alpha,\ \beta,\gamma\leqslant\pi$），称$\alpha$、$\beta$、$\gamma$为矢量$\overrightarrow{OM}$的**方向角**（图7—13）．方向角的余弦$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$叫做矢量$\overrightarrow{OM}$的**方向余弦**．方向角$\alpha$、$\beta$、$\gamma$的大小，或方向余弦的大小，决定了矢量的方向．由图7—13得

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \cos\beta&=\frac{y}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{aligned}\right\}. \tag{7.2.1}$$

把（7.2.1）式中的三个等式两边平方后相加，得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

设$\boldsymbol{a}=\{x,\ y,\ z\}$为任一矢量，$\boldsymbol{a}\neq0$．可把$\boldsymbol{a}$平行移动使其起点在原点成为矢径．由于矢量经平行移动后矢量坐标不变，模及方向角$\alpha$、$\beta$、$\gamma$也不会改变，因此仍有

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{7.2.2}$$

$\boldsymbol{a}$的方向余弦$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$仍按（7.2.1）式计算，而且任何矢量的方向余弦的平方和恒等于1．

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}.$$

可见$\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$正是单位矢量$\boldsymbol{a}^\circ$的坐标，或者说，$\boldsymbol{a}^\circ$的三个坐标就是方向余弦$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$．

**例2** 求矢量$\boldsymbol{a}=\{4,\ 0,\ -3\}$的模、单位矢量及方向余弦．

**解** $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}=5$，