# 高等数学

# 习作课教程

中国地质大学出版社


主编
刘小雅

副主编
王国庆
赵　晶
朱小宁
刘安平


中国地质大学出版社

# 高等数学习作课教程



主编 刘小雅

副主编 王国庆 赵晶 朱小宁 刘安平



中国地质大学出版社

## 内容简介

本书是为配合本科生学习《高等数学》课程而编写的习作课教材.全书共29讲,每讲都由基本要求、讨论与思考、例题、课堂练习题和参考题五大部分组成.可供教师和学生上习题课使用,也可供工科院校大学生、夜大学生、电大学生自学参考或作为报考研究生复习辅导材料.


**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学习作课教程/刘小雅主编. —武汉:中国地质大学出版社,1995.11
ISBN 7-5625-1046-6

Ⅰ.高…
Ⅱ.刘…
Ⅲ.高等数学-教材
Ⅳ.O13

出版发行 中国地质大学出版社(武汉市·喻家山·邮政编码 430074)
责任编辑 方 菊 责任校对 胡义珍
印 刷 中国地质大学出版社印刷厂

开本 787×1092 1/16 印张 14.375 字数 370 千字
1995年11月第1版 1995年11月第1次印刷 印数 1—5000 册
定价:12.25 元

# 前　　言

高等数学习作课是高等数学教学的重要组成部分，是促使学生学好高等数学课程的一个重要环节.习作课既能帮助学生加深对基本概念的理解，对基本计算方法的掌握，以致学会解决综合性问题的方法；还能帮助教师了解学生掌握所学知识的程度，发现薄弱环节，以便及时给予弥补.

为了编写一本好的习作课教材，我们进行了较长期积极的探索。1987年武汉地质学院(现改名为中国地质大学)数学教研室谢兴武老师编写了《高等数学习作课指导》，在我校试用后普遍反映较好.在此基础上，1992年我校数学教研室组织了几位多年讲授高等数学课程且经验丰富的教师修编成《高等数学习作课教程》，在校内印刷使用，深受师生欢迎。这次在广泛征集意见的基础上，再次深入研讨、修改、补充，群策群力，最后完成了这本教材的修编工作.

本书共29讲，每讲都由基本要求、讨论与思考、例题、课堂练习题和参考题五大部分组成。在讨论与思考、例题部分，着重基本概念的讨论，注重运算技巧的归纳提高，选题较新颖。在课堂练习题、参考题部分，选用了一些基本题和综合题供课堂上练习，还选用了少量有一定难度的参考题供学生课后练习.为便于学习，书末附有每一讲中课堂练习题和参考题的答案与提示.

本书由五位同志分别执笔.具体分工是：王国庆编写第1～4、10、11讲；赵晶编写第5～9、18讲；朱小宁编写第12～17讲；刘小雅编写第19～24讲；刘安平编写第25～29讲，全书由刘小雅统稿，封面署名以此次序排出.

本书能正式出版，得益于中国地质大学出版社全力相助，同时还得到了中国地质大学(武汉)教务处、教材科、绘图室、数理系、数学教研室领导和同志们的关心与支持，在此一并致谢.
书中错误和不妥之处，恳请读者批评指正.

编者

1995.10.

# 目　　录


第 1 讲　函数概念、函数的基本特性 …………………………………………… (1)
第 2 讲　极限与无穷小……………………………………………………………… (5)
第 3 讲　极限的运算………………………………………………………………… (9)
第 4 讲　连续函数 ………………………………………………………………… (14)
第 5 讲　导数概念及其计算 ……………………………………………………… (19)
第 6 讲　高阶导数与微分 ………………………………………………………… (28)
第 7 讲　微分中值定理 …………………………………………………………… (36)
第 8 讲　罗必塔法则与泰勒公式 ………………………………………………… (42)
第 9 讲　导数的应用 ……………………………………………………………… (51)
第 10 讲　不定积分的概念及换元积分法………………………………………… (59)
第 11 讲　分部积分法及几种特殊类型函数的积分法…………………………… (64)
第 12 讲　定积分的概念、性质及基本计算公式 ………………………………… (72)
第 13 讲　定积分的换元积分法、分部积分法与广义积分 ……………………… (79)
第 14 讲　定积分的应用…………………………………………………………… (86)
第 15 讲　空间直角坐标系与向量代数…………………………………………… (92)
第 16 讲　平面与直线……………………………………………………………… (99)
第 17 讲　曲面与曲线 …………………………………………………………… (106)
第 18 讲　多元函数概念和偏导数 ……………………………………………… (113)
第 19 讲　多元函数微分法 ……………………………………………………… (120)
第 20 讲　多元函数微分法的应用 ……………………………………………… (130)
第 21 讲　二重积分 ……………………………………………………………… (137)
第 22 讲　三重积分 ……………………………………………………………… (145)
第 23 讲　曲线积分 ……………………………………………………………… (153)
第 24 讲　曲面积分 ……………………………………………………………… (161)
第 25 讲　常数项级数 …………………………………………………………… (170)
第 26 讲　幂级数 ………………………………………………………………… (177)
第 27 讲　傅立叶级数 …………………………………………………………… (185)
第 28 讲　一阶微分方程 ………………………………………………………… (193)
第 29 讲　高阶微分方程 ………………………………………………………… (199)
答案与提示………………………………………………………………………… (206)

# 第 1 讲

# 函数概念、函数的基本特性

## 要　　求

1. 深刻理解函数的基本概念，熟练求出所给函数的定义域.

2. 会判别函数是否具有有界性、增减性、奇偶性、周期性，能利用这些基本特性解决一些具体问题.

## 讨论与思考

1. 设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$\forall\, x \in D$，$y$ 按一定法则总有两个确定的数值 $y_1$、$y_2$ 和它对应，则 $y$ 是否为 $x$ 的函数？

2. 函数有哪几种表达方式？何为函数的几何意义？

3. 函数 $f(x)$ 在 $X$ 上有界的充分必要条件是否可为：存在着数 $A$ 与 $B$，使得对任一 $x \in X$，都有 $A \leqslant f(x) \leqslant B$.

4. 设函数 $f(x) = x^3$，$g(x) = \cos x$，其中 $x \in [-1,2]$，则 $f(x)$ 是否为奇函数？$g(x)$ 是否为偶函数？

## 例　　题

**一、函数概念**

函数是高等数学课程中的一个重要概念，正确理解这个概念要抓住两个要素：

① 函数的定义域；② 对应法则.

**例 1**　求函数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{-\sin^2 \pi x}}{x - |x|} + \arccos \mathrm{e}^x + \lg(2-x)$ 的定义域.

**解**　这里 $f(x)$ 纯粹由解析式给出，定义域是使这个解析式有意义的自变量全体，因此有

$$\begin{cases} x - |x| \neq 0, \\ -\sin^2 \pi x \geqslant 0, \\ |\mathrm{e}^x| \leqslant 1, \\ 2 - x > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x = \pm n \quad (n = 0,1,2,\cdots), \\ x \leqslant 0, \\ x < 2. \end{cases}$$

取公共部分：$x = -1, -2, \cdots$，即为所求定义域.

**【注】**　求函数定义域的一般方法是：① 若函数是由实际问题给出，则其定义域由实际问题本身的性质而确定；② 若函数由纯数学式子给出，则定义域是使数学式子有意义的全体实数.

**例 2**　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，试求：(1) $f(4x^2)$ 的定义域；(2) $f(\mathrm{tg}x)$ 的定义域.

**解**　(1) 令 $t = 4x^2$，则 $f(4x^2) = f(t)$，其定义域是 $0 \leqslant t \leqslant 1$.

即 $0\leqslant 4x^2\leqslant 1$，故 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$，所以 $f(4x^2)$ 的定义域是 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

(2) 仿照(1)，由 $0\leqslant \mathrm{tg}x\leqslant 1$，$f(\mathrm{tg}x)$ 的定义域是 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

**例 3** 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求：(1) $f(x+a)$；(2) $f[f(x)]$.

【分析】 因函数的对应法则为 $f(\square)=\begin{cases}1+\square, & \square<0,\\ 1, & \square\geqslant 0.\end{cases}$ 故求复合函数 $f(x+a)$ 时应将所有 $\square$ 处换成 $x+a$，求 $f[f(x)]$ 时应将所有 $\square$ 处换成 $f(x)$.

**解** (1)
$$f(x+a)=\begin{cases}1+(x+a), & (x+a)<0,\\ 1, & (x+a)\geqslant 0.\end{cases}$$
即
$$f(x+a)=\begin{cases}1+x+a, & x<-a,\\ 1, & x\geqslant -a.\end{cases}$$
(2)
$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ 1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$
由于当 $x<-1$ 时，$f(x)=1+x<0$，当 $x\geqslant -1$ 时，$f(x)\geqslant 0$，故得
$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

**例 4** 设函数 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(\lg x)\quad(x>0)$.

【分析】 求解这类问题的一般方法是先令 $u=\frac{1}{x}$，求出原函数 $f(x)$ 的表达式，然后再求复合函数 $f(\lg x)$.

**解** 令 $u=\frac{1}{x}$， 得 $x=\frac{1}{u}$.

则
$$f(u)=\frac{1}{u}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}=\frac{1}{u}+\frac{\sqrt{1+u^2}}{|u|}.$$
记 $u$ 为 $x$，得
$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|},$$
$$\therefore\quad f(\lg x)=\frac{1}{\lg x}+\frac{\sqrt{1+\lg^2 x}}{|\lg x|}.$$

## 二、函数的基本特性

函数常见的几种特性是：① 有界性；② 单调性；③ 奇偶性；④ 周期性. 用定义证明函数相应的性质时，要求论证严谨，表达清晰，通过完成一些练习，培养逻辑推理能力.

**例 5** 求证函数 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 在整个定义域内是有界的.

【分析】 若能找到一个正数 $M$，使得对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，则得证.

**证** $\because$ $|f(x)|=\frac{|x|}{x^2+1}$，注意到
$$0\leqslant(|x|-1)^2=|x|^2-2|x|+1=x^2-2|x|+1,$$
即
$$2|x|\leqslant x^2+1,$$
$$\therefore\quad \frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}.$$
取 $M=\frac{1}{2}$，对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}$，故 $f(x)$ 在整个定义域内有界.

**例 6** 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上单调递增，试证函数 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$、$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 也在区间 $(a,b)$ 上单调递增.

**【分析】** $\forall\ x_1$、$x_2\in(a,b)$，且设 $x_2>x_1$，证出 $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$、$\psi(x_2)>\psi(x_1)$ 即可.

**证** $\forall\ x_1$、$x_2\in(a,b)$，且设 $x_2>x_1$，$\because f(x)$、$g(x)$ 在 $(a,b)$ 上单调递增，

$\therefore f(x_2)>f(x_1)$、$g(x_2)>g(x_1)$.

于是 $\qquad \varphi(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}>f(x_2)>f(x_1)$，

同理 $\qquad \varphi(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}>g(x_2)>g(x_1)$，

$\therefore \qquad \varphi(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}>\max\{f(x_1),g(x_1)\}=\varphi(x_1)$.

故证得 $\varphi(x)$ 在 $(a,b)$ 上单调增加.

同理可证 $\psi(x)$ 在 $(a,b)$ 上单调增加.

**例 7** 已知函数 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}\quad(x\neq0)$，其中 $a$、$b$、$c$ 都是常数，且 $|a|\neq|b|$，试证 $f(x)$ 是奇函数.

**证** 首先需求出 $f(x)$，再由定义证明 $f(-x)=-f(x)$.

由题设以及用 $\frac{1}{x}$ 代替 $x$，则应有 $\begin{cases}af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x},\\ bf(x)+af(\frac{1}{x})=cx,\end{cases}$ 解以 $f(x)$、$f(\frac{1}{x})$ 为未知数的二元一次方程组，得

$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{x}-bcx)$，又因 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

**例 8** 设函数 $f(x)$ 在整个数轴上是以 $T$ 为周期的周期函数，证明 $f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数 $(a\neq0)$.

**证** 由定义只要证明 $f[a(x+\frac{T}{a})]=f(ax)$ 即可.

因为 $f(x)$ 以 $T$ 为周期，所以 $f(ax+T)=f(ax)$，于是 $f[a(x+\frac{T}{a})]=f(ax+T)=f(ax)$，故 $f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

## 课堂练习题 1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}+\lg(\lg(6-x))$； (2) $y=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x<0,\\ \frac{1}{x}, & 0<x<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

2. 设 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$，$f(\sin x)$.

3. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，求 $\varphi(x)$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant0,\\ x, x>0.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$，$f[g(x)]$.

5. 试证函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的图形对称于原点，并求反函数.

6. 设 $g(x)$、$h(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增函数，且 $f[f(x)]$、$g[g(x)]$、$h[h(x)]$ 均存

在，证明：若 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，则 $f(f(x)) \leqslant g(g(x)) \leqslant h(h(x))$.

7. 证明 $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界函数.

8. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数，又对于任何 $x$ 值都有 $f(x+2) - f(x) = f(2)$，且 $f(1) = a$.

(1) 试用 $a$ 表示 $f(2)$ 及 $f(5)$；(2) 问 $a$ 为何值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数？

9. 设函数 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ 和 $g(x) = \begin{cases} d, x < a, \\ c, \ x > a. \end{cases}$ 证明 $g(x) = \dfrac{c+d}{2} + \left(\dfrac{c-d}{2}\right) f(x-a)$.

10. 设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = af(x) + \varphi(x) \quad (a^2 \neq 1)$，其中 $\varphi(x)$ 是当 $x \neq 1$ 时有定义的已知函数，试求 $f(x)$.

## 参考题 1

1. 已知 $f(x) = x - 3$，$\varphi(x) = 4 - x$，求使 $|f(x) + \varphi(x)| \leqslant |f(x)| + |\varphi(x)|$ 的 $x$ 值.

2. 设函数 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f\underbrace{[f[\cdots f(x)]]}_{n\text{次}}$.

3. 证明函数 $f(x) = \dfrac{\lg x}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界.

# 第 2 讲

# 极限与无穷小

## 要　　求

1. 正确理解极限的 $\varepsilon$-$N$、$\varepsilon$-$\delta$ 定义和无穷小、无穷大的概念.
2. 理解函数单边极限与极限的关系，函数极限存在时函数的性质.
3. 学会用极限的定义解简单的问题.

## 讨论与思考

1. 在 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$ 的定义中，正数 $\varepsilon$ 为什么要"任意"，又要"给定"？
2. 极限的定义中两个不等式表达什么意义？
3. 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处无定义与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$ 有无影响，为什么？

## 例　　题

**一、极限的概念**

**例 1**　判断下列命题是否成立，并说明理由.

(1) $\forall\ \varepsilon > 0$，存在着 $N$，当 $n > N$ 时，总有无穷多个 $x_n$ 满足 $|x_n - a| < \varepsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$.

(2) $\forall\ \varepsilon > 0$，数列 $\{x_n\}$ 中仅有有限项不满足 $|x_n - a| < \varepsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$，且 $f(x) > 0$，则 $A > 0$.

(4) 因为 $|x\sin x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可以任意大，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x = \infty$.

**解**　(1) 不成立. 如 $x_n = (-1)^n$ 时，对于 $a = 1$，$x_n$ 的所有偶数项 $x_{2n}$ 满足 $|x_{2n} - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$，但数列 $x_n = (-1)^n$ 的极限不存在.

(2) 成立. 因为 $\forall\ \varepsilon > 0$，设 $\{x_n\}$ 中除了 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_s}$ 外都有 $|x_n - a| < \varepsilon$，不妨设 $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_s}$，则取　$N = n_s$，当 $n > N$ 时，一切的 $x_n$ 都满足 $|x_n - a| < \varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$.

(3) 不成立. 如函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0, \\ 1,\ x = 0. \end{cases}$　显然 $f(x) > 0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x) = 0$.

(4) 不成立. 如函数 $f(x) = x\sin x$，当 $x = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}) = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$，$|f(x)|$ 可以大于任意的正数；但若取 $M_0 = 1$，对于 $X > 0$，总可以找到 $x = 2n\pi$（只要 $n$ 充分大），使 $|x| > X$，而 $|f(x)| = |2n\pi\sin 2n\pi| = 0 < M_0$，即 $x\sin x$ 在 $x \to \infty$ 时不是无穷大.

**二、用定义证明极限**

用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，关键是对于任意的 $\varepsilon > 0$，找到存在的正整数 $N(\varepsilon)$，其方法有：

(1) 直接反推法：从不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 直接推出 $N(\varepsilon)$　$(N(\varepsilon) > 0)$.

(2) 适当放大法：即如果从 $|x_n-a|<\varepsilon$ 不易直接推出 $N(\varepsilon)$，可先把 $|x_n-a|$ 放大成 $|x_n-a|\leqslant\varphi(n)$，然后由 $\varphi(n)<\varepsilon$ 求出 $N(\varepsilon)$ $(N(\varepsilon)>0)$.

**例 2** 用定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>1)$； (2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$.

**证** (1) 证法一 直接反推法. $\forall\varepsilon>0$，$\because a>1$，故 $|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1$，解不等式 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，即 $\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$，不等式两端取对数得

$\dfrac{1}{n}\ln a<\ln(1+\varepsilon)$，即 $n>\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$，限制 $\varepsilon<a-1$，取 $N=\left[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]>0$，

当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

证法二 适当放大法. 利用不等式 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ $(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$，

$\forall\varepsilon>0$，$\because |\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a\cdot1\cdots1}-1\leqslant\dfrac{a+n-1}{n}-1=\dfrac{a-1}{n}<\dfrac{a}{n}$，

要使 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{a}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{a}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{a}{\varepsilon}\right]>0$，

当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

证法三 适当放大法. 记 $\sqrt[n]{a}-1=h>0$，则 $a=(1+h)^n=1+nh+\dfrac{n(n-1)h^2}{2!}+\cdots+h^n>1+nh$，

故 $|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1=h<\dfrac{a-1}{n}<\dfrac{a}{n}$，以下证法同证法二.

**【注】** 直接反推法一般用于较简单的极限证明，大多数都需要用适当放大法，但如何放大有技巧性，方法也不是唯一的，要在练习中体会. 此例中证法三可以用来证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$. 下面一些经常引用的重要结论均可以直接用定义证明：

① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$； ② $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ $(|q|<1)$； ③ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$；

④ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{x_n}=\sqrt[k]{a}$ $(x_n\geqslant0,k$ 为任意自然数$)$.

**证** (2) $\forall\varepsilon>0$，因为 $x\to3$，可限制 $|x-3|<1$，由此得 $5<x+3<7$，于是当 $0<|x-3|<1$ 时，有 $\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|=\dfrac{1}{6}\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|<\dfrac{1}{6}\dfrac{|x-3|}{5}=\dfrac{|x-3|}{30}$，要使 $\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|<\varepsilon$，只要 $|x-3|<1$，且 $\dfrac{|x-3|}{30}<\varepsilon$ 即可.

因此取 $\delta=\min\{1,30\varepsilon\}>0$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|<\varepsilon$，

$\therefore\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$.

**例 3** 用定义证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-2}{x}=\infty$.

**【分析】** 欲证 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-2}{x}=\infty$，只需证明 $\forall M>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，恒有 $\left|\dfrac{x-2}{x}\right|>M$ 成立.

因为 $\left|\dfrac{x-2}{x}\right|=\left|1-\dfrac{2}{x}\right|>\left|\dfrac{2}{x}\right|-1$，故只需 $\left|\dfrac{2}{x}\right|-1>M$，

即 $|x| < \dfrac{2}{M+1}$，因此取 $\delta = \dfrac{2}{M+1}$ 即可.

**证** $\forall M > 0$，据以上分析，存在 $\delta = \dfrac{2}{M+1} > 0$，当 $0 < |x| < \delta$ 时，恒有 $\left|\dfrac{x-2}{x}\right| > M$ 成立，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{x} = \infty$.

**三、用定义证明一些极限命题**

**例 4** 如果数列 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 有同一极限 $a$，证明数列 $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_n, v_n, \cdots$ 也有同一极限 $a$.

**【分析】** 设 $\{x_n\}$ 为数列 $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_n, v_n, \cdots$，只需对 $\forall \varepsilon > 0$ 找到 $N(\varepsilon) > 0$，使当 $n > N$ 后，有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 即可.

**证** $\because \lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$，故 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N_1$，使得当 $n > N_1$ 时，有 $|u_n - a| < \varepsilon$.

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$. 故对上述 $\varepsilon > 0$，存在 $N_2$，使得当 $n > N_2$ 时，有 $|v_n - a| < \varepsilon$.

取 $N(\varepsilon) = \max\{2N_1, 2N_2\}$，故对上述 $\varepsilon > 0$，存在 $N(\varepsilon)$，当 $n > N$ 后，有 $|x_n - a| < \varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 奇偶间隔

**【注】** 该例说明若数列 $\{x_n\}$ 的奇数项和偶数项所成的数列的极限均为 $a$，则该数列极限为 $a$.

**例 5** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，又数列 $\{y_n\}$ 有界；证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

**证** 因为数列 $\{y_n\}$ 有界，即存在 $M > 0$，对一切 $n$，有 $|y_n| \leqslant M$. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，即 $\forall \varepsilon > 0$，对于 $\dfrac{\varepsilon}{M} > 0$，存在 $N_0$，使当 $n > N_0$ 后，有 $|x_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$，对上述 $\varepsilon > 0$，取 $N = N_0$，当 $n > N$ 后，有 $|x_n y_n - 0| \leqslant M|x_n| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

**例 6** 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \quad (A > 0)$，证明存在 $\delta > 0$，当 $x \in U(\hat{x}_0, \delta)$ 时，有 $f(x) > \dfrac{A}{2}$.

**【分析】** 已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $x \in U(\hat{x}_0, \delta)$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 即 $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$，若令 $A - \varepsilon = \dfrac{A}{2}$，即 $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$ 即可.

**证** 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，对于 $\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $x \in U(\hat{x}_0, \delta)$ 时，有 $|f(x) - A| < \dfrac{A}{2}$，即 $\dfrac{A}{2} < f(x) < \dfrac{3A}{2}$，$\therefore f(x) > \dfrac{A}{2}$.

**【注】** 此例证明了函数极限的保号性. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \quad (A > 0)$，则存在着一个 $x_0$ 的去心邻域 $U(\hat{x}_0, \delta)$，在该邻域内 $f(x) > 0$. 另外，从证明过程中不难推得，$f(x)$ 不仅大于零，且对 $\forall M > 1$ 都存在着一个 $x_0$ 的去心邻域 $U(\hat{x}_0, \delta)$，在该邻域中，$f(x) > \dfrac{A}{M}$. 同样，若已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \quad (A < 0)$，则存在着一个 $x_0$ 的去心邻域 $U(\hat{x}_0, \delta)$，在该邻域中，$f(x) < \dfrac{A}{M}$.

## 课堂练习题 2

1. 用定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{9n^3+7} = 0$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] = 0$；　(3) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

2. 根据定义证明：

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}kx_n = ka$　($k$ 为常数)；$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = |a|$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = 0$，$g(x)$ 有界，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x) = 0$.

3. 证明：(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，且 $a > 0$，则存在正数 $N$，使当 $n > N$ 时，有 $x_n > 0$；

(2) 若 $x_n \geqslant 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，则 $a \geqslant 0$.

4. 试证函数局部有界性，即若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$，则存在一个 $x_0$ 的去心邻域，在此邻域内 $f(x)$ 有界.

5. 若 $x_n \leqslant a \leqslant y_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$，求证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = a$.

6. 若函数 $\varphi(x) < \psi(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = a$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x) = b$，试证 $a \leqslant b$.

## 参考题 2

1. 用 $\varepsilon$-$N$ 的定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

2. 证明函数 $y = x\cos x$ 在$(0, +\infty)$内是无界的，但当 $x \to \infty$ 时，函数不是无穷大.

3. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = a$.

4. 设在同一极限过程中，$\lim f(x) = \infty$，$\lim g(x) = A$　$(A \neq 0)$，试证 $\lim f(x)\cdot g(x) = \infty$.

5. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$；$x \to +\infty$ 时，函数 $f(x)$ 有界且 $0 < m \leqslant f(x)$，用定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = +\infty$.

# 极限的运算

## 要　　求

1. 熟练地运用极限四则运算法则、两个重要的极限、极限存在的准则和无穷小的性质、等价无穷小的代换等基本方法求极限.

2. 掌握一些特殊函数求极限的方法.

3. 掌握无穷小的比较.

## 讨论与思考

1. 在同一极限过程中，若 $\lim[f(x)+g(x)]$ 存在，那么 $\lim g(x)\lim f(x)$ 是否存在？

2. 任意多个无穷小的和是否还是无穷小？

3. 下列极限运算是否正确：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}x\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=0\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=0$；

(3) $\because x\to0$ 时，$\mathrm{tg}x\sim x$，$\sin x\sim x$，

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x^3}=0.$

## 例　　题

### 一、极限计算的一些基本方法

**例 1**　求极限：(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$.

**解**　(1) $x\to1$ 时，分子分母的极限均为零，出现 $\dfrac{0}{0}$ 型，不能直接用极限的运算法则，需先因式分解，消去零因子 $(x-1)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^{n-1}+\cdots+x+1)=n.$$

【注】　求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$ 时，若 $g(x)$、$f(x)$ 为多项式，且 $f(x_0)=g(x_0)=0$，则分子、分母都需因式分解，消去零因子 $(x-x_0)$，直至分母或者分子无零因子为止.

(2) $x\to\infty$ 时，出现 $\infty-\infty$ 型不能直接用极限四则运算，需恒等变形再进行计算.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{x^{-1}}}+\sqrt{1-\sqrt{x^{-1}}}}=1.$$

**例 2** 利用极限存在准则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$ （$a$、$b$ 均大于 0）；

(2) $x_1=1,\cdots,x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.

**解** (1) 设 $A=\sqrt[n]{a^n+b^n}$. 若 $a\geqslant b$，则 $\sqrt[n]{a^n}\leqslant A\leqslant\sqrt[n]{a^n+a^n}$，即 $a\leqslant A\leqslant a\sqrt[n]{2}$.

$\because\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=a$. 同理，若 $b>a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=b$.

$$\therefore\qquad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\begin{cases}a(a\geqslant b)\\b(a<b)\end{cases}=\max\{a,b\}.$$

【注】 对于有限个大于零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，用同样方法可证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

(2) 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 为此证数列 $\{x_n\}$ 单调有界. $\because x_1=1$，$\therefore x_2-x_1=\dfrac{x_1}{1+x_1}=\dfrac{1}{2}>0$，故 $x_2>x_1$.

显然 $x_n>0$，$n=1,2,\cdots$，设 $x_k>x_{k-1}$，而

$$\begin{aligned}x_{k+1}-x_k&=\left(1+\frac{x_k}{1+x_k}\right)-\left(1+\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}\right)=\frac{x_k}{1+x_k}-\frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}}\\&=\frac{x_k-x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})}>0,\end{aligned}$$

由归纳法原理得数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 又

$$x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=2-\frac{1}{1+x_{n-1}}<2,$$

故数列 $\{x_n\}$ 有上界，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设为 $a$，由 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 两边取极限得 $a=1+\dfrac{a}{1+a}$，即 $a^2-a-1=0$，从而 $a=\dfrac{(1\pm\sqrt{5})}{2}$，因为 $a$ 非负，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{(1+\sqrt{5})}{2}$.

**例 3** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=q$ （$q<1$），证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

**证** 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=q<1$，故存在 $N$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|<1$，即 $|x_{n+1}|<|x_n|$，故 $n>N$ 时，数列 $\{|x_n|\}$ 为单调减数列，又 $|x_n|\geqslant 0$，由准则 2，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=a$ 存在，由 $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=q+\alpha_n$ （其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$）得 $|x_{n+1}|=q|x_n|+\alpha_n|x_n|$，两端取极限（$n\to\infty$）得，$a=aq+a\cdot 0=aq$，即 $a(1-q)=0$，$\therefore a=0$，即证得 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

**例 4** 利用两个重要的极限求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{1-\cos x}$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

**解** (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2\sin^2\dfrac{x^2}{2}}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left|\sin\dfrac{x^2}{2}\right|}{\left|\dfrac{x^2}{2}\right|}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\sqrt{2}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\cdot2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\dfrac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right]^2\cdot\left(1+\dfrac{2}{x^2-1}\right)\right\}$

$=\mathrm{e}^2$.

【注】 利用两个重要的极限求其他极限时，要掌握两个重要极限的本质. 第一个重要的极限可表示为 $\lim \frac{\sin\square}{\square} = 1$.

这里，① 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，方框表示的变量必须是无穷小.

② 分子、分母中方框所表示的变量（可以是 $x$ 的函数）必须是相同的、

第二个重要的极限可表示为 $\lim\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square} = \mathrm{e}$.

这里，① 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，方框表示的变量必须是无穷大.

② 两方框所表示的变量（可以是 $x$ 的函数）必须是相同的.

**例 5** 利用等价代换求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{\sin x}-1)\ln(1+2x)}{(1-\mathrm{e}^{4x})\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$.

**解** (1) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos\alpha x-1)}{\ln(1+\cos\beta x-1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x-1}{\cos\beta x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{(\alpha x)^2}{2}}{-\frac{(\beta x)^2}{2}} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

(2) 因为 $x \to 0$ 时，$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$，所以 $\mathrm{e}^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$，

又 $\because \ln(1+2x) \sim 2x, 1-\mathrm{e}^{4x} \sim -4x, \mathrm{tg}\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$，

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot 2x}{(-4x)\cdot\frac{x}{2}} = -1$.

【注】 $x \to 0$ 时，常用的几个等价无穷小代换为：

$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg}x \sim \mathrm{arc\ tg}x \sim \mathrm{arc\ sin}x \sim \ln(1+x) \sim \mathrm{e}^x - 1$； $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

## 二、一些特殊类型函数求极限

**例 6** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} x\frac{1-\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}$.

【分析】 在该极限中 $n$ 是变量，$x$ 是参数，该极限值与 $x$ 有关，所以应按 $x$ 的不同取值范围求极限. 下面就 $x>0$、$x=0$ 和 $x<0$ 分别进行讨论.

**解** 当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x\frac{1-\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}} = 0$；

当 $x>0$ 时，原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} x\frac{\frac{1}{\mathrm{e}^{nx}}-1}{\frac{1}{\mathrm{e}^{nx}}+1} = -x$；

当 $x<0$ 时，原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} x\frac{1-\frac{1}{\mathrm{e}^{-nx}}}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^{-nx}}} = x$，

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} x\frac{1-\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}} = \begin{cases} -x, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ x, & x<0. \end{cases}$$

**例 7** 若极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|\sin(x-1)|^2}{x^2+ax+b} = 1$，试确定常数 $a$、$b$ 的值.

【分析】 本题中 $x$ 是变量，$a$、$b$ 是待定参数. 在求极限的过程中，$a$、$b$ 是不变的. 由于 $\lim\limits_{x\to 1}|\sin(x-1)|^2 = 0$，则必须 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b) = 0$，即 $1+a+b=0$.

得到一个含 $a$、$b$ 的方程，代入原方程，找到另一含 $a$、$b$ 的方程，从而求出 $a$、$b$.

**解** 由以上分析 $1+a+b=0$，得 $b=-1-a$，代入原方程得

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|\sin(x-1)|^2}{x^2+ax-a-1}=1$，即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|\sin(x-1)|^2}{(x-1)(x+1+a)}=1$，令 $t=x-1$，$t\to 0$ 时，$\sin t\sim t$.

故得 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t(t+2+a)}=1$，即得 $\lim\limits_{t\to 0}(t+2+a)=0$，即 $2+a=0$，所以 $a=-2$，$b=1$.

**例 8** 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{n^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^{2^n}}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

**解** (1) 记 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$， ①

则 $$2S_n=1+1+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}, \quad ②$$

由 ② 式 − ① 式得 $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}$，

∴ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$.

(2) 分子、分母同乘以 $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$，

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^{2^n}}\right)}{1-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^{2^{n+1}}}}{1-\frac{1}{n}}=1.$$

(3) ∵ $\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}=\dfrac{2}{k(k+1)}=2\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$，

$$\therefore \text{原式}=\lim_{n\to\infty}2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2.$$

## 课堂练习题 3

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$；

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n\sin\dfrac{t}{a^n}\quad(t\neq 0,a\neq 0)$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}\quad(a>0)$.