高等学校试用教材

数学物理方程

复旦大学数学系主编

人民教育出版社

高等学校试用教材

数学物理方程

复旦大学数学系主编

谷超豪 李大潜 陈恕行 郑宋穆 谭永基编

人民教育出版社

内 容 概 要

本书是根据1977年召开的高等学校理科数学教材编写会议上拟订的《数学物理方程》教材编写大纲编写的.

本书共分八章. 第一、二、三章分别讨论弦振动方程、热传导方程、调和方程的基本定解问题的适定性、求解方法及解的性质. 第四章对二阶线性偏微分方程的理论作了分析和总结. 第五章主要介绍一阶双曲型偏微分方程组. 第六章介绍广义函数及基本解. 第七、八章分别介绍差分方法和有限元素法. 每章都附有一定数量的习题.

本书可以作为高等学校数学专业的试用教材.

高等学校试用教材

数 学 物 理 方 程

复旦大学数学系主编

谷超豪 李大潜 陈恕行 郑宋穆 谭永基编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 11 2/16 字数 268,000

1979年5月第1版 1979年12月第1次印刷

印数 1—20,000 册

书号 13012·0353 定价 0.81 元

序

本书是根据一九七七年召开的高等学校理科数学教材编写会议上拟订的教材编写大纲编写的．它可以作为高等学校数学专业和应用数学专业数学物理方程基础课的试用教材．

本书共分八章．第一、二、三章分别讨论弦振动方程、热传导方程、调和方程的基本定解问题的适定性、求解方法及解的性质．在此基础上，第四章中对二阶线性偏微分方程的理论作了分析和总结．第五章主要介绍一阶双曲型偏微分方程组．第六章介绍广义函数及基本解，第七、八章介绍偏微分方程的数值计算方法——差分法和有限元素法．为了便于牢固地掌握这些内容，我们在每一章中都安排了一定数量的习题，供读者进行练习．本书所包含的内容比教材编写大纲规定的略多一些，某些超出大纲的内容书中以小字排印，可供有较充裕的时间的读者选学．在本书后有三个附录，“变分问题广义解的存在性及有限元素法的收敛性”、“特殊函数”及“富里埃变换表”，在书的末尾还加了名词索引，以便于读者查阅．

本书中主要用到数学分析与线性代数的知识，有些段落也用到常微分方程与复变函数的知识．在第一章§5，第六章、第八章还用到一些泛函分析的知识．故本课程以安排在第三学年为宜．本书前四章为数学物理方程最基本的内容，可以用约五十学时的教学时间完成．全书的内容(不包括小字)也可以在约九十学时的教学时间内完成．如果在课程安排上有更充裕的时间，则再加十几学时教学时间，就可把包括小字与附录Ⅰ在内的全部内容完成．如选用本书作为教材可以根据具体情况加以取舍．

本书部分内容参考了复旦大学数学系编的“数学物理方程”（第二版，上海科技出版社出版）与复旦大学数学系编的“微分方程及其数值解”等书，并且作了较多的修改与充实，参加本书编写的有谷超豪、李大潜、陈恕行、郑宋穆、谭永基同志.

兰州大学和四川大学担负了本书的审稿工作，他们以及其他兄弟院校的同志对本书的编写、修改提了许多宝贵意见.我们在此表示衷心的感谢. 由于我们水平的限制，教学经验也不足，书中一定还有很多缺点，我们殷切地期望同志们、读者们随时给予批评与指教.

编　者

一九七九年一月

目　　录

引　言

数学物理方程是指自然科学和工程技术的各门分支中出现的一些偏微分方程(有时也包括积分方程、微分积分方程等),它们反映了物理量关于时间的导数和关于空间变量的导数之间的制约关系. 例如连续介质力学、电磁学、量子力学等等方面的基本方程都属于数学物理方程的范围.

微积分产生以后,人们就开始把力学中的一些问题和规律,归结为偏微分方程而进行研究,早在十八世纪初,人们已经将弦线振动的问题归结为如下的偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

并探讨了它的解法. 随后,人们又陆续了解了流体的运动、弹性体的平衡和振动、热传导、电磁相互作用、原子核和电子的相互作用等等自然现象的基本规律,把它们写成偏微分方程的形式,并且求出了典型问题的解答,从而能通过实践,验证这些基本规律的正确性. 所以数学物理方程对于认识自然界基本规律是非常重要的.

有了基本规律,人们还要利用这些基本规律来研究复杂的自然现象和工程技术,这样又需要求解数学物理方程中的许多问题. 自从出现了电子计算机之后,即使是相当复杂的问题,也有可能计算出解的数值来,这对于预测自然现象的变化(如预报气象)和进行各种工程设计(如机械强度的计算)有着很重要的作用.

在研究数学物理方程的同时,人们对偏微分方程的性质也了解得越来越多,越来越深入,形成了数学中的一门重要的分支——偏微分方程理论. 它既有悠久的历史,又不断地更新它的对象、内

容和方法. 由于它直接联系着许多自然现象，所以又不断地产生需要解决的新课题和新方法. 由于它所面临的数学问题多样而复杂，所以不断地促进着许多相关联的数学分支(如泛函分析、复变函数、微分几何、计算数学等)的发展，并从它们之中引进许多有力的解决问题的工具. 所以数学物理方程又是纯粹数学的许多分支和自然科学各部门间的一个桥梁.

在本门课程中我们所要讲的是数学物理方程中一些最基本的内容.

第一章　波　动　方　程

本章介绍最典型的双曲型方程——波动方程，它在研究波的传播及物体振动时常会遇到．在§1中导出了一维波动方程(弦振动方程)和定解条件(初始条件、边界条件)，引进了定解问题适定性的概念．§2中利用达朗贝尔解法，导出了弦振动方程柯西问题解的表达式(达朗贝尔公式)，对于非齐次方程运用齐次化原理得到了解决．在§3中用分离变量法讨论了弦振动方程的混合问题．§4中首先用球平均函数法导出了三维波动方程柯西问题解的表达式(泊松公式)，然后用降维法导出了二维波动方程相应的解的表达式．在§2、§4中对波动方程的解的许多重要性质及相应的物理意义也作了说明，可以看到，不同维数的波动方程的解的性质是有着很大区别的．§5中采用能量积分的方法讨论了波动方程柯西问题及混合问题解的唯一性及稳定性，这个方法是从能量守恒原理出发而得到的．

§1．方程的导出．定解条件

1．弦振动方程的导出　一根紧拉着的均匀柔软的弦，长为 l，两端固定在 x 轴上 O、L 两点，当它在平衡位置附近作垂直于 OL 方向的微小横振动时，求这弦上各点的运动规律．

为此，如图 1.1 选择坐标系，并以 $u(x, t)$ 表示弦上各点在时刻 t 沿垂直于 x 方向的位移．

在这弦上任取一小弦段 $(x, x+\Delta x)$，它的弧长为

$$\Delta s=\int_{x}^{x+\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}}dx. \qquad (1.1)$$

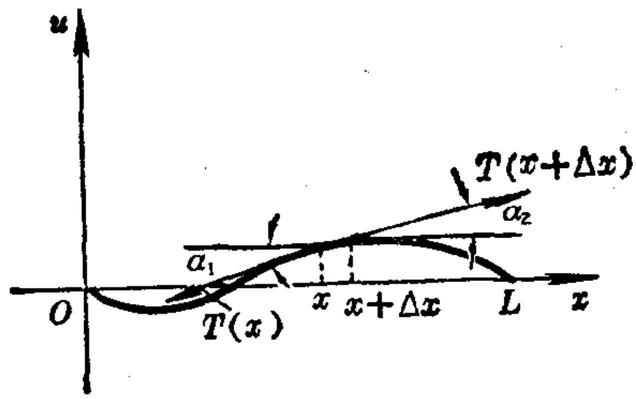

图 1.1

由于假定弦仅在平衡位置附近作微小振动，所以 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 很小，于是 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ 与 1 相比可以忽略不计，从而

$$\Delta s \approx \int_x^{x+\Delta x} 1 dx = \Delta x.$$

这样，可以认为这段弦在振动过程中并未伸长，因此由虎克(Hooke)定律知道，弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变，即张力与时间无关，我们把在 x 点处的张力记为 $T(x)$. 又由于假定弦是柔软的，所以张力 $T(x)$ 的方向总是沿着弦在 x 点处的切线方向.

作用在这段弦上的力有张力、惯性力、外力，下面我们写出它们的表示式和平衡条件.

如图 1.1 所示，在 x 点处的张力 $T(x)$ 在 x、u 两个方向上的分力分别为

$$-T(x)\cos\alpha_1, \qquad -T(x)\sin\alpha_1,$$

这里 α_1 是张力 $T(x)$ 的方向与水平方向的夹角，负号表示力的方向取与坐标轴相反的方向. 在弦段的另一端 $x+\Delta x$ 处的张力 $T(x+\Delta x)$ 在 x、u 两个方向的分力分别为

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2, \qquad T(x+\Delta x)\sin\alpha_2,$$

其中 α_2 是张力 $T(x+\Delta x)$ 与水平方向的夹角.

设弦的线密度为 ρ，弦段 $(x, x+\Delta x)$ 在重心 $\bar{x}$ 处的位移为

$u(\bar{x}, t)$，则这小弦段的质量和加速度的乘积为

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2},$$

当弦段不受外力作用时，根据牛顿第二定律，有

$$T(x+\Delta x)\sin\alpha_2 - T(x)\sin\alpha_1 = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1 = 0. \tag{1.3}$$

由于假设弦仅在平衡位置附近作微小振动，所以

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1, \tag{1.4}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1, \tag{1.5}$$

$$\sin\alpha_1 \approx \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \tag{1.6}$$

$$\sin\alpha_2 \approx \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x}, \tag{1.7}$$

于是，(1.3)式变为

$$T(x+\Delta x) - T(x) = 0, \tag{1.8}$$

所以 $T(x+\Delta x) = T(x) = T$，也就是说，T 是一个常数．从而(1.2)式变为

$$T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right] - \rho\Delta x \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0. \tag{1.9}$$

应用中值定理得到

$$T \frac{\partial^2 u(x+\tau\Delta x, t)}{\partial x^2}\Delta x - \rho\Delta x \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0<\tau<1.$$

消去 Δx，并令 $\Delta x\to 0$，此时 $x+\tau\Delta x\to x$，$\bar{x}\to x$，上式化为

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0,$$

记 $\frac{T}{\rho} = a^2$，就得到不受外力作用时弦振动所满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{1.10}$$

当存在外力作用时，若在点 x 处外力密度为 $F(x, t)$，其方向垂直于 x 轴，则小弦段 $(x, x+\Delta x)$ 上所受外力为

$$\int_x^{x+\Delta x} F(x, t)dx.$$

此时方程(1.2)的右侧应添上这一项，因而力的平衡方程是

$$T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right]-\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial t^2}$$

$$=-\int_x^{x+\Delta x} F(x, t)dx. \tag{1.11}$$

在等号两边应用中值定理，并令 $\Delta x\to 0$，所以，上式化为

$$T\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}=-F(x, t), \tag{1.12}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x, t). \tag{1.13}$$

这就是外力作用下弦振动所满足的方程，其中 $f(x, t)=\dfrac{F(x, t)}{\rho}$，表示单位质量在 x 点处所受外力.

最后，我们指出，弦振动方程中只含有两个自变量 x、t，其中 t 表示时间，x 表示位置. 由于它描写的是弦的振动或波动现象，因而它又称为**一维波动方程**. 类似地可导出二维波动方程（例如薄膜振动）和三维波动方程（例如电磁波、声波的传播），它们的形式分别为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x, y, t), \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$+f(x, y, z, t). \tag{1.15}$$

2. 定解条件 上面所导出的弦振动方程(1.13)包含有未知函数 $u(x, t)$ 和它的关于自变量的偏导数，所以是偏微分方程. 对于一个偏微分方程来说，如果有一个函数 $u(x, t)$，具有所需要的各阶连续偏导数，将它代入方程时能使方程成为恒等式，就称这个函数为该方程的**解**. 列出微分方程以后，目的就是要从微分方程中求得解. 例如，为了了解弦的振动情况，就应该设法求出相应的弦振动方程的解.

我们看到，弦振动方程(1.13)描述了弦作微小横振动时位移函数 $u(x, t)$ 所应满足的一般性规律，但仅仅利用它还不能完全确定所考察弦的运动状况，这是因为它的运动还与初始状态以及边界所处的状况有关，因此还得给出一些其他条件.

在上述弦振动问题中，弦的两端被固定在 $x=0$ 及 $x=l$ 两点，因此有

$$u(0, t)=0, \qquad u(l, t)=0, \tag{1.16}$$

它称为**边界条件**. 此外，设弦在初始时刻 $t=0$ 时的位置和速度为

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}=\psi(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l), \tag{1.17}$$

它称为**初始条件**. 边界条件与初始条件总称为**定解条件**. 把弦振动方程(1.13)和定解条件(1.16)、(1.17)结合起来，就得到如下的定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x, t), & (1.18)\\ t=0:\ u=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=\psi(x), & (1.19)\\ x=0:\quad u=0, & (1.20)\\ x=l:\quad u=0. & (1.21)\end{cases}$$

要在区域 $0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant 0$ 上(图 1.2)求上述定解问题的解，就是要找这样的连续函数 $u=u(x, t)$，它在区域 $0<x<l,\ t>0$ 中满

足波动方程(1.18)；在 x 轴($t=0$)的一段区间 $0\leqslant x\leqslant l$ 上满足初始条件(1.19)，并在边界 $x=0$ 及 $x=l$ 上分别满足边界条件(1.20)及(1.21).

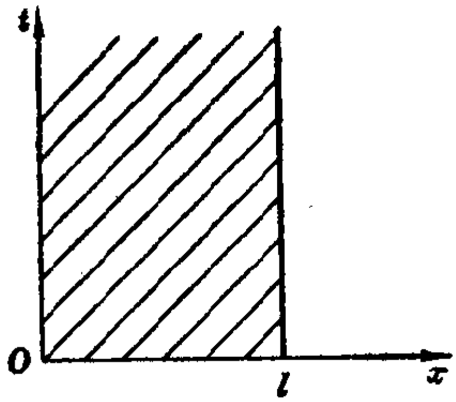

图 1.2

通常称边界条件(1.16)为**第一类边界条件**. 对于弦振动方程的边界条件通常还可以有以下两种:

(a) 弦的一端(例如 $x=0$)可以在垂直于 x 轴的直线上自由滑动，不受到垂直方向外力，这种边界称为**自由边界**. 根据边界微元右端的张力的垂直方向分量是 $T\frac{\partial u}{\partial x}$，得出在自由边界时应成立

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0.$$

在更一般的情形，沿边界张力的垂直分量是 t 的一个已知函数，这时相应的边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\mu(t),$$

这种边界条件称为**第二类边界条件**.

(b) 在应用上还会遇到另一种情形. 将弦的一端固定在弹性支承上，也就是说弹性支承的伸缩符合虎克定律. 如果支承原来的位置为 $u=0$，则 u 在端点的值表示支承在该点的伸长. 例如在 $x=l$ 的一端，弦对支承拉力的垂直方向分量为 $-T\frac{\partial u}{\partial x}$，由虎克定律

$$-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\left.ku\right|_{x=l}.$$

因此在弹性支承的情形，边界条件归结为

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\right|_{x=l}=0,$$