实变函数简编

朱玉增 编

高等教育出版社

实变函数简编

朱 玉 揩 编

高 等 教 育 出 版 社

本书精选了实变函数的基本内容，由浅入深地讲述了勒贝格积分理论的主要原理．注重阐明观点与方法，较紧密地结合数学分析．在第六章中还用实变函数知识，以较高观点深入浅出地介绍了与中学数学密切相关的一些基本数学概念．

本书可作师范专科学校数学专业的教学用书，对于自学实变函数的读者，也是一本有趣的入门书．

实变函数简编

朱玉堦编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.25 字数 152 000

1987 年 4 月 第 1 版 1987 年 4 月第 1 次印刷

印数 00 001—06 620

书号 13010·01384 定价 1.05 元

序

《实变函数简编》一书终于出版了，这是令人快慰的．我想，这是我国师范教育水平不断提高的一个标志．回顾五十年代的高等师范院校，实变函数课是不开的．这一方面是人们觉得它太深奥，与中学教师培养关系较少，另一方面也许是因为能开此课的教师不多．六十年代以后，少数高师数学系虽开了此课，多数仍未开设．近十年内，情况大变．不但高师数学系本科已将实变函数论列为必修课，而且师专数学科(三年制)也作为选修课或必修课普遍地开设了．抚今追昔，我们不能不为我国培养高水平中学教师的进展而由衷高兴．朱玉堦同志的这本书，也正是在这个潮流中产生的．

那末师专数学科为什么要开设实变函数课呢？学生学了有什么用呢？听说这件事曾有过不少争论．我个人觉得，这门课的首要目的，当然是为了提高中学数学教师的现代数学素养，以便适应二十世纪以来数学上的飞速发展，跟上时代前进的步伐．即便就中学教学内容来说，实变函数论也有许多内容与之直接相关．比方说，什么是多少？什么是大小？什么是次序？什么是曲线？曲线会不会填满一个正方形？什么是长度？什么是面积？是否每个集合都可以定义它的“长度”？什么是集合？集合论的基础是否可靠？这些看似平常，实则深刻的问题，难道一个好的中学教师，可以不去过问吗？朱玉堦同志在本书的第六章中深入浅出地就这些问题作了介绍，我认为是很好的．尽管这些内容教起来现在还会有困难，但我想不久之后，大家会习惯的．

《实变函数简编》是一本名符其实的简编．它删简了一些次要内容，却保持了勒贝格积分的主干，对于想进一步学习现代分析的读者，它仍然提供了一个完整的基础．由于作者对内容的处理相

当明快简洁,又有多次教学实践的经验,所以十分切合师专学生的实际水平. 听说本书的原稿曾受到许多师专老师们的好评，我想是不奇怪的.

朱玉堦同志早年就学于北京大学. 他的老师，冷生明教授和周民强副教授是本书写作的倡导者. 尤其冷生明先生，没有他的鼓励和支持,此书是难以问世的. 我作为师范教育系统的成员,希望综合性大学的数学专家多多帮助师范院校的教材建设 ,因而对冷先生和周先生的大力支持,也想借此机会表示深切的谢意.

华东师范大学程其襄教授等编写《实变函数与泛函分析基础》一书时,我曾参加过工作,后来我又支持朱玉堦同志在《实变函数简编》中的许多尝试. 我衷心希望,通过师范院校实变函数课程教师的共同努力,今后会有更多更好的教材问世,使实变函数课程的教学水平不断提高.

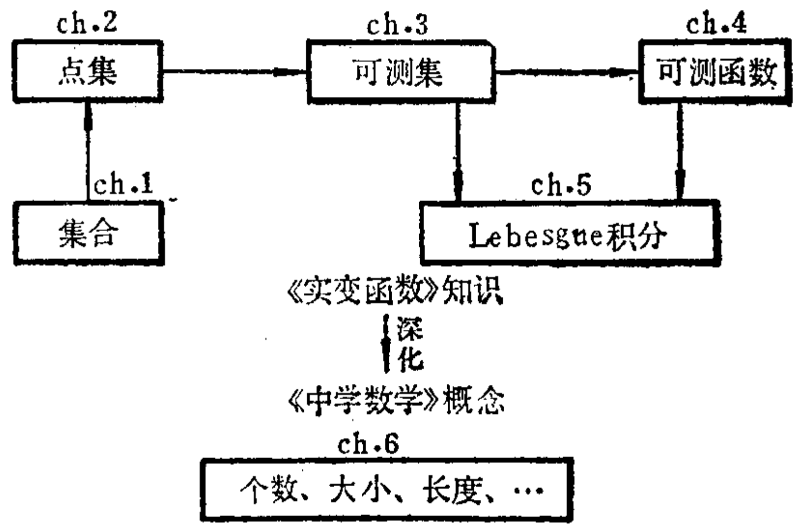
张奠宙

于华东师大数学系

1985 年 12 月

致 读 者

本书共分六章，各章之间的联系和全书的主干内容有如下列两个图表.



ch. 1, 2　逻辑与集合(结合极限等重要概念)

三个逻辑律，分析中的“反话”

集合等式，上、下限集

开集构造(直线上开集为可数个开区间之并)

↓

ch. 3　点集测度(与长度、面积比较)

可测集性质　(可数可加性)

可测集构造　(可测集“近于”开集)

↓

ch. 4　可测函数(与连续函数比较)

可测函数性质(四则运算、极限运算封闭性；可测函数可用简单函数逼近)

Лузин定理　(可测函数“近于”连续函数)

Егоров 定理　(几乎处处收敛“近于”一致收敛)

↓

ch. 5　Lebesgue 积分(与 Riemann 积分比较)

积分性质(绝对可积性，积分的绝对连续性)

积分三大定理(Levi、Fatou、Lebesgue 控制收敛定理)

本书的前身是《实变函数入门》，进行过校际交流，曾有多所学校选用，大多是作为师范专科学校教材或本科函授读本. 使编者感到意外的是，该讲义还引起不少工科院校及边远地区大学师生的兴趣.

高等教育出版社接受本书出版后，使我得以重新改写的机会. 趁此增加了练习题和各章结构图表，改写了与中学数学相关的若干基本概念并集中在最后一章，成为现在的《实变函数简编》，它既注意师范性，又顾及多用性.

一般说来，第 1—5 章(删去 ※ 号内容和部分练习题)，可供工科院校学生选用；师专使用，可再加上第六章部分内容；全部内容，可供部分师范院校本科生或函授生阅读，也可供自学实变函数的读者作为初学读物.

编　者

1985 年11 月

目　录

第一章　集合论初步

集合论是现代数学的基础,① 集合论的观点与方法渗入数学分析,便产生了实变函数论. 本章只介绍集合论的初步知识,为下面各章的学习提供必要的准备. 为了正确运用逻辑思维规律,也为了简化叙述,开头一节我们简单介绍常用的逻辑符号及其逻辑律.

◀内容提要▶　逻辑符号与逻辑律;集合的对等;可数集与不可数集;个数与基数.

§1　逻辑与"反话"

目前,逻辑符号在使用上并不统一,本讲义采用下列七个:

表 1-1

逻辑符号	$\forall$	$\exists$	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
意　　义	每一个	存在	非	且	或	若…,则…	当且仅当

利用逻辑符号,我们给出如下简明的对比表达:

表 1-2

$x_n \to a(n\to\infty)$	$x_n \not\to a(n\to\infty)$
$\forall\varepsilon>0$, $\exists \mathrm{N}$, $\forall n$, $n>\mathrm{N}\Rightarrow\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$.	$\exists\varepsilon>0$, $\forall N$, $\exists n$, $n>N\wedge\lvert x_n-a\rvert\geqslant\varepsilon$.

① 集合论是十九世纪的数学家试图为微积分奠定坚实的基础而产生的. 集合论公认的创始人是德国数学家康托(Georg Cantor, 1845—1918).

用通常的语言表达，则分别为

表 1-3

$\{x_n\}$以 a 为极限	$\{x_n\}$不以 a 为极限
任给 $\varepsilon>0$, 总存在某个 N_0, 对于每一个 n, 若 $n>N_0$, 则$\|x_n-a\|<\varepsilon$.	存在某个 $\varepsilon_0>0$, 对任意N, 总存在某个 n_0, 虽 $n_0>N$, 但$\|x_{n_0}-a\|\geqslant\varepsilon_0$.

在表 1-3 中，左边将 N 换成 N_0，右边将 ε、n 换成 ε_0、n_0 是为了强调某一个.

利用以下三个逻辑律，表 1-2 左右两边可以互推.

逻辑律 1° $\neg[\forall t, p(t)]\equiv[\exists t, \neg p(t)]$;

逻辑律 2° $\neg[\exists t, p(t)]\equiv[\forall t, \neg p(t)]$;

逻辑律 3° $\neg[p\Rightarrow q]\equiv[p\wedge\neg q]$.

我们可这样来分别理解它们:

“所有命题都成立”的反面是“其中有一个命题不成立”;

“诸命题中有一个命题成立”的反面是“所有的命题都不成立”;

“若条件 p 成立，则结论 q 成立”的反面是“虽条件 p 成立，但结论 q 不成立”.

对于逻辑律 1° 与 2°，学了数学分析后已经相当熟悉，但对逻辑律 3°往往没有足够重视.

借助于上述三个逻辑律，就可由表 1-2 的左边推出右边.

$$[x_n\not\to a, n\to\infty]$$

$$\equiv\neg[x_n\to a, n\to\infty]$$

$$\equiv\neg[\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n, n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon]$$

$$\equiv[\exists\varepsilon>0, \neg[\exists N, \forall n, n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon]]$$

$$\equiv[\exists\varepsilon>0, \forall N, \neg[\forall n, n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon]]$$

$\equiv[\exists\varepsilon>0, \forall N, \exists n, \neg[n>N \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon]]$

$\equiv[\exists\varepsilon>0, \forall N, \exists n,\ n>N \wedge \neg[|x_n-a|<\varepsilon]]$

$\equiv[\exists\varepsilon>0, \forall N, \exists n, n>N \wedge |x_n-a| \geqslant \varepsilon]$

熟悉了逻辑律之后，上述手续可以简化．例如由表 1-2 的左边写出它的右边，只须将“$\forall$”与“$\exists$”互换，将“$n>N \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$”换成它的反面“$n>N \wedge |x_n-a| \geqslant \varepsilon$”．

作为逻辑律 1° 与 2° 的特殊情况，我们有：

$$\left.\begin{array}{l}\neg[p\wedge q]\equiv[\neg p\vee\neg q]\\ \neg[p\vee q]\equiv[\neg p\wedge\neg q]\end{array}\right\}\text{(对偶关系)}$$

另外显然有：

$\neg[\neg p]\equiv p$,

$[p\Rightarrow q]\equiv[\neg q\Rightarrow\neg p]$．（原命题等价于逆否命题）

借助逻辑律，我们可“快速”处理下面两例．

例 1.1.1 数列$\{x_n\}$

“$\{x_n\}$有界”$\equiv[\exists M_0, \forall n, |x_n| \leqslant M_0]$;

“$\{x_n\}$无界”$\equiv\neg[\exists M_0, \forall n, |x_n| \leqslant M_0]$

$\equiv[\forall M, \exists n_0, |x_{n_0}|>M]$.

例 1.1.2 若$\{x_n\}$为有界数列，则

“$\sup\limits_n\{x_n\}=b$”

$\equiv[\forall n, x_n \leqslant b]\wedge[\forall\varepsilon>0, \exists n_0, x_{n_0}>b-\varepsilon]$;

“$\sup\limits_n\{x_n\}\neq b$”

$\equiv\neg[\forall n, x_n \leqslant b]\vee\neg[\forall\varepsilon>0, \exists n_0, x_{n_0}>b-\varepsilon]$

$\equiv[\exists n_0, x_{n_0}>b]\vee[\exists\varepsilon_0>0, \forall n, x_n \leqslant b-\varepsilon_0]$.

即$\{x_n\}$不以 b 为上确界是指：

1) b 不是$\{x_n\}$的上界，

或 2) 有比 b 更小的数为$\{x_n\}$的上界．

思考题 理解并熟悉下列各种说法:

$x_n \to a\,(n\to\infty)$	$x_n \not\to a\,(n\to\infty)$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon>0, \exists N_0, \forall n,$ $n>N_0 \Rightarrow \lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$	$\exists \varepsilon_0>0, \forall N, \exists n_0,$ $n_0>N \wedge \lvert x_{n_0}-a\rvert \geqslant \varepsilon_0$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon>0, \exists N_0, \forall n>N_0,$ $\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$	$\exists \varepsilon_0>0, \forall N, \exists n_0>N,$ $\lvert x_{n_0}-a\rvert \geqslant \varepsilon_0$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon>0$,除有限个 n 外, $\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$	$\exists \varepsilon_0>0$,有无穷个 n, $\lvert x_n-a\rvert \geqslant \varepsilon_0$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon>0$,对$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$, $\exists k_0$, $\lvert x_{n_{k_0}}-a\rvert<\varepsilon$	$\exists \varepsilon_0>0$, 有$\{x_n\}$的某一子列$\{x_{n_k}\}$, $\forall k$, $\lvert x_{n_k}-a\rvert \geqslant \varepsilon_0$

$$\Updownarrow$$

对$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$,可以抽子列$\{x_{m_i}\}$,使 $x_{m_i}\to a$	有$\{x_n\}$的某一子列$\{x_{n_k}\}$,不能抽子列$\{x_{m_i}\}$,使 $x_{m_i}\to a$

[评注] 初学本教材,对分析的语言,应该再下一番功夫."ε-N"语言是严格的便于论证的最重要的语言."除有限个 n 外","有无穷个n"的语言是更直观的便于思考的语言,实变函数中常用这种语言."抽子列"的语言,在近代数学中常出现,应用时带有一定技巧性.

练 习

1. 设 p 表示"我努力工作",q 表示"你爱好数学",r 表示"他感到高兴".问下列符号表达式各表示什么?

(1) $p\wedge r$,

(2) $p\Rightarrow[q\vee r]$,

(3) $\neg r \Longleftrightarrow [p\wedge \neg q]$,

(4) $p\wedge[q\vee r]$,

(5) $r\Rightarrow[p\wedge q]$.

2. 说明“$\exists N_0, \forall n>N_0$”可以表示“除了有限个 n 外”，“$\forall N, \exists n_0>N$”可以表示“有无穷个 n”. 试用直观的语言表达:

(1) “$\forall \varepsilon>0, \exists N_0, \forall n>N_0, |x_n-a|<\varepsilon$”;

(2) “$\exists \varepsilon_0>0, \forall N, \exists n_0>N, |x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$”.

3. 试证明下列命题成立:

(1) $x\neq x\Rightarrow x$ 大于一切实数,

(2) $1>100\Rightarrow|x_1-a|<\varepsilon$.

［提示］ 在数学中，命题 $p\Rightarrow q$ 与命题 $\neg p\vee q$ 等价. 从而只要 p 不真，$p\Rightarrow q$ 就是真的命题. 我们要熟悉这种推理.

§2 集合的概念及集合之间的关系

集合或集是数学中的一个基本概念. 在中学数学里已介绍过一些集合知识. 但真正要把集合说清楚并不容易，它如同几何学中的点、线、面一样，是一个原始概念. 在现代集合论里，是用公理定义的. 本课程不涉及一般的集合论，我们用通常的描述方法进入这一领域. 例如自然数全体组成的集合称为自然数集合，记为 N. 同样我们可以描述有理数集合 Q,实数集合 R,复数集合 C 等. 又如 $[a, b]$ 上的连续函数的全体组成了一个集合，记为 $C[a,b]$. 一般地，把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来考虑时,这个整体就称为一个集合,简称为集，其中的成员称为这个集合的元素或元. 给定一个集合，我们就应该能明确地判别任何一个个体是否在此集合中，其根据就是组成此集合元素的确定性.

通常我们用大写字母 $A, B, X, Y\cdots$表示集合,小写字母 $a, b, x, y\cdots$表示元素. 元素 x 在集合中记为 $x\in A$;否则，记为 $x\overline{\in} A$. 例

如$\frac{1}{3}\in Q$，$\sqrt{2}\overline{\in}Q$，但$\sqrt{2}\in R$.

表示集合有两种方法，其一是列举法. 例如由数1,2,3,4,…，100组成的集合A，用

$$A=\{1,2,3,\cdots,100\}$$

来表示，也就是说在花括号内将其元素一一列举出来. 其二是描述法. 例如上述集合中的元素具有特征：它们是“自然数且不超过100”. 所以该集合又可写成

$$A=\{x;x\in N\wedge x\leqslant 100\}.$$

或按通常写法 $A=\{x;x\in N,x\leqslant 100\}$，其中逗号“,”表示“且”.

一般地，$\{x;p(x)\}$表示具有性质$p(x)$的x的全体. 于是

$$x\in\{x;p(x)\}\Longleftrightarrow x\text{ 具有性质 }p(x).$$

例如，$2\in\{x;(x-2)(x-3)=0\}$，因为当$x=2$时，$(x-2)(x-3)=0$.

又如，$4\overline{\in}\{x;(x-2)(x-3)=0\}$，因为当$x=4$时，$(x-2)(x-3)\neq 0$. 即$x=4$时，$(x-2)(x-3)=0$不成立.

由上可见，当x_0取定时，$p(x_0)$即表示一个命题. $p(x_0)$为真时，$x_0\in\{x;p(x)\}$；反之，若$p(x_0)$为假时，则$x_0\overline{\in}\{x;p(x)\}$.

集合$\{x;p(x)\}$也可表成$\{x|p(x)\}$或$\{x:p(x)\}$.

集合之间的关系有包含、相等、相交、相离等.

定义1.2.1 给定集合A与B. 若A的元素都是B的元素，则称A为B的一个子集. 这时我们说A包含于B或B包含A，并记为$A\subset B$或$B\supset A$.

这定义可用符号表示为

“$A\subset B$”$\Longleftrightarrow$“$\forall x: x\in A\Rightarrow x\in B$”.

例 1.2.1 $\{1,2,3\}\subset\{1,2,3,4\}$.

例 1.2.2 $N\subset Q$，$Q\subset R$.

例 1.2.3 $\{x; f(x)>1\}\subset\{x; f(x)>0\}$.

易见，集合的包含关系有如下性质：

1° $A\subset A$; (自反性)

2° $A\subset B, B\subset C\Rightarrow A\subset C$; (传递性)

显然，

"$\forall x: x\in A\Rightarrow x\in B$" $\Longleftrightarrow$ "$\forall x: x\overline{\in} B\Rightarrow x\overline{\in} A$".

考察集合 $\{x; x\neq x, x\in R\}$，它不含任何元素，这是因为不等于自身的实数是不存在的. 我们把这种不含任何元素的集合，称为空集合，记为 $\varnothing$（丹麦文，读"欧"）. 若一个集合的元素只有有限个（空集的元素个数认为是零），则称它为有限集. 一个非空集，如果不是有限集，就称它为无限集.

例 1.2.4 $\{x; x^2+1=0, x\in R\}=\varnothing$.

我们认为空集 $\varnothing$ 是一切集合的子集. 即 $\forall A$, $\varnothing\subset A$. 其合理性的理由如下：

$$\forall x: x\overline{\in} A\Rightarrow x\overline{\in}\varnothing.$$

定义 1.2.2 若集合 A 与 B 的元素完全相同，则说 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

用符号表示：

"$A=B$" $\Longleftrightarrow$ "$\forall x: x\in A\Longleftrightarrow x\in B$".

由此易见，

"$A=B$" $\Longleftrightarrow$ "$(A\subset B)\wedge(A\supset B)$". ①

上式是证明两个集合相等的基本方法.

例 1.2.5 若 $A=\left\{x; f(x)=\dfrac{1}{2}\right\}, B=\{x; 2f(x)=1\}$，则 $A=B$.

事实上，

---

① 这表明集合中的包含关系"$\subset$"还具有性质：
(3) $(A\subset B)\wedge(B\subset A)\Rightarrow A=B$ （反对称性）

1) $\forall x: x\in A \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2f(x)=1 \Rightarrow x\in B.$

$\therefore A\subset B;$

2) $\forall x: x\in B \Rightarrow 2f(x)=1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x\in A.$

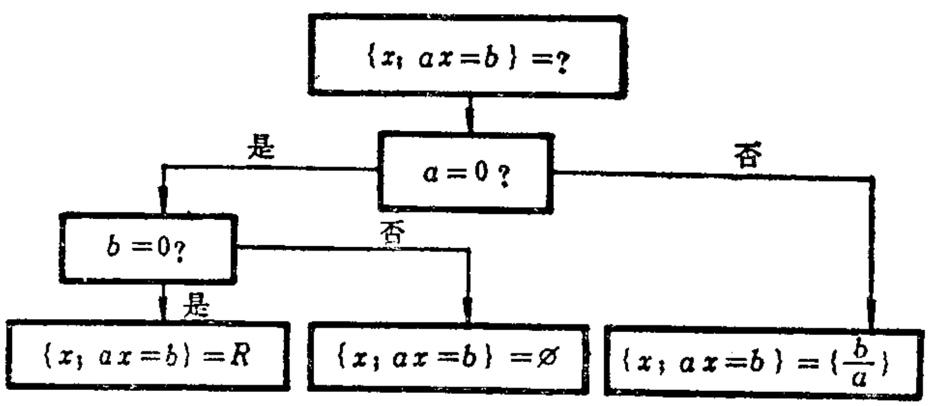
$\therefore\quad B\subset A.$

从而 $\quad A=B.\qquad\qquad$ □(此处□表示证明终结,后同)

例1.2.6 设 $a,\ b\in R$. 在实数范围内求方程 $ax=b$ 的解集(满足 $ax=b$ 的一切 x 的集合).

解 可将思考过程列表如下:

表 1-4



读者可按通常表达方式,写出完整解答.

定义 1.2.3 给定集合 A 与 B. 若 $A\subset B$, 且 $A\neq B$, 则称 A 为 B 的一个真子集. 记为 $A\subsetneqq B$.

此时, 1) $\quad\forall x:\ x\in A\Rightarrow x\in B;$

2) $\quad\exists x_0: (x_0\in B)\wedge(x_0\overline{\in} A).$

例1.2.7 $\quad\{1,2\}\subsetneqq\{1,2,3\}.$

例 1.2.8 $\quad N\subsetneqq Q\subsetneqq R\subsetneqq C.$

任意两个集合 A、B 之间的关系如图 1-1 所示.

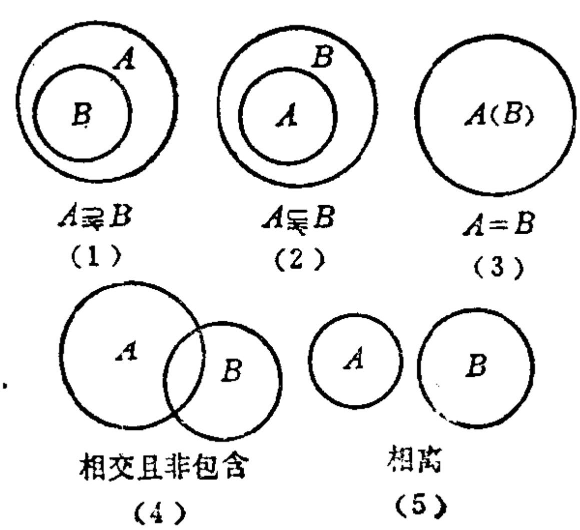


图 1-1