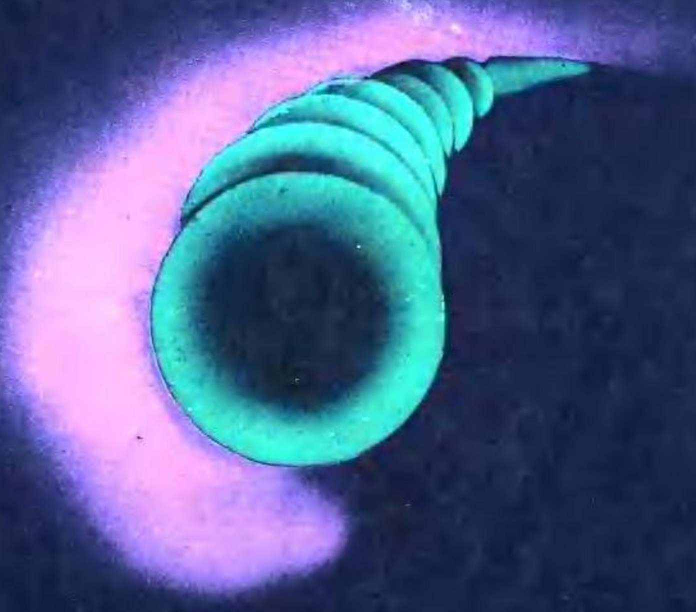
浙江大学出版社

高等学校教材

吴迪光　张　彬　编著

微积分学



上册

高等学校教材

微积分学

上 册

吴迪光 张 彬 编著

浙江大学出版社

(浙)新登字 10 号

微积分学

上　册

吴迪光　张　彬　编著

责任编辑　涂　红

*　　*　　*

浙江大学出版社出版

浙江大学出版社电脑排版中心排版

浙江省煤田地质局制图印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*　　*　　*

787×1092　16开　19.25印张　510千字

1995年4月第1版　1995年4月第1次印刷

印数：0001—5000

ISBN 7-308-01521-1/O·176　定价：11.20元

前　言

本书是按照国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会拟定的高等数学课程教学基本要求，并根据我校是一所以工为主、理工结合、兼有人文、经管的多科性大学的特点而编写的，内容有：一元函数微积分、矢量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数（包括傅里叶级数）、常微分方程等五部分．学时范围为190～210学时，可作为高等学校工科、理科（非数学专业）、经济管理等有关专业本科生的微积分课程的教材．书中冠有“＊”号部分（用小体字排版）系供对微积分要求较高的专业选用和自学者阅读．

为了便于教学，编写时力求表述确切、思路清楚、由浅入深、通俗易懂、例题适当、注重解题方法、培养能力．每章末附有较充足的习题，包括计算题、分析论证题、综合应用题，并插有思考讨论题，书末附有答案，较难的题附有提示，课后布置习题可选其中三分之一左右，其余的可供学有余力的学生根据本专业要求自行选做，在内容安排上我们注意以下几点：

(1) 预备知识部分介绍了实数集、实数连续性，有限集的最大最小数，有界无限集的上确界与下确界概念，使学生了解无限集不同于有限集，从而为引入极限概念和理论作准备．

(2) 加强极限“夹逼”法的运用，这一方法不但是导出微分学两个重要基本公式和定积分存在性证明所必需，同时本身也是从已知求未知的一种重要方法．

(3) 用定义在 R^n 上的点函数统一了多元函数概念和多元函数的积分概念，以期加强内容的内在联系，同时减少不必要的重复，也节省了学时．

(4) 将常微分方程主要部分提前在紧接一元微积分之后，全微分方程放在曲线积分与路径无关一节，级数解法放入无穷级数应用一节，这不只是为了与物理课程的教学相配合，同时也有利于加强一元函数建立函数关系的训练．

(5) 为了加强矢量分析的应用，场论中梯度部分放入多元偏导数应用一节，散度与旋度放入多元函数积分学有关章节．

本书的绪论、预备知识与第一、二、三、七、十、十一、十二、十三、十四章由吴迪光撰稿，第四、五、六、八、九章由张彬撰稿．

本书的出版得到浙江大学应用数学系和浙江大学教务处的支持，并由黄达人教授审稿，潘兴斌教授、方道元博士、金蒙伟博士对书稿各有关章节提出了许多极为宝贵的意见，数学系分管教学的系主任丁善瑞副教授，还参加了本书下册的编写研讨，在此表示衷心的感谢．

本书可能有不当甚至差错之处，恳请读者批评指教，我们不胜感激．

吴迪光　张　彬

1994年3月

目　录

绪 论

(一)

微积分——变量数学的基础部分,它的系统发展开始于17世纪后半叶,但它的思想却萌芽于公元前若干世纪.我国战国时期的哲学著作《庄子》载公孙龙提出的命题:“一尺之棰,日取其半,万世不竭”,认为物质是连续的,无限可分的;而另一派墨子(公元前约498—418)提出:“非半弗斫,则不动,说在端”,“端,是无间也”,认为物质既连续可分,但又有间断,存在不可分的最小单位“端”.古希腊学者亚里士多德(Aristotle,公元前384—322)认为:“连续就是可分割为无限可分的东西”,“数必定终止在不可分割的东西上.”阿那克萨哥拉(Anaxagoras,公元前约500—428)认为:“在小的东西里面并没有最小的,总是有更小的,因为存在的东西决不能因为分割而不复存在.”我国战国时期名家惠施(公元前约380—300)提出:“至大无外,谓之大一;至小无内,谓之小一”,这里所谓“大一”、“小一”蕴含了无穷大量与无穷小量的思想.我国记载天文历算的古书(公元前11世纪)——《周髀算经》载学者商高语:“圆出于方,方出于矩”,提出了曲与直及其转化的思想.古希腊智者派安提丰(Amtiphon,公元前5世纪)提出可以把圆看成无穷多边的正多边形,揭示了有限与无限的思想.毕达哥拉斯学派布莱生(Bryson,公元前5世纪)则从圆的外切正多边形来逼近圆形,后人称之为“穷竭法”.阿基米德(Archimedes,公元前约287—212)应用穷竭法计算圆周率精确到10^{-3}和从一系列三角形面积之和得出抛物弓形的面积.公元263年,我国数学家刘微提出“割圆术”:“割之弥细,所失弥少,割之又割以至不可割,则与圆合体而无所失矣.”这里所谓割之又割,蕴含了步骤的无限继续,以至不可割蕴含了无限步骤达到飞跃而完成,得到与圆合体的精确值.这些讨论都可以说是微积分思想的源泉.

(二)

微积分作为一门学科的形成,是伴随着社会生产的发展经历了漫长岁月的,直到15世纪下半叶,欧洲适应资本的原始积累的需要,生产力开始得到很大的发展,工业方面建立了机械工场,机械用于采矿、冶金工业.美洲的发现,环球航行的成功,通商贸易范围的扩大,促进了交通事业的发展,这样也为自然科学展示出崭新的课题,例如,为了研究光线对透镜镜面(曲面)的折射与反射现象,需要研究曲线的切线问题;对钟摆运动的研究,需要讨论在运动状态下摆锤的位置与速度随时间变化的规律,这就超出了静力学的研究范围.另一方面,哥白尼(Copernicus,1473—1543)的“日心说”动摇了一直处于天文学统治地位的“地心说”,也标志着自然科学从神权的束缚下的解放,从此自然科学迅速发展起来.卡瓦列利(Cavalieri,1598—1647)把构成线、面、体的基本单元(点、线、面)叫做不可分量,把几何图形看作是组成这一图形的不可分量单元的无穷积累,这一方法可以说是“穷竭法”向积分方法的过渡.笛卡儿(Descartes,1596—1650)与费玛(Fermat,1601—1665)提出了按运动的观点定义曲线,引进了坐标概念,把空间数量化,对力学、光学、天文学的研究起了推动作用,为微积分的诞生作了准备.1655年,瓦里斯

(Wallis，1616—1703)的《无穷算术》提出了极限过程. 1638 年费玛得出求极值的“静止原理”. 1670 年巴罗(Barrow，1630—1677)在《光学及几何学讲义》中提出了与微分三角形相一致的概念. 这样，经过许多人的努力，为微积分这门学科的形成积累了充分的资料. 德国的天文学家开普勒(Kepler，1571—1630)在第谷(Tycho Brahe，1546—1601)积累的天文观测数据的基础上，继续对行星轨道进行观测，发现对火星运动的观测数据与哥白尼“日心说”的数据总相差约 $(\frac{1}{8})^{\circ}$，使他对圆形轨道产生了怀疑，于 1609—1619 年相继提出了行星运行轨道的三条定律. 牛顿(Newton，1643—1727)则认为行星运动之所以具有上述性质，必是某一力学规律的结果，他在伽利略(Galileo，1564—1642)的自由落体力学分析的基础上，进而发现了万有引力定律，由于行星运行速度的不均匀性，需要描述这类不均匀的速度，他提出了流数法，认为曲线是由点的连续运动生成的，因此，形成曲线的点的横坐标和纵坐标一般说来都是变化着的量，把这个变化着的量称为流，而把流的变化率称为流数——导数. 由流数关系式反过来求流量关系式，这就是求导数的逆问题——积分问题. 这样，从物理学角度为微积分的诞生与深入研究提供了正确道路. 与此同时，莱布尼兹(Leibniz，1646—1716)从几何角度得出曲线的切线斜率，明确了求区间 $[a,x]$ 上曲边梯形的面积 $A(x)$ 与求曲线切线斜率的互逆关系. 从此微积分这门学科宣告诞生了.

微积分学是从量的侧面描述物质运动变化过程的一门基础数学，其中度量长度、时间、质量…… 等等量所用到的数系是实数系，由于当时实数系理论的不完备，微积分开始建立时的运算只是形式的，致使微积分学还缺乏坚实的理论基础. 早在公元前 5 世纪，毕达哥拉斯学派就发现，若假定量只是有限可分，便遇到正方形的对角线与其边长不可公度的困难. 在微积分诞生后，首先遇到了有理数列在有理数集内不一定有极限这类问题. 1872 年戴德金(Dedekind，1831 — 1916)提出了“分划理论”；魏尔斯特拉斯(Weierstrass，1815 — 1897)提出了单调有界数列必有极限；康托(Cantor，1845 — 1918)提出用有理基本数列的等价类定义了无理数，明确了度量空间的完备性. 这样，实数的三派理论从不同角度定义了无理数，他们的文章同于 1872 年在德国发表，从而实现了实数系的明确理解. 接着遇到的是什么是无穷小量的问题，魏尔斯特拉斯提出用“$\varepsilon - \delta$”的分析方法来描述极限过程，使柯西(Cauchy，1789 — 1857)以极限语言给出的无穷小的定义有了分析的描述，从而实现了对无穷小量的辩证理解；同时，由波尔察诺(Bolzano，1781 — 1848)所给出的连续函数的定义；柯西给出的定积分作为和式极限的定义，以及可导性、收敛性等等定义，都可以用“$\varepsilon - \delta$”的分析语言来统一描述. 黎曼(Riemann，1826 — 1866)放宽了定积分定义中被积函数的连续条件，继而由达布(Darboux，1842 — 1917)完成了可积定理，至此，又经过许许多多数学家的相继努力，微积分的基本理论系统开始形成. 到 20 世纪，策墨罗(Zermelo，1871 — 1953)与富兰克尔(Fraenkel，1891 — 1965)进一步完善了康托的集合论，微积分发展到系统地运用集合论来处理数学问题.

(三)

微积分学是建立在无限观念上的基础数学，它处理问题的基本方法是极限法. 我们知道客观世界多种多样的物质运动变化状态，一般可区分为均匀变化与非均匀变化两大类型. 在中学教材中的常量数学，已能描述均匀变化的状态，但对非均匀变化的状态就受到限制了. 例如，设物体的运动方程为 $s = s(t)$，为了描述作直线运动物体的速度，在匀速情形，若已知在 $\Delta t = t -$

t_0 时间内物体经过的路程为 $\Delta s = s(t) - s(t_0)$，那么，用一次除法运算，便得平均速度 $\bar{v}$，即

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{1}$$

这里 $\bar{v} =$ 常量，它可描述匀速运动过程中任一时刻运动的快慢. 对非匀速情形，由于速度随时间 t 而变，此时(1) 式中 $\bar{v} \neq$ 常量，为了求某一瞬时 t_0 的速度 v，无论将 $|\Delta t|$ 取得多么小，由(1) 式总只能是 v 的一个近似值. 为了求得精确值，须令 $|\Delta t|$ 无限缩小(但 $\Delta t \neq 0$，否则(1) 式无意义)，用无限多个近似值来逼近精确值，即采用极限法，令 $\Delta t \to 0$(Δt 无限趋近零)，从(1) 式取极限，若 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \to A$(常数)，那么 A 便是所求该瞬时 t_0 的速度 v 的值，即 $v(t_0) = A$. 采用数学符号，记为

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \overset{\text{记}}{=} \frac{ds}{dt}\Big|_{t=t_0} = A, \tag{2}$$

并称 $\frac{ds}{dt}\big|_{t=t_0}$ 为路程函数 $s = s(t)$ 关于时间 t 在 t_0 处的导数，其中 lim 是英文“极限”limit 的前三个字母. 导数的概念与求导的方法是微分学中研究的基本内容之一.

与上述问题相反，若已知某变速直线运动的速度 $v = v(t)$ 是时间 t 的连续函数，要求物体从时间 $t = a$ 到时间 $t = b(a < b)$ 经过的路程. 对匀速运动来说，只需用一次乘法运算就可以了，即由(1) 式得

$$\Delta s = \bar{v}\Delta t, \tag{3}$$

其中 $\Delta t = b - a$，$\Delta s = s - s_0$，s_0 是运动的初始位置. 若运动是非匀速情形，那么速度 v 不是常量，为了求经过的路程，此时(3) 式已不适用. 设想将时间区间 $[a,b]$ 分成 n 小段，不妨记每一小段的左端点分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，同时记每一小段长 $t_{i+1} - t_i = \Delta t_i$，$i = 1,2,\cdots,n$，在每一小段上，以等速 $v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n)$ 近似代替变速 $v(t)$，从而由(3) 式得到各相应小段上经过的路程近似地为

$$\Delta s_1 \approx v(t_1)\Delta t_1, \quad \Delta s_2 \approx v(t_2)\Delta t_2, \quad \cdots \quad, \Delta s_n \approx v(t_n)\Delta t_n. \tag{4}$$

其中 $\Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n = s$. 将(4) 式中各项相加，得到在整个时间区间 $[a,b]$ 内物体经过的路程的近似值，即有

$$s \approx v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \cdots + v(t_n)\Delta t_n. \tag{5}$$

无 论将 $[a,b]$ 分得多么小，(5) 式中得到的总只能是 s 的一个近似值. 为了求得精确值，将区间 $[a,b]$ 无限细分，那么，(5) 式右边就无限逼近精确值 s，若记 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\Delta t_i\}$，令 $\lambda \to 0$，于是

$$s = \lim_{\lambda \to 0}[v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \cdots + v(t_n)\Delta t_n] \overset{\text{记}}{=} \int_a^b v(t)dt, \tag{6}$$

并称 $\int_a^b v(t)dt$ 为速度函数 $v = v(t)$ 在时间区间 $[a,b]$ 上的定积分.

以上步骤可用更形象的符号来简单表示，设想将 $[a,b]$ 无限细分，每一微小长度记为 dt，那么在区间 $[t, t + dt] \subset [a,b]$ 内物体以速度 $v(t)$ 运动所经过的路程，记为

$$ds = v(t)dt, \tag{7}$$

(7) 式中 ds 或 $v(t)dt$ 称为路程 s 的微分. 这样(6) 式简记为

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b v(t)dt. \tag{8}$$

将(8) 式与(7) 式联系起来看，可知总体量 s 可通过局部量 —— 微分 ds 用积分表示出来，这种方法即所谓定积分的微元法的思想.

从以上对微分与积分的粗略思想介绍，可以看出微分与积分分别属于局部与整体两类不

同范畴的问题，解决问题的思想方法是通过无限步骤，借助极限方法达到近似量转化为精确量.

极限理论是微积分学的基础，它从思想方法上突出地表现了变量数学不同于常量数学的特点. 关于一元函数的极限、导数与微分及积分的介绍，分别见本书第二、三、五、六章.

（四）

从以上介绍，可以看出，从实际中来又紧密联系现实世界的实际是微积分学的显著特点，其考虑问题和解决问题的具体方法，对于建立能用于更广泛范围的统一理论有着重要的意义. 对于初学微积分的读者，在学习方法上需要逐步掌握这种处理变化无限的变量问题的一系列方法，要改变那种偏重解题技巧而不重视数学概念和思想方法的习惯，要知道微积分的精华，并不仅仅是一些解题技巧，而是要更多地体会隐藏在各个基本概念背后的数学思想，如果数学思想不明确，即使有一些解题技巧，也不一定能得到有价值的科学结论. 只有概念清楚，数学思路明确，那么解题技巧才能充分显示其作用. 同时，微积分学中的各个概念是有机的统一体，读者在学习时，要正确理解各个基本概念之间的内在联系，正确理解各个基本定理和公式的背景与具体条件、结论和应用的范围，明确论证的方法和步骤，并能正确地运用. 在学习中要善于从教材中一些简单的数学模型（用数学式子对一些几何、物理或其他实际问题的数学描述）的建立与求解中吸取数学语言的确切表述，选择适当的方法求解，并用求得的解来解释原型问题，同时用从原型得来的信息检验所得的解答，以及确认结果的正确性.

在整个学习过程中，还要善于把知识按一定结构（教学计划与培养目标）努力综合成具有解决科学技术问题的实际本领. 知识的积累与综合的过程，不同于简单的算术加法，而是会能动地产生新质，特别是近代科学技术中，多科性的知识、技术与能力的综合，在某种意义上说，综合就是创造. 我们期望读者通过本门课程的学习，获得微积分学的基础知识和得到能力的培养，初步掌握做学问和进行科学研究的基本思想与方法，为进一步扩大知识领域，学习专业知识，为祖国现代化而工作打好必要的基础.

预备知识

§1 实数集

1.1 实数、数集

人们在遇到的量中，有一类量具有单个的自然单元，通过“数一数”，抽象出**自然数** 1,2,3,…；还有一类量，如长度、体积、重量等，不具有单个的自然单元，但可对它进行分割，人们通过选定的单位量进行度量，有时恰好能度量得尽，有时会遇到要逐步缩小选定的单位量方能度量得尽，甚至还有度量不尽，出现不可公度的情形，这样，抽象出**有理数**与**无理数**，有理数与无理数总称**实数**.

我们知道，**自然数集**表示为

$$N = \{1,2,3,\cdots\},$$

整数集表示为

$$Z = \{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\},$$

有理数集表示为

$$Q = \{x \mid x = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\},$$

实数集表示为

$$R = \{x \mid x \text{ 或是有理数，或是无理数}\}.$$

在上述集合中，我们知道 $N \subset Z \subset Q \subset R$，即前者是后者的真子集. 本书中，如无特别声明，凡讲到的数均指实数，凡讲到数集均指 R 的子集.

1.2 实数的性质

实数具有熟知的交换、结合、分配律等运算规则外，还有以下几个常见的重要性质.

(1) **有序性** 任意两个实数 x,y 之间有且仅有下列三种关系之一：

$$x > y;\quad x = y;\quad x < y.$$

(2) **可比性(阿基米德公理)** 若 x 和 y 都是实数，且 x 为正，则存在自然数 n，使得 $nx > y$.

以上性质 1°、2° 对整数集 Z 就已具备.

(3) **稠密性** 在任何两个不相等的实数之间总存在实数.

事实上，这一性质对有理数就已具备，是有理数集 Q 区别于整数集 Z 的一个重要特征. 这就是说，对任何 $a,b \in Q(a < b)$，在 a,b 之间至少可找到一个有理数 c，使 $a < c < b$. 例如，取 $c = \frac{a+b}{2}$；再取 $d = \frac{a+c}{2}$，就有 $a < d < c$，依此类推，不论 a,b 相差多么小，在 a,b 之间总可找到无穷多个有理数，这就是有理数的稠密性.

(4) **连续性** 将实数集 R 分划(切割)为两个子集 A,B，它们满足：

1° A,B 为非空集；2° $R = A \cup B$；3° 对任何 $x \in A, y \in B$，成立 $x < y$，则称 (A,B) 为

对实数集 R 的一个分划(切割). 对 R 的任何一个分划 (A,B),或者 A 具有最大实数,或者 B 具有最小实数,二者有且仅有一种情况发生,这就是**实数的连续性**.

从几何上看,全体实数和数轴上的点之间存在着一一对应关系(即对任意 $x\in R$,存在唯一个数轴上的点 P 与之对应,又对数轴上任意一点 P,存在唯一的 $x\in R$ 使 x 与 P 对应),对应于数轴上点分布的连续性,也就是实数的连续性,它说明实数集,没有任何空隙,还应指出:有理数集 Q 虽说稠密,但仍有空隙,例如 $\sqrt{2}\notin Q$. 因此,连续性是实数集区别于有理数集的特征,为了强调这一特征性质,常常把实数集 R 叫做**实数连续统**.

例 1 计算 $\sqrt{2}$ 的近似值.

解 采用有理数列夹逼无理数的方法. 将线段 $[1,2]$ 十等分,其分点是 1.1, 1.2, 1.3, …1.9,通过计算可得

$$1.1^2<1.2^2<1.3^2<1.4^2<2<1.5^2<1.6^2<1.7^2<1.8^2<1.9^2,$$

于是有

$$1.4<\sqrt{2}<1.5;$$

再把线段 $[1.4,1.5]$ 十等分,其分点是 1.41, 1.42, 1.43, …, 1.49,又通过计算,有

$$(1.41)^2<2<(1.42)^2;$$

再一次把线段 $[1.41,1.42]$ 十等分,通过计算,可得

$$(1.414)^2<2<(1.415)^2,$$

这样,逐次十等分,可得一个 n 位有理小数 a_n,使得

$$a_n<\sqrt{2}<b_n=a_n+\left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

或

$$0<\sqrt{2}-a_n<\left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

这样通过两边夹逼求得无理数 $\sqrt{2}$ 具有允许误差 $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ 的 n 位小数的近似值 a_n. 事实上,对每一个无理数 α,总可举出两个有理数 r_1,r_2,使

$$r_1<\alpha<r_2,$$

而 $r_2-r_1=\delta$,不管这个随意选定的有理正数 δ 是多么小. 上述这种两边夹逼的方法,是从已知求未知常采用的方法.

例 2 试证

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

等号仅当 $n=1$ 时成立.

证 由不等式 $\frac{m}{m+1}<\frac{m+1}{m+2}$,令 $m=1,2,3,\cdots,2n-1$,两边分别作乘积得

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2n}{2n+1}\overset{\text{记}}{=}v_n,$$

于是

$$u_n^2<u_nv_n=\frac{1}{2n+1}\quad\text{或}\quad0<u_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}};$$

又

$$\omega_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}=u_n,$$

于是

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}=\omega_nu_n\leqslant u_n^2\quad\text{或}\quad\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant u_n.$$

综上所述,得

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

等号仅当 $n=1$ 时成立.

为简便计,常引入记号 $1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)=(2n-1)!!$,以及 $2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n=(2n)!!$,于是

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

例 3 设有 n 个($n\geqslant 2$)正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,证明

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \tag{1.1}$$

(调和平均) (几何平均) (算术平均)

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

先证(1.1)右边不等式,即几何平均不大于算术平均.

证 不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的最小数是 a_1,最大数是 a_n(否则,调换它们的次序重新编号即可).于是

$$a_1 \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leqslant a_n,$$

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

记 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\bar{a}$,于是

$$(\bar{a}-a_1)(\bar{a}-a_n)=a_1a_n-\bar{a}(a_1+a_n-\bar{a})\leqslant 0,$$

即

$$0<a_1a_n\leqslant \bar{a}(a_1+a_n-\bar{a}). \tag{1.2}$$

下面用数学归纳法证明(1.1)右边不等式成立.

已知当 $n=2$ 时,$\sqrt{a_1a_2}\leqslant \frac{a_1+a_2}{2}$ 成立.

设(1.1)对 $n-1$ 时成立,那么,对 $a_2,a_3,\cdots,a_{n-1}$ 和 $(a_1+a_n-\bar{a})$ 这 $n-1$ 个数,有

$$\sqrt[n-1]{a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-\bar{a})} \leqslant \frac{a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+(a_1+a_n-\bar{a})}{n-1}=\frac{n\bar{a}-\bar{a}}{n-1}=\bar{a},$$

从而

$$a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-\bar{a})\leqslant (\bar{a})^{n-1},$$

两边以 $\bar{a}$ 乘,得

$$a_2a_3\cdots a_{n-1}\bar{a}(a_1+a_n-\bar{a})\leqslant (\bar{a})^n,$$

由(1.2)得 $a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1a_n)\leqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}[\bar{a}(a_1+a_n-\bar{a})]$,即 $a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n\leqslant(\bar{a})^n$,

得

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n}\leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n};$$

在上式中分别将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 换成 $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}$,再颠倒即得

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

于是(1.1)式成立. 证毕

1.3 距离、绝对值、邻域

(1) 设数轴上有两点 P、Q,它们的坐标分别为 x,y,规定这两点间的**距离**是

$$PQ = \sqrt{(x-y)^2} \overset{记}{=} |x-y|, \tag{1.3}$$

这里,$|x-y|$ 称为二实数 x,y 之差的**绝对值**. 可以验证:

1° 任何 $x,y \in R$,有 $|x-y| \geqslant 0$,并且 $|x-y| = 0$ 仅当 $x = y$ 时成立;

2° 对于任何 $x,y \in R$,有 $|x-y| = |y-x|$;

3° 对任何 $x,y,z \in R$,有 $|x-y| \leqslant |x-z| + |y-z|$.

在(1.3)式中,特别取 $y = 0$,得

$$|x| = \begin{cases} x, & 当\ x > 0; \\ 0, & 当\ x = 0; \\ -x, & 当\ x < 0. \end{cases}$$

下面列举一些常用的绝对值不等式. 设 $x,y \in R$,有

1° $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

2° $|x| - |y| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$;

3° $|xy| = |x||y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$.

(2) 设 $a,\delta \in R$,且 $\delta > 0$,满足不等式

$$|x-a| < \delta \quad (或\ a-\delta < x < a+\delta)$$

的一切实数 x 所成的集

$$\{x \mid |x-a| < \delta\}$$

称为**点 a 的 δ 邻域**. 在数轴上,点 a 的 δ 邻域表示与点 a 的距离小于 δ 的点的全体.

例 4 设 $x \geqslant 0, a \geqslant 0$,试证 $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leqslant \sqrt{|x-a|}$.

证 由于

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}|^2 = |\sqrt{x} - \sqrt{a}||\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leqslant |\sqrt{x} - \sqrt{a}||\sqrt{x} + \sqrt{a}|$$
$$= |(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})| = |x-a|,$$

得

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leqslant \sqrt{|x-a|}.$$

证毕

1.4 区间

设 $a,b \in R$,且 $a < b$,则数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 表示数轴上两点 a,b 间(不包括 a,b)一切点的全体,称为**开区间**,记为 (a,b),即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

点 a 的 δ 邻域是一个以点 a 为中心的开区间,即

$$\{x \mid |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta).$$

又记号

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为**闭区间**.

类似地,还有所谓**半开区间**与**无穷区间**:

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}; \quad (a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\};$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}; \quad (-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\};$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = R.$$

其中符号“$-\infty$”读做“**负无穷**”;“$+\infty$”读做“**正无穷**”,它们只是一个符号而不是数. 又“∞”读做“无穷”.

例 5 试证 开区间 (a,b) 中没有最大数也没有最小数.

证 反证法 设开区间(a,b)中有最大数M，因开区间不含端点，所以$M \neq b$，必有$a < M < b$，且$\frac{M+b}{2} \in (a,b)$及$a < M < \frac{M+b}{2} < b$，这与$M$是$(a,b)$中最大数的假设矛盾. 同理可证开区间$(a,b)$中没有最小数. 证毕

1.5 有界数集、上确界与下确界

一、有界数集

设数集A是R的一个非空子集.

1° 若存在实数M，使对任意的$x \in A$，都有$x \leqslant M$，则称**数集A是有上界的**，并说M**是集A的一个上界**；

2° 若存在实数m，使对任意的$x \in A$，都有$x \geqslant m$，则称**数集A是有下界的**，并说m**是集A的一个下界**；

3° 若存在实数m与M，使对任意的$x \in A$，都有$m \leqslant x \leqslant M$，则称**数集$A$是有界集**；

4° 若对任意给定的正数G，总可找到$x_0 \in A$，使得$|x_0| > G$，则称**数集A是无界的**.

例 6 试证 任一非空有限数集

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$$

是有界的，其中下标k是任一给定的自然数.

证 记k个实数$a_1, a_2, \cdots, a_k$中最小数为m，最大数为M，于是

$$m \leqslant a_i \leqslant M \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

由有界数集的定义即知A是有界的. 证毕

我们注意到，在有界数集A中，若M是它的上界，那么任何比M大的数也是A的上界，可见，上界有无穷多个. 由例6知，在有限数集A中的最大数M便是A的最小上界；同理，最小数m便是A的最大下界，并且，$m, M \in A$. 值得注意的是，在有界的无限数集中，最小的上界与最大的下界即算存在，也不一定属于该集. 例如，有界无限集$A = \{x | 0 < x < 1\}$的"最小的上界"$M = 1$，"最大的下界"$m = 0$都不是集A中的元素. 但这里最小的上界与最大的下界的含意是什么，需要引入上确界与下确界的定义.

二、上确界与下确界

(1) 设数集A是R的一个非空、有上界的子集，若数β具有性质：

1° 对任意$x \in A$，有$x \leqslant \beta$；

2° 任给$\varepsilon > 0$(不管它多么小)，至少可找到一个$x_0 \in A$，使得$x_0 > \beta - \varepsilon$. 则称**数$\beta$是集$A$的上确界**，记为

$$\beta = \sup A \overset{\text{或}}{=} \sup_{x \in A} \{x\},$$

其中 sup 是 supremum 的缩写.

(2) 设数集A是R的一个非空、有下界的子集，若数α具有性质：

1° 对任意$x \in A$，有$x \geqslant \alpha$；

2° 任给$\varepsilon > 0$(不管它多么小)，至少可找到一个$x_0 \in A$，使得$x_0 < \alpha + \varepsilon$，则称**数$\alpha$是数集$A$的下确界**，记为

$$\alpha = \inf A \overset{\text{或}}{=} \inf_{x \in A} \{x\},$$

其中 inf 是 infimun 的缩写.

上确界与下确界统称**确界**. 例如，$A = \{x | 0 < x < 1\}$，于是$\sup A = 1, \inf A = 0$.