高等学校教材

微分方程数值解法

（第三版）

李荣华 冯果忱 编 李荣华 修订

高等教育出版社

微分方程数值解法

（第三版）

李荣华　冯果忱　编
李荣华　修订

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

微分方程数值解法/李荣华,冯果忱编.—3版(修订本).—北京:高等教育出版社,1997.3
高等学校教材
ISBN 7-04-005806-5

Ⅰ.微… Ⅱ.①李… ②冯… Ⅲ.微分方程-数值计算计算方法-高等学校-教材 Ⅳ.0241.8

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第09310号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号
邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588
新华书店总店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.375 字数 290 000
1980年3月第1版
1996年12月第3版 1996年12月第1次印刷
印数 0 001-2 190

定价 10.50 元

内 容 提 要

本书是李荣华先生、冯果忱先生编写的《微分方程数值解法》的第三版. 李荣华先生根据多年的教学实践和国家教委颁布的计算数学及其应用软件专业的基本要求，对原书进行了修订. 本书保持了原书的基本框架，但在内容和结构方面有了不少变化. 第一章是常微分方程初值问题的数值解法；第二、三章是 Galerkin 有限元法；第四、五、六章是有限差方法，；第七章是离散化方程的解法.

关于第三版修订的说明

促使笔者修订本书的原因有二，一是经过多年教学实践，感到原书某些部分仍不便于教学，有的内容需要更新；二是国家教育委员会近年颁布了高校理科专业基本培养规格和教学基本要求的文件，为使本书更符合计算数学及其应用软件专业对微分方程数值解的要求，也有必要进行修订。本书修订后，虽然仍保持原书的基本框架，但在内容和结构方面有了不少变化。第一，常微分方程数值解法（第一章）一章基本上是重写的，更有自身的独立性，可供本专业侧重计算机应用方向的学生选作教材。第二，离散化方程的解法（原书第五章）一章也是重写的，我们删去了与《数值代数》相重的内容，把重点放在近年来数值分析中很活跃的两类新方法：预处理法和多重网格法，并改列为第七章。第三，将 Galerkin 有限元法集中放在第二章（边值问题的变分形式）和第三章（椭圆和抛物型方程的有限元法），而将有限差分法安排在第四、五、六章，分别讨论椭圆型方程、抛物型方程和双曲型方程的差分解法。第四，改正了原书中的错误（包括写作和印刷错误），对抛物型方程的有限元法（第三章§9）和判别稳定性的代数准则（第五章§3）作了改写或充实。

本书按其内容可分为四部分，即（Ⅰ）常微分方程初值问题的数值解法（第一章）；（Ⅱ）Galerkin 有限元法（第二、三章）；（Ⅲ）有限差分法（第四、五、六章）；（Ⅳ）离散化方程的解法（第七章）。教师可根据专业方向要求和课时的多少按以下几种方案组织教学：(A)第一章至第七章；(B)第二章至第七章；(C)第一章；(D)第二章至第六章。最后，感谢北京大学应隆安教授审阅本书第三版原稿，并提出一些有益意见。

李荣华

1995 年 5 月

第二版前言

在第一版的基础上，精减了约四分之一的内容，纠正了第一版出现的许多错误，并就某些章节(特别是第一、五、六、七章)在内容和文字上作了较大改动，使之更便于教学。考虑到有些非计算数学专业的工科研究生使用本教材，同时也为了使本书更完整，我们仍然保留了与数值代数有部分重复的第五章，使用时各校可根据情况适当删减。这样，按照我们的经验，用一个学期(约 72 学时)即可讲完全部内容。第二、三、四、六、七章由李荣华修改，第一、五章由冯果忱修改。最后，让我们对许多老师、同学表示感谢，他们将本书第一版中出现的错误和修改意见及时告诉了我们。

本书第二版由北京大学应隆安先生审阅，在此表示衷心感谢。

编　者

1987 年 11 月

第一版前言

在1977年10月上海理科数学教材会议上，有关院校的代表商定为综合大学计算数学专业学生编写四种专业教材，这就是后来由人民教育出版社(现高等教育出版社)出版的线性代数(蒋尔雄、高坤敏、吴景琨等编)、数值逼近(李岳生、黄友谦等编)、数值代数(包括曹志浩、张玉德、李瑞遐等编的矩阵计算和方程求根及王德人编的非线性方程组解法与最优化方法)以及本书：微分方程数值解法。

本书第一章为常微分方程初值问题的数值解法，包括 Euler 法、线性多步法、预估－校正算法、Runge-Kutta 法及有关的稳定性、收敛性理论，最后介绍刚性问题的数值解法。从第二章起，我们开始讨论偏微分方程的数值解法，主要是有限差分法和有限元法。对椭圆型方程，以有限元法为主(第四章)，同时介绍有限差分法(第三章)。第二章的变分原理，是有限元法和差分法的理论基础。对抛物型方程，以有限差分法为主，同时介绍有限元法(第六章)。对双曲型方程，则仅介绍有限差分法(第七章)。我们这样处理，主要是为了避免叙述上的重复；同时也在一定程度上考虑到这两类方法当前应用的状况。无论用哪种数值方法解线性微分方程，最后都归结为线性代数方程组的求解，因此我们单用一章(第五章)讨论离散方程的解法。

大家知道，自从计算机问世以来，微分方程数值解法得到很大发展，在数值分析中占有极其重要的地位。但是作为一门基础课教材，不可能也不必要面面俱到，包罗万象。我们觉得重要的是通过一些典型、通用的数值方法，去阐明构造方法的基本思想和技巧，使学生达到举一反三的功效。其次，对数值方法中一些基本概念和基本理论(如稳定性、收敛性、误差估计等)的叙述，应尽可能

严格精确，培养学生具有一定的理论分析能力。鉴于微分方程数值解法在近二十多年来发展迅速，提出了许多新方法、新思想，因此在选材时我们也注意了推陈出新，适当反映这门学科的新成就。

按照我们的设想，本教材讲授时间大约需要 110 学时左右。但是考虑到不同学校和不同学生的实际情况，我们从整个内容中分出基本部分和选学部分（打星号的节），教师可酌情删减选学部分的一部或全部，这不会影响本课程的基本要求。第一章和后六章有相对独立性，读者可越过第一章直接阅读后六章，这不会遇到实质性困难。各章配备了少量习题，显然这是很不够的。为了使学生更好地消化课程内容，特别是培养学生的实际解题能力，我们认为还应结合本教材适当安排一些实习题目，让学生运用学到的数值方法在计算机上算出数值结果。

在编写过程中参考的主要书目都列在各章末尾。这里特别提一下的是，除所列参考书目外，我们还参考了吉林大学计算数学教研室黄明游、李岳生及编者过去所写的讲义。本书初稿写成后，由北京大学胡祖炽（主审）及复旦大学、上海科技大学的同志负责审查，对本书提出许多宝贵意见和建议，谨此向他们表示衷心感谢。

本书第二、三、四、七章由李荣华执笔，第一、五、六章由冯果忱执笔。由于我们水平所限，又缺乏教学实践经验，时间也很匆忙，一定有很多疏漏、错误的地方，敬请读者批评指正。

编　者

1979 年 12 月

责任编辑　鲍　涌
封面设计　刘晓翔
责任绘图　李　颖
版式设计　杨凤玲
责任校对　姜国平
责任印制　孔　源

目　录

第一章 常微分方程初值问题的数值解法

§1 引 论

1.1 一阶常微分方程初值问题

设 $f(t,u)$ 在区域 $G: 0\leqslant t\leqslant T, |u|<\infty$ 上连续，求 $u=u(t)$ 满足

$$(1.1)_a \qquad \frac{du}{dt}=f(t,u) \quad , \quad 0<t\leqslant T,$$

$$(1.1)_b \qquad u(0)=u_0,$$

其中 u_0 是给定的初值，这就是一阶常微分方程的初值问题. 为使问题(1.1)的解存在、唯一且连续依赖初值 u_0，即初值问题(1.1)适定，还必须对右端 $f(t,u)$ 加适当限制，通常要求 f 关于 u 满足 Lipschitz 条件：即存在常数 L，使

$$(1.2) \qquad f(t,u_1)-f(t,u_2)|\leqslant L|u_1-u_2|$$

对所有 $t\in[0,T]$ 和 $u_1,u_2\in(-\infty,\infty)$ 成立(参看[4]). 本章总假定 f 满足上述条件.

虽然初值问题(1.1)对很大一类右端函数有解，但求出所需的解绝非易事. 实际上，除了极特殊情形外，人们不可能求出它的精确解. 只能用各种近似方法得到满足一定精度的近似解. 读者在常微分方程教程中已经熟悉了级数解法和 Picard 逐步逼近法，这些

方法可以给出解的近似表达式，称为近似解析方法．另一类近似方法只给出解在一些离散点上的值，称为数值方法．由于后一类方法应用范围更广，特别适合用数字计算机计算，所以本章只讨论初值问题的数值解法．

1.2 Euler 法

最简单的数值解法是 Euler 法．将区间$[0, T]$作 N 等分，小区间的长度 $h=T/N$ 称为步长，点列 $t_j=jh\,(j=0,1,\cdots,N)$称为节点，$t_0=0$．由已知初值 $u(t_0)=u_0$，可算出 $u(t)$在 $t=t_0$ 的导数值 $u'(t_0)=f(t_0,u(t_0))=f(t_0,u_0)$．利用 Taylor 展式

$$(1.3)\quad u(t_1)=u(t_0+h)=u(t_0)+hu'(t_0)+\frac{h^2}{2}u''(t_0)+\frac{h^3}{6}u'''(\zeta)$$
$$=u_0+hf(t_0,u_0)+R_0,$$

其中 $\zeta\in(t_0,t_1)$，并略去二阶小量 R_0，得

$$u_1=u_0+hf(t_0,u_0).$$

u_1 就是 $u(t_1)$的近似值．利用 u_1 又可算出 u_2，如此下去可算出 u 在所有节点上的值，一般递推公式为

$$(1.4)\quad u_{n+1}=u_n+hf(t_n,u_n),\quad n=0,1,\cdots,N-1.$$

这就是 Euler 法．

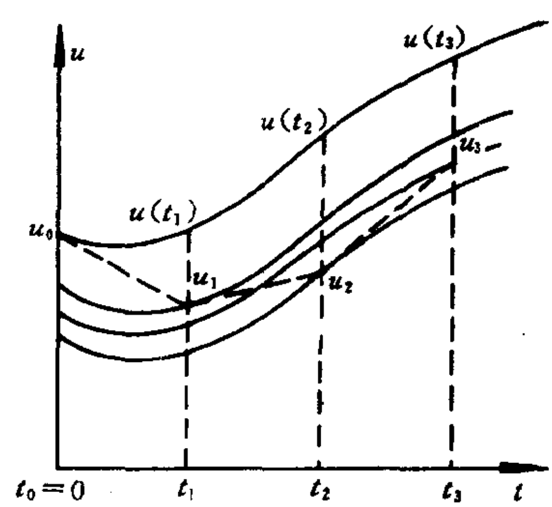

图 1

Euler 法有明显的几何意义．实际上，$(1.1)_a$的解是 t, u 平面上的积分曲线族，过任

一点恰有一积分曲线通过．按 Euler 法，过初始点(t_0, u_0)作经过此点的积分曲线的切线（斜率为 $f(t_0, u_0)$），沿切线取点(t_1, u_1)（u_1 按(1.4)计算）作为$(t_1, u(t_1))$的近似．然后过(t_1, u_1)作一经过此点的积分曲线的切线，沿切线取点(t_2, u_2)（u_2 按(1.4)计算）作为$(t_2, u(t_2))$的近似．如此下去，即得一以(t_n, u_n)为顶点的折线，这就是用 Euler 法得到的近似积分曲线（图 1 中的虚折线）．从几何上看，h 越小，此折线逼近积分曲线越好，因此也称 Euler 法为 Euler 折线法．

现在用数值积分法推导 Euler 法．将问题(1.1)写成等价的积分形式：

$$(1.5)\qquad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\,d\tau \qquad (t_0 = 0)$$

特别

$$u(t_1) = u_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, u(\tau))\,d\tau \qquad (t_0 = 0)$$

用左矩形公式近似右端积分，并用 u_1 替代 $u(t_1)$，即得 $u_1 = u_0 + hf(t_0, u_0)$，这就是 Euler 法(1.4)．我们也可用梯形公式近似上述积分，仍用 u_1 替代 $u(t_1)$，得

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{2}[f(t_0, u_0) + f(t_1, u_1)].$$

一般而言，

$$(1.6)\qquad u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n-1}, u_{n+1})],\quad n = 0, 1, \cdots, N-1,$$

称之为改进的 Euler 法．显然改进的 Euler 法比 Euler 法精度更高，但每步计算要解非线性方程(1.6)（关于 u_{n+1}），这可用如下迭代公式：