离散数学

LISAN SHUXUE

华东师范大学出版社

离 散 数 学

陶增乐　黄馥林　编

华东师范大学出版社

离 散 数 学

陶增乐 黄馥林 编

华东师范大学出版社出版
（上海中山北路 3663 号）
新华书店上海发行所发行 华东师大印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32 印张：7.75 字数：200 千字
1985 年12月第一版 1985 年12月第一次印刷
印数：1—5,400 本

统一书号：13135·019 定价：1.50 元

前　言

离散数学以离散量作为研究对象，它广泛应用于计算机科学的各个领域．鉴于它的重要作用，各高等学校计算机专业已将它作为重要基础课来设置．

本教材以作者近几年来在华东师范大学计算机科学系讲授此课程时编写的教材为基础，经过修改整理而成．在编写过程中我们力求叙述严谨，以培养学生抽象思维能力和逻辑推理能力，为学生日后进一步学习有关内容打下基础．由于离散数学涉及的面广，我们只能选择介绍其中最基本的部分．全书共分七章，约需讲授80学时．

为了提高学生的解题能力，本教材将习题分为两组，第一组为基本题，第二组为提高题，书后附有答案，对部分难题作了提示．

季雅兰同志为本教材精选了习题，作了答案与提示，还承担了全书的图表绘制工作，并编写汉英名词对照索引；陈强璋同志审校了习题并负责全书的校对，谨在此表示深切的谢意．

由于我们水平有限，错误和不妥之处，恳请读者批评指正．

陶增乐　黄馥林

1984年9月于华东师范大学

目　录

第一章 集 合 论

集合是数学中一个重要的概念．有关集合论的最早文献是康脱(G. Cantor)在十九世纪末叶发表的．很多数学家认为，所有的数学都可以用集合论的术语来描述．我们对集合论感兴趣，除去它在现代数学中的重要作用外，还因为在为计算机科学某些领域中的问题建立数学模型及进行深入探讨时，集合论是十分有用的工具．

§1 集合的概念

集合是一个原始的数学概念，关于它的严谨定义属于数学的一个分支——公理集论的研究范围．这里只给出集合的一种描述．我们把一定场合下考察、研究的全体对象视为一个整体，这个整体称为集合．这些对象称为集合的元素．例如某校学生组成的集合，平面上直角三角形组成的集合以及1、2、3、4和5五个自然数组成的集合．后一个集合可表示为$\{1, 2, 3, 4, 5\}$．我们规定集合中的元素彼此是可以区分的．集合有时简称集．

今后用大写的英文字母或带下标的大写英文字母表示集合．并且约定用N、I、Q和R分别表示自然数集、整数集、有理数集和实数集．

若A是一个集合，x是A的元素，我们称x属于A，记作$x\in A$．反之，若x不是A的元素，我们称x不属于A，记作$x\notin A$．因此，$3\in N$、$0\notin N$、$\sqrt{2}\notin Q$和$\sqrt{2}\in R$都是正确的．

有时，需要讨论以集合为元素的集合，例如，某省足球队是由省足球队员组成的集合．它是全国各省(市)足球队组成的集合的

一个元素．为了避免过多地使用集合这个词，有时用“类”或“族”来代替“集合”，这样，可以称集合的集合为集合类或集合族．

设 A 和 B 分别表示集合 $\{1\}$ 和 $\{\{1\}\}$，它们都是由单个元素组成的集合，而且 A 就是 B 的元素，也就是说，$A\in B$．但是，$1\overline{\in}B$．如果 C 表示集合 $\{A, \{A\}\}$，那么，$A\in C$ 而且 $\{A\}\in C$．

若集合 A 和 B 包含相同的元素，称它们是相等的，记作 $A=B$．例如，$\{3, 4, 5\}=\{3, 5, 4\}$．但是 $\{\{a, c\}, b\}\neq\{\{a, b\}, c\}$．

可以通过列举集合的全部元素的方法来确定某些集合，例如，$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$N=\{1, 2, 3, \cdots\}$．也可以通过指出集合中元素的某种特性（不属这个集合的元素不具有这种特性）的方法来确定集合．例如，$\{x|0<x<1\}$ 表示开区间 $(0, 1)$ 上的一切实数组成的集合，$\{a_0x^2+a_1x+a_2|a_0、a_1 和 a_2 是整数且 a_0\neq 0\}$ 表示整系数二次多项式组成的集合．一般，$\{x|p(x)\}$ 表示具有特性 p 的一切对象组成的集合．

不难验证：

$$\begin{aligned}&\{x|x^2-1=0\}=\{1, -1\},\\&\{x|x \text{ 是自然数}\}=N,\\&\{x|\sin x=0\}=\{n\pi|n\in I\}\\&\qquad\qquad=\{0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \cdots\}.\end{aligned}$$

为了方便起见，我们引进“空集”的概念，所谓空集是指不含任何元素的集合，用记号“$\varnothing$”表示．例如，方程 $x^2+1=0$ 的实数解组成的集合是空集，也就是说：

$$\{x|x \text{ 是实数且 } x^2+1=0\}=\varnothing,$$

值得注意的是，$\varnothing$ 和 $\{\varnothing\}$ 是两个不同的集合，前者不含任何元素，后者以空集 $\varnothing$ 作为它唯一的元素．所以，$\varnothing\neq\{\varnothing\}$，$\varnothing\in\{\varnothing\}$．

定义 1.1 如果在特定的条件下考察的对象均属于 E，称 E 为全称集合． □

定义 1.2 若集 A 的元素都属于集 B，称 A 是 B 的子集，或

称 B 包含 A, 记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$. 如果 A 是 B 的子集, 且 B 中至少有一个不属于 A 的元素, 称 A 是 B 的真子集或称 B 真包含 A, 记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 若 A 不是 B 的子集, 可记作 $A\nsubseteq B$. □

图 1-1 和图 1-2 是 $A\subseteq B$ 和 $A\nsubseteq B$ 的示意图. 其中, 矩形表示全称集合 E, 圆表示集合. 这种图形称为文氏图.

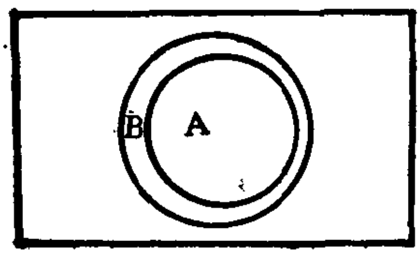

图 1-1

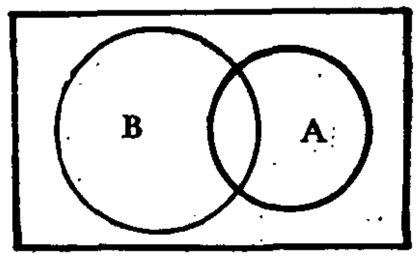

图 1-2

例 1. $I\subseteq I$, $Q\subset R$, $\{\{2\}\}\subseteq\{\{2\}, 4\}$.

定理 1.1 对任意的集合 A、B、C,

(i) $A\subseteq A$,

(ii) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$, 则 $A=B$,

(iii) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$, 则 $A\subseteq C$.

定理证明留作练习.

我们规定空集是任何一个集合的子集. 所以, 对于集合 A, 总有 $\varnothing\subseteq A\subseteq E$.

§2 集合的运算

定义 2.1 由集 A 和集 B 的全体元素组成的集合称为 A、B 的和集, 简称"和", 记作 $A\cup B$. A 与 B 的公共元素组成的集合称为 A、B 的交集, 简称"交", 记作 $A\cap B$. 也就是说,

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}. \qquad \square$$

$A\cup B$ 和 $A\cap B$ 的文氏图分别见图 1-3 和图 1-4.

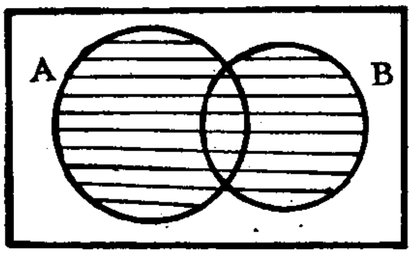

图 1-3

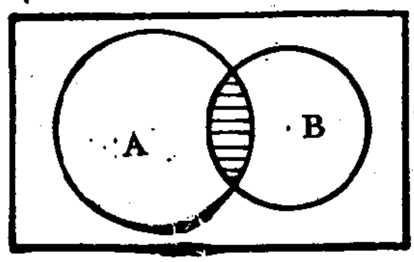

图 1-4

例 2:

$$\{1,\ 2\}\cup\{5,\ 6\}=\{1,\ 2,\ 5,\ 6\},$$
$$\{1,\ 2\}\cup\{2,\ 3\}=\{1,\ 2,\ 3\},$$
$$\{1,\ 2\}\cap\{2,\ 3\}=\{2\},$$
$$\{1,\ 2\}\cap\{5,\ 6\}=\varnothing.$$

通常,当 $A\cap B=\varnothing$ 时,称 A 和 B“不相交”.

定理 2.1 集合的和、交运算具有下列性质:

(i) $A\cup A=A$ (和的幂等律),

$A\cap A=A$ (交的幂等律);

(ii) $A\cup B=B\cup A$ (和的交换律),

$A\cap B=B\cap A$ (交的交换律);

(iii) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (和的结合律),

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (交的结合律);

(iv) $A\cup(A\cap B)=A$ (和的吸收律),

$A\cap(A\cup B)=A$ (交的吸收律);

(v) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(和关于交的分配律),

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(交关于和的分配律).

证: 幂等律和交换律不难从集的和、交运算的定义推出,下面证明和的结合律、吸收律及和关于交的分配律. 其余留作练习.

首先证明 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, 设 $x\in A\cup(B\cup C)$,由

和集的定义，$x\in A$ 或 $x\in B\cup C$，当 $x\in A$ 时 $x\in A\cup B$，所以，$x\in (A\cup B)\cup C$；当 $x\in B\cup C$ 时，$x\in B$ 或 $x\in C$，那末，$x\in A\cup B$ 或 $x\in C$，所以 $x\in (A\cup B)\cup C$. 因此，当 $x\in A\cup(B\cup C)$时，总有 $x\in (A\cup B)\cup C$，亦即

$$A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C.$$

反之，若 $x\in(A\cup B)\cup C$，那末 $x\in A\cup B$ 或 $x\in C$. 当 $x\in A\cup B$ 时，$x\in A$ 或 $x\in B$. 所以 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$，亦即 $x\in A\cup(B\cup C)$. 当 $x\in C$ 时，也有 $x\in A\cup(B\cup C)$. 亦即

$$A\cup(B\cup C)\supseteq(A\cup B)\cup C.$$

由定理 1.1 证得：

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C.$$

其次证明 $A\cup(A\cap B)=A$. 设 $x\in A\cup(A\cap B)$. 这时 $x\in A$ 或 $x\in A\cap B$，于是 $x\in A$，亦即

$$A\cup(A\cap B)\subseteq A.$$

反之，当 $x\in A$ 时，$x\in A\cup(A\cap B)$. 于是

$$A\cup(A\cap B)\supseteq A.$$

所以，$A\cup(A\cap B)=A$.

最后证明 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 若 $x\in A\cup(B\cap C)$，那末 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$，当 $x\in A$ 时，$x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，所以，$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$；当 $x\in B\cap C$ 时，$x\in B$ 且 $x\in C$，所以 $x\in A\cup B$，且 $x\in A\cup C$，亦即 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 因此，

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

反之，若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，那么，$x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$. 这时，若 $x\overline{\in}A$，则 $x\in B\cap C$，所以 $x\in A\cup(B\cap C)$. 因此，

$$A\cup(B\cap C)\supseteq(A\cup B)\cap(A\cap C),$$

从而证得 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. □

用类似的方法，可证明定理 2.2.

定理 2.2 对于任意的集合 A、B、C，当 $A\subseteq B$ 时，有

(i) $A\cup C\subseteq B\cup C$ （和的单调性），

(ii) $A\cap C\subseteq B\cap C$ （交的单调性）.

定义 2.2 由集 A 中那些不属于集 B 的元素组成的集合称为 A、B 的差集，简称"差"，记作 $A-B$. 也就是说，

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$ □

例 3:

$$\{1, 2, 3\}-\{3, 4\}=\{1, 2\},$$

$$\{1, 2, 3\}-\{4, 5\}=\{1, 2, 3\},$$

$$\{1, 2, 3\}-\{1, 2, 3, 4\}=\varnothing,$$

$$\{1, 2, 3, 4\}-\{1, 2, 3\}=\{4\}.$$

特别，若 E 为全称集合，$E-A$ 称为 A 的余集，记作 $\overline{A}$. 差集和余集的文氏图分别见图 1-5 和图 1-6.

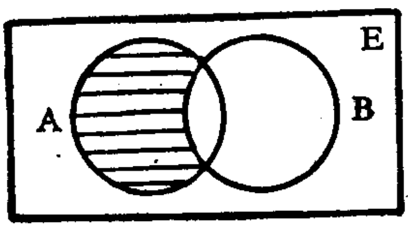

图 1-5

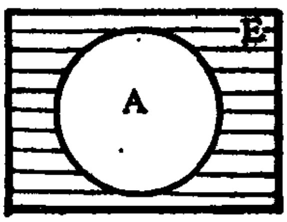

图 1-6

定理 2.3 对于任意的集合 A，有

(i) $A\cup\overline{A}=E$,

(ii) $A\cap\overline{A}=\varnothing$,

(iii) $\overline{(\overline{A})}=A$.

定理的证明留作练习.

定理 2.4 对于任意的集合 A、B，有

(i) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,

(ii) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,

证: (i) 若 $x\in\overline{A\cup B}$，那么，$x\notin A\cup B$，所以 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，亦即 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$，从而 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，因此

$$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}.$$

反之，若 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，那么 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$，亦即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$. 所

以，$x\overline{\in}A\cup B$，从而 $x\in\overline{A\cup B}$. 因此

$$\overline{A\cup B}\supseteq\overline{A}\cap\overline{B}.$$

从而证得 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

(ii) 若 $x\in\overline{A\cap B}$，则 $x\overline{\in}A\cap B$. 这时，$x\overline{\in}A$ 或 $x\overline{\in}B$，亦即 $x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{B}$. 所以，$x\in\overline{A}\cup\overline{B}$. 因此，

$$\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}.$$

反之，若 $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$，则 $x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{B}$. 这时，$x\overline{\in}A$ 或 $x\overline{\in}B$，所以 $x\overline{\in}A\cap B$，亦即 $x\in\overline{A\cap B}$. 因此，

$$\overline{A\cap B}\supseteq\overline{A}\cup\overline{B}.$$

从而证得 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. □

定理 2.4 说明和集的余集等于余集的交，交集的余集等于余集的和. 这种取余运算的性质称为 De Morgan 定律.

给定两个集合，可求出它们的和集与交集. 下面引入一族集合的和集和交集的概念. 如果集合 B 中的任一元素 β，对应于集合 A_β，那么称 B 是集合族 $\{A_\beta|\beta\in B\}$ 的下标集. 例如，对于 $n\in N$，令 A_n 是以 0 和 $1+\frac{1}{n}$ 为端点的开区间，亦即 $A_n=\left(0,\ 1+\frac{1}{n}\right)$，那么，自然数集 N 是集合族$\left\{\left(0,\ 1+\frac{1}{n}\right)\middle|n\in N\right\}$的下标集.

定义 2.3 给定集合族 $\{A_\beta|\beta\in B\}$，集合

$$\bigcup_{\beta\in B}A_\beta=\{x|\exists\beta\in B,\ 使\ x\in A_\beta\}$$

称为此集合族的和集，集合

$$\bigcap_{\beta\in B}A_\beta=\{x|\ 对任\ \beta\in B,\ x\in A_\beta\}$$

称为此集合族的交集. 也就是说，$x\in\bigcup\limits_{\beta\in B}A_\beta$ 当且仅当 x 属于集族中的某一个集合. $x\in\bigcap\limits_{\beta\in B}A_\beta$ 当且仅当 x 属于集合族中的每一个集合. □

例 4: 当 $n\in N$ 时，令 $A_n=\left(0,\ 1+\frac{1}{n}\right)$，那么

$$\bigcup_{n\in N} A_n=(0,\ 2),$$
$$\bigcap_{n\in N} A_n=(0,\ 1].$$

例 5：对任 $\beta\in B$，令 $A_\beta=\{\beta\}$，那么

$$\bigcup_{\beta\in B} A_\beta=B,$$

$$\bigcap_{\beta\in B} A_\beta=\begin{cases} B & \text{当 } B \text{ 是仅含一个元素的单元素集} \\ \varnothing & B \text{ 非单元素集.}\end{cases}$$

有时，将 $\bigcup_{n\in N} A_n$ 与 $\bigcap_{n\in N} A_n$ 分别记为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 与 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

给定全称集合 E 的一些子集，可以求出它们的和集与交集，也可求出某集的余集．设 P 是有关集合的和、交及取余的命题，将 P 中出现的 $\cup$、$\cap$、$\varnothing$、E 分别替换为 $\cap$、$\cup$、E、$\varnothing$ 得到命题 Q，Q 称为 P 的对偶命题．这时，P 与 Q 是互为对偶的命题．

例如，命题 $A\cup\overline{A}=E$ 的对偶命题是 $A\cap\overline{A}=\varnothing$．本节前述的四个定理中的公式都是成对出现的，不难发现，每对公式都是互为对偶的命题．因此，如果利用这些定理能证明命题 P 为真，那么必能证明 P 的对偶命题 Q 亦为真．

设命题 P 是

$$A\cup((A\cap B)\cap(A\cup C))=A,$$

因为

$$\begin{aligned} & A\cup((A\cap B)\cap(A\cup C)) \\ &=(A\cup(A\cap B))\cap(A\cup(A\cup C)) \quad (\text{和关于交的分配律}) \\ &=A\cap(A\cup(A\cup C)) \quad (\text{和的吸收律}) \\ &=A. \quad (\text{交的吸收律}) \end{aligned}$$

所以，命题 P 为真．同样，利用交关于和的分配律、交的吸收律及和的吸收律可以证明 P 的对偶命题 Q：

$$A\cap((A\cup B)\cup(A\cap C))=A$$

也为真．

综上所述，我们得出了集合运算的对偶原理：若关于集合运算的命题为真，那么其对偶命题亦为真．

§3 幂 集

定义 3.1 由集合 V 的一切子集组成的集合族称为 V 的幂集，记为 $P(V)$，也就是说

$$P(V)=\{A \mid A\subseteq V\}. \qquad \square$$

显然，$\varnothing\in P(V)$，而且 $V\in P(V)$.

例 6:

$$\{1\}\in P(N),$$
$$\{2,\ 4\}\in P(N),$$
$$\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\}\in P(N),$$

而且，$$\{\{1\},\ \{2,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\}\}\subset P(N).$$

例 7:

$$P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\},$$
$$P(\{a\})=\{\varnothing,\ \{a\}\},$$
$$P(\{a,\ b\})=\{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\}\}.$$

一般，若集合 V 是由 n 个元素组成，那么，幂集 $P(V)$ 由 2^n 个元素组成. 证明见定理 3.2.

引理 3.1 若 $a\overline{\in} W$, $V=\{a\}\cup W$, 那么

$$P(V)=P(W)\cup\{A\cup\{a\} \mid A\in P(W)\}.$$

证: 令

$$T=\{A\cup\{a\} \mid A\in P(W)\},$$

它是将集族 $P(W)$ 中每一个集合添加元素 a 后得到的集族. 现在只须证明 $P(V)=P(W)\cup T$. 由 $a\in V$, $W\subseteq V$，不难看出

$$P(W)\cup T\subseteq P(V).$$

反之，若 $B\in P(V)$, 那么 $a\overline{\in} B$ 或 $a\in B$. 当 $a\overline{\in} B$ 时, $B\subseteq W$, 亦即 $B\in P(W)$. 当 $a\in B$ 时，令 $A=B-\{a\}$，那么 $A\subseteq W$，且 $B=A\cup\{a\}\in T$. 所以，当 $B\in P(V)$ 时，$B\in P(W)\cup T$. 从而

$$P(W)\cup T\supseteq P(V),$$

即得 $$P(W)\cup T=P(V).$$ □

定理 3.2 若 V 是由 n 个元素组成的集合，那么 $P(V)$ 是由 2^n 个元素组成的集合.

证：对 n 用数学归纳法.

(1) $n=0$ 时结论成立.

因为 $n=0$ 表示 $V=\varnothing$，这时，$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，所以，$P(V)$ 仅含 $2^0=1$ 个元素.

(2) 若 $n=k-1$ 时结论成立，那么当 $n=k$ 时结论也成立.

设 V 是含 k 个元素的集合：
$$V=\{a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, a_k\}.$$
令
$$W=\{a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}\},$$
那么
$$V=W\cup\{a_k\}.$$
由引理 3.1，
$$P(V)=P(W)\cup\{A\cup\{a_k\}\mid A\in P(W)\}.$$
因为 W 是由 $k-1$ 个元素组成的集合，由归纳假设，$P(W)$ 是由 2^{k-1} 个元素组成的集合. 而且，集合
$$T=\{A\cup\{a\}\mid A\in P(W)\}$$
也包含 2^{k-1} 个元素. 因为 $P(W)$ 与 T 没有公共元素，所以 $P(V)$ 包含 $2\times 2^{k-1}=2^k$ 个元素.

由(1)和(2)可知，对任何自然数 n，含有 n 个元素的集合的幂集包含 2^n 个元素. □

若集合 V 包含 n 个元素，记为 $\overline{\overline{V}}=n$，定理 3.2 说明，当 $\overline{\overline{V}}=n$ 时，$\overline{\overline{P(V)}}=2^n$.

§4 n 元组和笛卡尔乘积

在笛卡尔坐标系下，(4, 2)和(2, 4)是两个不同的点，也就是说，平面上点的笛卡尔坐标是两个实数的有序组. 同样，英语单词是由若干个字母组成的有序组，pin 和 nip 表示不同的单词. 在

很多情况下，都需要把 n 个客体构成的序列作为一个整体加以考察和分析.

定义 4.1 n 个客体构成的序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为一个 n 元有序组或 n 元组，记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 其中 a_i 称为 n 元组的第 i 个坐标 $(1\leqslant i\leqslant n)$. □

定义 4.2 如果两个 n 元组对应的坐标都相同，称这两个 n 元组是相等的. 也就是说，$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 当且仅当 $a_i=b_i(1\leqslant i\leqslant n)$. □

定义 4.3 给定 n 个集合 D_1、D_2、$\cdots$、D_n，集合

$$D_1\times D_2\times\cdots\times D_n=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n)\mid 1\leqslant i\leqslant n, a_i\in D_i\}$$

称为 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 的笛卡尔乘积. 特别当 $D_1=D_2=\cdots=D_n=D$ 时，$D_1\times D_2\times\cdots\times D_n$ 记为 D^n. □

例 8：设

$$A=\{1, 2, 3\},$$
$$B=\{a, b\},$$

则

$$A\times B=\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\},$$
$$B\times A=\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

不难看出，若 $\overline{\overline{D_i}}=m_i(1\leqslant i\leqslant n)$，那么 $\overline{\overline{D_1\times D_2\times\cdots\times D_n}}=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$.

§5 一 一 对 应

集合 A 称为有限集，是指 $A=n$. 也就是说，可以用自然数 n 来标识 A 中元素的总数（n 称为 A 的计数）. 不言而喻，利用有限集 A 和 B 的计数，可以判断它们包含元素的多寡. 但是，不是任何集合都能用某个自然数来计数的. 大家知道，自然数集 N 就是“数不尽”的. 这种集合称为无限集. 因此，人们自然会问：如何判