中学数学教学参考丛书

解三角形

中学数学教学参考丛书

解　三　角　形

黄汉禹　编

上海教育出版社

内 容 提 要

解三角形是三角学的一个重要内容。

本书首先介绍了三角形的元素之间的关系，为解三角形提供理论根据；然后比较详细地讨论了三角形的解法；最后举例说明了三角学在几何学、物理学、测量、航海等方面的应用，以及有关的恒等式和不等式的证明。

中学数学教学参考丛书

解 三 角 形

黄汉禹 编

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷三厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 6　字数 132,000

1981 年 2 月第 1 版　1981 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—165,000 本

统一书号：7150·2399　　定价：0.51 元

目　　录

一、三角形的元素和各元素之间的关系

我们知道，三角形的边、角、角平分线、中线、高等等，都是它的元素．通常把三角形的边和角叫做它的基本元素，把三角形的其他元素叫做它的非基本元素．

在三角学中，为了术语的简略起见，一个元素和它的量数，通常用同一个术语来表示．例如，如果 A、B、C 是已知三角形的三个顶点，我们就用字母 A、B、C 分别表示以 A、B、C 为顶点的角，并且表示角的量数，用字母 a、b、c 分别表示角 A、B、C 的对边，并且表示边的长度．(图 1-1)

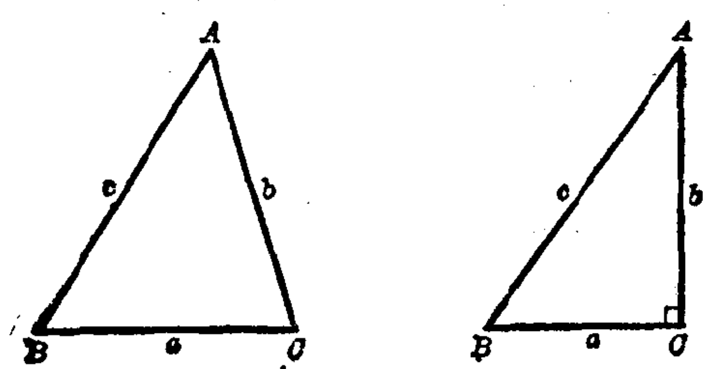


图 1-1

我们还约定，如果一个直角三角形的三个顶点分别是 A、B、C，那末 C 是直角的顶点，斜边是 c．(图 1-1)

在平面几何学中，我们已经知道，三角形的基本元素的允许值范围由下列两个条件确定：

1) $A>0$, $B>0$, $C>0$, 并且 $A+B+C=\pi$；也就是说，

三角形三个角的值都是正的，并且它们的和是 π.

2) $a>0,\ b>0,\ c>0$，并且 $a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b$；也就是说，三角形三边的长度都是正的，并且任意两边的和大于第三边.

下面我们来研究三角形的元素之间的关系.

1. 三角形的基本元素之间的关系

三角形的基本元素之间的关系最主要的有下列几种.

(1) 正弦定理

正弦定理 在一个三角形中，各边和它的对角的正弦的比相等. 用式子来表示，就是：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

证法一

分析 要证明三角形的各边和它的对角的正弦的比相等，只要证明各边和它的对角的正弦的比都等于某一个常数就可以了.

证明 先证明不论 A 是锐角，是钝角，还是直角，$\frac{a}{\sin A}$ 的值都等于 $2R$，R 是外接圆的半径.

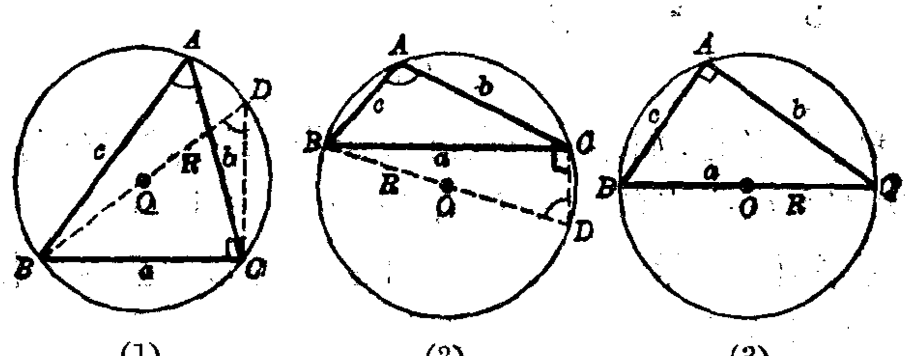


图 1-2

1) 如图 1-2(1)，在 $\triangle ABC$ 中，设 A 是锐角. 作三角形的外接圆 O, 设它的半径为 R, 并且作直径 BD. 连结 CD. 在直角三角形 BCD 中，

$$BC=BD\cdot\sin D,\ \text{就是}\ a=2R\sin D.$$

$$\because\quad \angle D=\angle A,\quad \therefore\quad a=2R\sin A.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=2R.$$

2) 如图 1-2(2)，在 $\triangle ABC$ 中，设 A 是钝角. 作三角形的外接圆 O, 设它的半径是 R, 并且作直径 BD. 连结 CD. 在直角三角形 BCD 中，

$$BC=BD\cdot\sin D,\ \text{就是}\ a=2R\sin D.$$

$$\because\quad \angle D+\angle A=180^\circ,$$

$$\therefore\quad \sin D=\sin(180^\circ-A)=\sin A.$$

$$\therefore\quad a=2R\sin A.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=2R.$$

3) 如图 1-2(3)，在 $\triangle ABC$ 中，设 A 是直角. 那末，在直角三角形 ABC 中，

$$a=2R=2R\sin 90^\circ=2R\sin A.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=2R.$$

这就是说，不论 A 是锐角，是钝角，还是直角，$\dfrac{a}{\sin A}$ 是一个定值，它等于 $2R$.

同理可得：

$$\frac{b}{\sin B}=2R;\quad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

由此可得：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

证法二

证明　如图 1-3, 不论 $\triangle ABC$ 是怎样的三角形, 我们都可以建立以 A 为原点, AC 为 x 轴的正方向的坐标系.

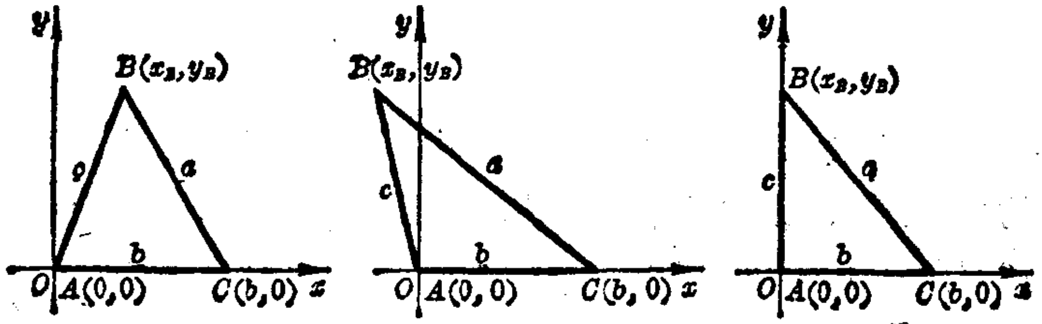


图　1-3

设 B 点的坐标是 (x_B, y_B), 那末

$$y_B=c\sin A,\text{ 或者 } y_B=a\sin C.$$

$$\therefore\quad c\sin A=a\sin C.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理可得:
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

证法三

证明　如图 1-4, 在已知 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC 和 AC 上, 分别取从 A 向 B、从 B 向 C 和从 A 向 C 为正方向, 这样, 就得到三个向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{AC}$, 而且

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

经过 C 点作直线 l 垂直于 AC, 不妨设直线 l 的向上方向为正方向.

根据关于向量的射影定理：一个向量在某一个轴上的射影，等于这个向量的模乘以这轴和这向量之间的夹角的余弦，可以得到：

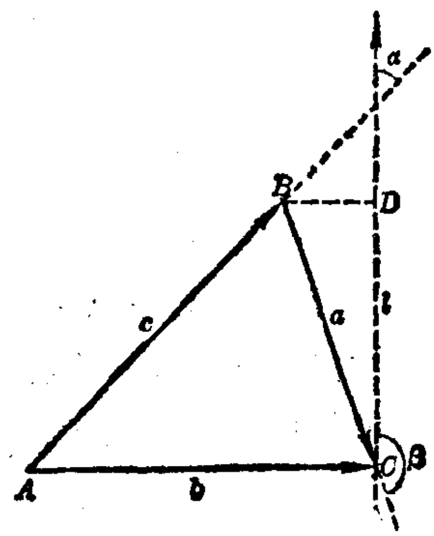


图 1-4

$\overrightarrow{AB}$ 在 l 轴上的射影

$=|AB|\cos\alpha$

$=|AB|\cos(90°-A)$

$=c\sin A$；

$\overrightarrow{BC}$ 在 l 轴上的射影

$=|BC|\cos\beta$

$=|BC|\cos(180°-\angle BCD)$

$=-|BC|\cos\angle BCD$

$=-|BC|\cos(90°-\angle ACB)=-a\sin C$；

$\overrightarrow{AC}$ 在 l 轴上的射影$=0$.

因为有限个向量的和在某一个轴上的射影，等于每个向量在这个轴上的射影的和，所以

$$c\sin A-a\sin C=0.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理可得：
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

推论 三角形的任意一边和它的对角的正弦的比，等于这个三角形的外接圆的直径.

很明显，这个推论在正弦定理的第一个证法中已得到证明.

关于正弦定理还必须注意以下两点：

1) 从正弦定理和它的推论，可以得到其他一些关系式，如：

$$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C;$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\ \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\ \frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A};$$

等等. 这些关系式，在解题过程中经常要用到.

2) 正弦定理与三角形的内角和定理之间的关系是彼此独立的. 也就是说，从前者不能推导出后者，反之亦然. 这样，两者就构成了一个独立的关系式组：

$$\begin{cases} A+B+C=\pi, \\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}. \end{cases}$$

通常把这个关系式组称为基本关系式组.

从这个关系式组可以推导出其他一些定理，所以它非常重要.

下面我们举例说明怎样应用正弦定理来证明某些恒等式.

[例 1] 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

1) $$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}};$$

2) $$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}.$$

证明 1)

$$\because\ a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,$$
$$c=2R\sin C,$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

2)

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

上面这两个式子通常叫做模尔外得(Mollweide——德国数学家)公式.

这两个公式表示三角形六个基本元素之间的关系. 在解三角形时, 往往用它来进行验算.

[例 2] 在$\triangle ABC$中, 求证:

$$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0.$$

证明 由正弦定理的推论, 得

$$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}$$

$$=\frac{(2R\sin A)^2-(2R\sin B)^2}{\cos A+\cos B}$$

$$=\frac{4R^2(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)}{\cos A+\cos B}$$

$$=\frac{4R^2\cdot 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=8R^2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}=-4R^2(\cos A-\cos B).$$

$$\therefore\quad \frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}=-4R^2(\cos A-\cos B).$$

同理可得： $$\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}=-4R^2(\cos B-\cos C);$$

$$\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=-4R^2(\cos C-\cos A).$$

$$\therefore\quad \frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0.$$

象例2这种类型的题目，要求证明三个分式的和等于零，而这三个分式的特点是，如果把每个分式的分子中的字母按a、b、c的顺序轮换，分母中的字母按A、B、C的顺序轮换，那末，第一个分式就变成第二个分式，第二个分式就变成第三个分式，第三个分式就变成第一个分式．证明时，一般应用正弦定理先把其中一个分式化成只含有角的三角函数的式子，并把它化简，这样，根据同样道理，很容易把其余两个分式也化成只含有角的三角函数的式子，由此就可以得到要求证明的结果．

(2) 余弦定理

余弦定理 三角形任一边的平方，等于其他两边平方的和，减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍. 用式子来表示，就是：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B;$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

证法一

证明 由三角形的内角和定理，得

$$A=180^\circ-(B+C).$$
$$\therefore\quad \sin A=\sin(B+C).$$

就是 $\sin A=\sin B\cos C+\cos B\sin C.$

$\therefore\quad \sin^2 A$

$=(\sin B\cos C+\cos B\sin C)^2$

$=\sin^2 B\cos^2 C+2\sin B\cos C\cos B\sin C+\cos^2 B\sin^2 C$

$=\sin^2 B(1-\sin^2 C)+2\sin B\sin C\cos B\cos C$
$\quad+(1-\sin^2 B)\sin^2 C$

$=\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C\cos B\cos C-2\sin^2 B\sin^2 C$

$=\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$

$=\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C\cos(B+C).$

$$\because\quad \cos(B+C)=-\cos A,$$

$$\therefore\quad \sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A.$$

两边都乘以 $(2R)^2$，得

$$(2R\sin A)^2=(2R\sin B)^2+(2R\sin C)^2-2(2R\sin B)(2R\sin C)\cos A.$$

由正弦定理的推论，得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

同理可得：　$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$;

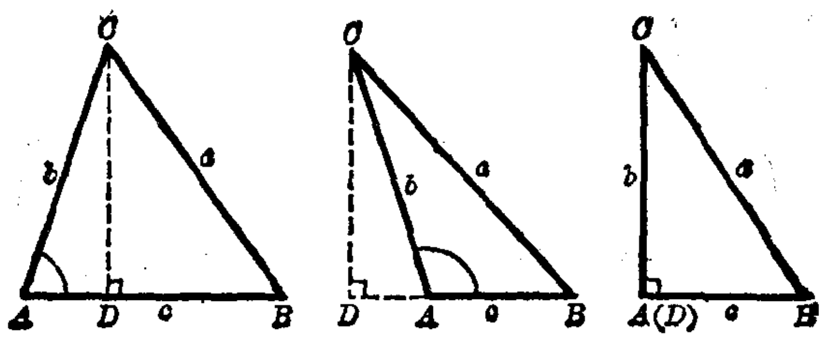
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

证法二

分析　要证明在$\triangle ABC$中，等式

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

是成立的，可以就角A可能存在的不同情形，就是当A是锐角，是钝角，或者是直角时，分别进行考察.



(1)　(2)　(3)

图 1-5

证明　1) 在$\triangle ABC$中，设A是锐角[图1-5(1)]. 作AB边上的高CD. 由平面几何学可以知道：

$$a^2=b^2+c^2-2c\cdot AD.$$

而　$AD=b\cos A.$

$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

2) 在$\triangle ABC$中，设A是钝角[图1-5(2)]. 作AB边上的高CD. 由平面几何学可以知道：

$$a^2=b^2+c^2+2c\cdot AD.$$

而　$AD=b\cos(180^\circ-\angle CAB)=-b\cos A.$

$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

3) 在$\triangle ABC$中，设A是直角[图1-5(3)]. 那末，AB边上的高就是CA. 所以，BA和BD重合. 由勾股定理，可

以知道：

$$a^2=b^2+c^2.$$

而 $$\cos A=\cos 90^\circ=0.$$

$$\therefore\quad 2bc\cos A=0.$$

$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

因此，不论 A 是锐角，是钝角，还是直角，等式

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

总是成立的.

同理可得： $$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B;$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

证法三

证明 如图1-6，不论 $\triangle ABC$ 是怎样的三角形，我们都可以建立以 A 为原点，AC 为 x 轴的正方向的坐标系．这样，A 点的坐标是 $(0,0)$，C 点的坐标是 $(b,0)$，B 点的坐标如用 C、A 两个元素来表示，就是 $(c\cos A,\ c\sin A)$.

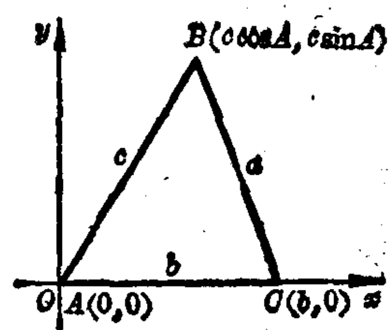


图 1-6

因为 $|BC|=a$，由两点距离公式，得

$$\begin{aligned}a^2&=(c\cos A-b)^2+(c\sin A-0)^2\\&=c^2\cos^2 A-2bc\cos A+b^2+c^2\sin^2 A\\&=b^2+c^2(\cos^2 A+\sin^2 A)-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

同理可得：

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B;$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

关于余弦定理，也还必须注意以下两点：

1) 从余弦定理，可以得到下列用三角形的边来表示它的角的余弦的公式：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

这些公式非常有用.

2) 余弦定理概括了平面几何学中的勾股定理及其推广定理.

在平面几何学中，我们知道：

在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle C$ 是直角，那末 $c^2=a^2+b^2$. 这就是勾股定理.

在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle C$ 是锐角，那末 $c^2=a^2+b^2-2bb'$；如果 $\angle C$ 是钝角，那末 $c^2=a^2+b^2+2bb'$，这里，b' 是 a 在 b 上的射影. 这就是勾股定理的推广定理.

而余弦定理把它们统一为：

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

很明显，其中 $a\cos C=b'$.

$$\begin{cases}\text{当 } C \text{ 是直角时，} b'=0;\\ \text{当 } C \text{ 是锐角时，} b'>0;\\ \text{当 } C \text{ 是钝角时，} b'<0.\end{cases}$$

[例 3] 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

证法一

证明

$$\because\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

等式两边都除以 a, 得

$$\frac{\cos A}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}.$$

同理可得:

$$\frac{\cos B}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc};$$

$$\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}.$$

$$\therefore\quad \frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

证法二

证明

$$\because\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2$

$=b^2+c^2-2bc\cos A+c^2+a^2-2ca\cos B+a^2+b^2-2ab\cos C$

$=2(a^2+b^2+c^2)-2(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C).$

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C).$

两边都除以 $2abc$, 得

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{2(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C)}{2abc}$$

$$=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}.$$

就是

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$$

上述两种证法, 都是从分析所要证明的式子的特点着手的. 证法一是要证明等式的左边等于右边. 因为右边只是边