

# 燃烧理论基础

张斌全 编著

北京航空航天大学出版社

# 燃烧理论基础

张斌全 编著

北京航空航天大学出版社

## 前 言

燃烧学是一门交界性学科，它包括气体动力学、化学动力学、传热学、物理学等多种学科内容。50年代以前，生产实际中的问题主要依靠实验来解决，而理论工作只起辅助作用。近年由于计算机的发展，计算技术已经深入到各个学科领域中去，从而带动了理论工作的突飞猛进；燃烧学也是一样，如何适应这种发展的需要，是一个迫切的问题。

目前，国内外已经出版了不少燃烧学方面的书籍，但是，许多不是过于偏重理论，就是过于忽视了理论。根据作者本人的工作经验，许多燃烧方面的工程应用问题，的确需要有关的理论去指导，因此，写一本密切联系工程应用的有关燃烧学方面的基础理论的教材或参考书，是作者的愿望。

本书的特点：

1. 仅涉及燃烧学的基本内容，并未包览学科的所有领域；
2. 叙述中力求详尽，除数学论述外，均阐述其物理意义。而数学工具亦以大学动力专业的数学水平为基准。本书既可作本科高年级或研究生的教材，亦可作厂、所工程技术人员之自学参考。
3. 在求解某些问题之数学方法中，收集了多种不同方法，可能会给读者一种庞杂的感觉，但对提高读者的解决问题的能力来说，不无补益。

作者水平有限，出现错误，在所难免，敬请指正，不胜感激。

作 者

1990.1

# 目 录

## 前 言

### 第一章 微观基础及诸守恒方程

第一节 气流的微观基础.....	(1)
一、维数.....	(2)
二、基本参数.....	(3)
三、常见的宏观参数.....	(7)
四、在混气中之推广.....	(16)
五、麦克斯韦速度分布函数.....	(20)
六、传输现象及其基本定律.....	(27)
第二节 玻耳兹曼方程及诸守恒方程.....	(36)
一、平衡态与非平衡态.....	(36)
二、玻耳兹曼方程.....	(37)
三、分子性质之变化方程.....	(39)
四、分子性质之守恒方程.....	(40)
五、一维流的守恒方程.....	(59)
练习题.....	(62)

### 第二章 化学动力学导论

第一节 化学反应速率及其机理.....	(63)
一、基本定义.....	(63)
二、基元反应的机理.....	(67)
三、反应分子数与反应级数.....	(76)
四、绝对反应速度理论.....	(81)
五、影响化学反应速率的主要因素.....	(82)
第二节 链锁反应.....	(86)

一、不分支链锁反应.....	(86)
二、分支链锁反应.....	(91)
第三节 化学反应速率在燃烧中的应用.....	(92)
一、贫油工况.....	(95)
二、富油工况.....	(97)
练习题.....	(99)
<b>第三章 着 火</b>	
第一节 热自燃理论.....	(102)
一、简化理论.....	(103)
二、稳态理论.....	(107)
三、非稳态理论.....	(109)
四、影响自燃的主要因素.....	(113)
第二节 链锁自燃.....	(118)
第三节 碳氢燃料的自燃.....	(123)
第四节 综合理论.....	(126)
第五节 强迫着火.....	(126)
<b>第四节 关于燃烧波的基本规律</b>	
第一节 前言.....	(134)
第二节 燃烧波的控制方程与分析.....	(135)
<b>第五章 预混气体层流火焰</b>	
第一节 实验基础.....	(148)
一、层流火焰的实验基础.....	(148)
二、层流火焰传播的机理.....	(150)
第二节 火焰传播的热理论.....	(151)
一、简单热理论.....	(151)
二、泽尔多维奇理论.....	(154)
三、迭代解法.....	(160)
第三节 层流火焰的扩散理论.....	(165)
第四节 近期的理论.....	(169)

一、假设条件	(169)
二、基本方程及求解	(170)
三、计算对象之化学反应动力学内容	(171)
四、求解	(171)
第五节 火焰传播极限与淬熄	(179)
一、假设条件	(179)
二、基本方程	(180)
三、求解	(182)
第六节 层流火焰的试验结果	(190)
一、介绍几种主要的试验方法	(190)
二、影响层流火焰传播速度的主要因素	(194)
<b>第六章 预混气体之紊流火焰</b>	
第一节 紊流基本参数	(201)
第二节 紊流平均运动的基本方程	(207)
一、连续方程	(207)
二、动量方程	(208)
三、组元连续方程	(213)
第三节 紊流火焰的表面理论及容积理论	(217)
一、表面理论	(217)
二、容积理论	(223)
三、影响紊流燃烧之主要因素	(224)
第四节 均匀反应器理论	(228)
一、均匀反应器理论概述	(228)
二、动力燃烧	(232)
三、扩散燃烧	(242)
四、综合燃烧	(243)
五、回流作用	(246)
六、柱塞流反应器 (P.F.R)	(248)
七、应用举例	(253)

第五节 火焰的稳定	(254)
一、一条重要的关系	(255)
二、层流火焰的稳定	(256)
三、高速气流火焰的稳定	(262)
四、火焰在燃烧室内扩展	(270)
<b>第七章 扩散火焰</b>	
第一节 射流火焰	(276)
一、前言	(276)
二、圆柱形射流	(277)
三、自由射流的燃烧	(290)
四、有限空间的射流火焰	(302)
第二节 油珠燃烧	(307)
一、无燃烧时静止气流中单珠蒸发	(308)
二、有燃烧时单珠蒸发	(322)
三、某些对流影响的修正	(331)
四、喷雾燃烧	(334)

# 第一章 微观基础及诸守恒方程

## 第一节 气流的微观基础

工程中研究气体流动，通常采用宏观的方法，即把气体看成是一种由连续介质组成的物质，其性质与行为可以用宏观的参数（气流中某点附近所有介质的平均参数）例如温度、压力、速度等来描述。这只有在气流中取很小的体积而包含的分子数目足够大的情况下才是合理的。而在某些情况下，例如宏观参数的梯度非常大，以致产生梯度的距离与分子碰撞所经过的平均距离是同一数量级时，单纯靠宏观模型就不够了。因此，对激波内部结构、稀薄气体、粘性流的剪切应力以及热流之表达式等问题的解决，必须辅以微观模型的参数。

燃烧学亦不例外。近期由于计算技术的发展，数值计算已经进入燃烧科学的范畴。尽管也可以由一般的宏观流体力学产生诸守恒方程（本章虽然从微观参数出发，最后仍然是求得守恒方程的宏观形式，以便于实际运用），但是，方程中许多物理参数（如紊流传输系数，热力系数等）在理论上的确定，却有赖于微观物理的帮助。

因此，本书从微观物理的基础出发，最后建立宏观参数的守恒方程，这样，既阐明了各主要宏观参数的微观本质，又为从理论上解决燃烧学方面的问题提供了工具。

必须指出，这里所涉及的仅仅是微观物理中极其基础的知识，目的是使读者初步了解微观知识，而欲深入研究微观物理，请阅读统计力学、量子力学与电动力学等有关专著。

微观模型认为气体是由千万个离散分子所组成，以每个分



子在整个时间内的位置与速度来描述。当然，用个别分子运动的微分方程来研究整个气流的规律是行不通的。这并不是微分方程个数太多而综合起来求解很困难，而是由于分子相互间的作用使得它们的位置与速度经常改变，而且这些改变的结果并不是唯一的，有许多可能性（或者叫作概率）存在。研究这种大量分子集体的综合性质与行为的统计规律性，是研究微观现象的特殊方法，与一般的力学理论不同。当然，在研究中，由于复杂的运动是在简单的运动的基础上产生的，所以还必须应用一般力学理论中的一些基本概念与定律。

## 一、维 数

气体是由许多不连续而细小的分子所组成，其中，分子、自由的原子、电子与离子都可以看成是分子的一种形式。描述它们最简单的方法是把它们看成一点——分子的质量中心，再来研究这些点的规律。

描述一个点，首先就是它的几何位置，或者叫几何空间的位置，以符号 $r$ 表示。对应具体的坐标系，如笛卡儿坐标为 $r(x, y, z)$ ，圆柱坐标为 $r(r, \theta, z)$ ，以及球坐标 $r(r, \theta, \omega)$ ，微元几何空间体积为 $dV_r^*$ 。

1827年英国人布朗在热溶液中观察得到“分子无时不在杂乱运动，即使处在平衡状态中亦是如此”。这个事实说明分子运动速度本身是分子固有的参数，由它的变化而带来许多气体性质的改变（如下文讨论的温度，压力等）。因此，分子运动速度应作为独立变数来处理，以符号 $v$ 表示。连系具体坐标系则有， $v(v_x, v_y, v_z)$ ， $v(v_r, v_\theta, v_z)$ ， $v(v_r, v_\theta, v_\omega)$ 。必须指出这些速度分量与几何位置的分量（如 $v_x$ 与 $x$ ）是相互独立的，换言之，除了几何空间以外，还有由速度向量所形成的速度空间，而速度空间的微元体积为 $dV_v^*$ 。

这样，上述几何空间的三维，速度空间的三维，再加上时间

的独立变数，我们描述一个分子就要用七度维数。

如果认为分子不仅仅是一个点，而是具有一定大小的刚体，那末，它的运动方式除了上述移动以外，还有转动。再进一步，如果分子不是刚体，还要增加振动及其他内部运动等，则描述它们的维数还要增加。一般说来，描述刚体需要六个几何维，其中三维为位置，三维为方向，还有六个速度维，其中三维为移动，三维为转动。再加上时间变数，其总维数是十三。但是，如果刚体是球形，那末，三个方向维就消失了，只剩下十维。再进一步简化为光滑的刚球，由于它们相互碰撞时角速度不变，又减少三个转动角速度维，这样，只剩下七维了。

所以，我们这里讨论的分子，可认为它是空间点，也可以认为是光滑刚球。

必须指出，几何变数可以用同一几何空间来描述不同类型的分子。但是，由于不同类型的分子的离散情况不同，所以一种速度空间只能相应于一类分子的单独速度域，而不同类型的分子有不同的速度维，如空气中氧分子的速度维为 $v_{O_2}$ ，氮分子的速度维为 $v_{N_2}$ ，两者相互独立。

## 二、基本参数

微观模型有一些基本物理量，对一定的气流分子来讲，它们都是已知值。

我们这里只讨论包含一种化学成份（或叫组元）的气体，也就是说它的全部分子都具有相同的结构，这样的气体叫简单气体。

### 1. 分子密度及分子数目

分子不停地运动，使得在某一定体积中分子的数目随着时间及地点的变化而有增减。我们定义：“在 $\tau$ 时间平均的单位体积内所包含的分子数目为分子密度”，以 $n$ 表示。显然，它是几何位置 $r$ 与时间的函数，即

$$n = f(r, t)$$

可用  $n$  来表示分子间（理想气体时分子体积忽略不计）平均间距  $\delta$  为

$$\delta = n^{-\frac{1}{3}} \quad (1-1)$$

在微元体积  $dV_r$  中分子的总数为

$$dN = n dV_r \quad (1-2)$$

## 2. 分子质量

每克摩尔气体中包含的分子数叫作亚佛加得罗数，以  $A$  表示，其值为  $6.0225 \times 10^{23}$ 。因此，任何气体在标准状态下之分子密度为

$$n_{00} = \frac{A}{22.41 \times 10^{-3}} = 2.68699 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

称为标准分子密度。

每摩尔气体的质量称为分子量，以  $M$  表示。因而每个分子的质量为

$$m = \frac{M}{A} \quad (1-3)$$

气体的质量密度为

$$\rho = nm \quad (1-4)$$

## 3. 分子的大小

前已指出，分子可视为刚球，其大小以直径  $d$  表示。在

$$\delta \gg d$$

的情况下，几何空间中每一个分子在其他分子的影响范围以外自由地运动，这种气体称为稀释气体。这里讨论就是这种气体（在分子间作用力以及  $d$  均忽略不计时为理想气体）。

## 4. 分子速度

以平移运动为例，有下列四各速度：

### (1) 真实速度

这是每个分子的速度。它是对某固定参考系而言，以符号  $v$

表示。同类组元的气体，不同分子的真实速度亦不尽同。注脚“ $i$ ”表示  $i$  类组元，如  $v_i$ 。

真实速度是独立变数，与几何位置以及时间均无关。它的分量依具体坐标而不同，如  $v_x, v_y, v_z$  或  $v_r, v_\theta, v_\phi$  等。

### (2) 平均分子速度

在间刻  $t$ ，将微元体积  $dV_r^*$  中所有分子之真实速度平均起来，叫作平均分子速度，以  $v_0$  表示，即

$$\bar{v} = v_0 = \frac{\sum v}{dN} = \frac{\sum v}{ndV_r^*} \quad (1-5)$$

显然，平均分子速度不再是独立变量，而是几何位置与时间的函数：

$$v_0 = f(r, t)$$

由于平均分子速度是微元体积中全部分子相应的平均参数，所以，它已经进入宏观参数的范畴，宏观上表现为气流速度或质量流速。

它亦有分量，如  $v_{0x}, v_{0y}$  等。

### (3) 分子相对速度

分子相对于另一运动分子的速度，叫做相对速度，以  $V'$  表示。如另一运动分子速度为  $v'$ ，则

$$V' = v - v' \quad (1-6)$$

### (4) 分子特有速度

如果  $v_0 = v'$ ，此时分子的相对速度就叫作特有速度，以符号  $V$  表示，即

$$V = v - v_0 \quad (1-7)$$

当然，相对速度与特有速度都具有分量，如  $V_x', V_r', V_x, V_r$  等。

必须指出，特有速度是对单个分子而言的，故又叫随机速度 (random velocity)。下面将指出它与热量有关，故亦叫热速度。

特有速度代表分子除宏观速度以外的分子运动速度，我们把它定义为分子的扩散速度。若将全部分子的特有速度平均起来，即得

$$\bar{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0} = \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0 = 0 \quad (1-8)$$

这个结果说明在整个体积内，单个分子的扩散相互填补，总的来说，保持不变，如同没有扩散一样。

### 5. 分子速度分布

前已指出，每一类分子都有单独的速度域，我们可以像用几何空间来描述分子的位置那样来建立速度空间，每一分子都在此速度空间占一点的位置。如果也采用笛卡儿坐标，则此点位置可以用它具有的速度空间  $dV_v^*$  来定位，如图1-1所示。

由于气流（即使是微元体积）中分子数目很大，速度有大有小，而且随时变动，严格说来，不能说具有某一速度的有多少个分子。因为，分子速度正好等于  $v$  值（不多也不少）是没有意义的，而只能说速度在  $v$  与  $v + dv$  之间有多少个分子，这实质上包含统计平均的意思。因此，我们用下式定义速度分布函数  $f(v)$ ，其式为

$$dn = f(v)dv_x dv_y dv_z$$

$$= f(v)dV_v^* \quad (1-9)$$

若将此式与前述分子密度比较，容易看出速度分布函数就相应于速度空间的分子密度。图1-1所示为笛卡儿坐标的速度空间微元体积  $dv_x dv_y dv_z$ ，它与几何空间微元体积  $dx dy dz$  相当。速度向量落在微元速度空间中点的数目就是  $f(v)$ ，则相应有

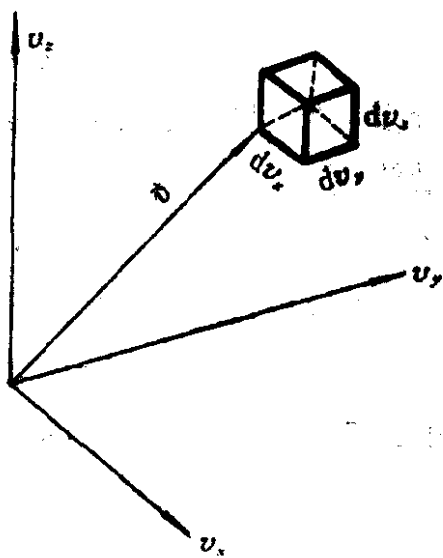


图 1-1

① 有的书中定义速度分布函数为

$$dn = n f(v) dV_v^*$$

则由它派生的许多结果亦不同，请读者注意。

$$n = \int f(\mathbf{v}) dV_{v,*} \quad (1-10)$$

$$dN = n dV_{r,*} = \left( \int f(\mathbf{v}) dV_{v,*} \right) dV_{r,*} \quad (1-11)$$

$$N = \iint f(\mathbf{v}) dV_{v,*} dV_{r,*} \quad (1-12)$$

因为坐标改变不能影响分子总数目，所以将分子速度由  $\mathbf{v}$  变成  $\mathbf{v}'$  时，相应的速度空间微元体积即由  $V_{v,*}$  改成  $V_{v',*}$ ，那末，相应地

$$n = \int f(\mathbf{v}') dV_{v',*} \quad (1-13)$$

$$dN = n dV_{r,*} = \int f(\mathbf{v}') dV_{v',*} dV_{r,*} \quad (1-14)$$

$$N = \iint f(\mathbf{v}') dV_{v',*} dV_{r,*} \quad (1-15)$$

则  $f(\mathbf{v}) dV_{v,*} = f(\mathbf{v}') dV_{v',*} \quad (1-16)$

还必须指出，速度分布函数  $f(\mathbf{v})$  也是速度、位置与时间七度维数的函数。

### 三、常见的宏观参数

我们建立上述微观模型的基本参数与常用的宏观参数的关系。

#### 1. 分子性质的流动——流通量的向量

如图1-2所示，在流场中取微元切面  $dS$ ，其法线方向单位向

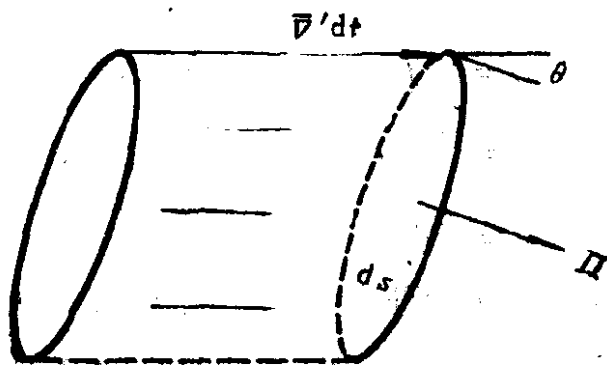


图 1-2

量为  $\Pi$ ，设此切面以速度  $\mathbf{v}'$  进行运动，则流场中诸分子相对此切面之运动速度为  $\mathbf{V}'$ 。

取时间间隔  $dt$  非常小，以致分子在通过切面  $dS$  以前来不及遇到其他分子，则在  $dt$  内通过切面  $dS$  的所有分子应该包含在以  $dS$  为底，以分子在  $dS$  法线方向分速于  $dt$  内经过的距离为高所形成的圆柱体积内，此体积为

$$dV^* = \mathbf{V}' \cos\theta dt dS \quad (1-17)$$

则

$$dN = \int f(\mathbf{v}) dV^* dV^* = \int f(\mathbf{v}) dV^* \mathbf{V}' \cos\theta dt dS \quad (1-18)$$

分子具有各种性质，代表这些性质的物理量为动量、质量、能量等。在分子运动中，随着分子运动而产生这些物理量的传输就带来气流宏观参数的变化。以符号  $\phi$  表示这些物理量。因为它们代表分子速度在某些方面的性质，所以  $\phi$  也是分子速度的函数，即是  $\phi(\mathbf{v})$ ， $\phi(\mathbf{V})$  等。

分子在时间  $dt$  内通过  $dS$  切面而带来的物理量传输应为

$$\int (\phi f(\mathbf{v}) dV^*) \mathbf{V}' \cos\theta dt dS \quad (1-19)$$

而单位时间、单位切面所通过的物理量传输为

$$\Phi = \int (\phi f(\mathbf{v}) dV^*) \mathbf{V}' \cos\theta \quad (1-20)$$

若以向量的标量积表示，即

$$\Pi \cdot \mathbf{V}' = \mathbf{V}' \cos\theta \quad (1-21)$$

则

$$\begin{aligned} \Phi &= \int (\Pi \cdot \mathbf{V}') \phi f(\mathbf{v}) dV^* \\ &= \overline{(\Pi \cdot \mathbf{V}') \phi} \int f(\mathbf{v}) dV^* \\ &= \overline{(\Pi \cdot \mathbf{V}') \phi} n \end{aligned} \quad (1-22)$$

现进一步讨论其物理意义，按式(1-6)，(1-7)，有

$$n \mathbf{V}' \phi = n (\mathbf{V} + \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}') \phi = n \mathbf{V} \phi + n (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}') \phi \quad (1-23)$$

$$\text{式中} \quad \mathbf{V}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}' \quad (1-24)$$

式(1-23)右边第二项中 $n(\mathbf{v}_0 - \bar{\mathbf{v}}')$ 是分子以平均速度运动时通过单位切面 $dS$  (它以 $\mathbf{v}'$ 进行运动)的分子数目(或者叫分子流)。整个第二项则为分子以平均速度通过 $dS$ 切面所带走的物理量。式中右边第一项则与分子流无关,因为它是在 $dS$ 切面以平均速度 $\mathbf{v}_0$ 运动时,分子运动通过此切面所带走的物理量传输。换言之,此时分子运动已经排除了集体行动的平均速度,而以个别行动的特有速度在运动,所以就是没有集体的分子流的情况下物理量传输。它也是向量。我们称它为物理量流通的向量。其沿某切面之法线的分量代表通过此切面之物理量流通的向量,如式(1-22)所示。

如果此物理量为分子质量,有

$$\phi = m$$

则单位时间通过单位切面之分子质量传输,按式(1-22)为

$$\Phi = n \overline{\phi (\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{V}')} = nm \overline{(\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{V}')} = \rho \overline{(\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{V}')} \quad (1-25)$$

此式中 $\overline{(\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{V}')}$ 为分子相对于单位切面之法线分速之平均值,因而此式右边代表全部分子单位时间内通过单位切面时产生的分子质量变化。这就是气体力学中常见的通过单位切面的流量公式的微观参数的形式。

## 2. 压力与压力张量

分子在运动中碰到固体壁时,与壁面撞击并弹回。在撞击前后,由于速度及方向的改变而产生动量变化,遂产生一个冲量。由于分子数目极多,使这种撞击的分布非常均匀,而形成对壁面一种连续的力。作用在壁上单位面积上的这种力,我们定义为表面压力,其大小与方向决定于分子与壁面碰撞时传递给壁面的动量大小与方向。按作用与反作用的定律,壁面亦给气体一个大小相等方向相反的压力。

压力是一种有方向的量,它不一定垂直于所考虑的表面,以



符号  $\mathbf{P}_n$  表示之。

按式 (1-22)，以  $\phi = mv$  代入，则有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n &= \overline{(\Pi \cdot \mathbf{V}') m \mathbf{v}} n = \overline{(\Pi \cdot \mathbf{V}')} \mathbf{v} n m \\ &= \rho \overline{(\Pi \cdot \mathbf{V}')} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1-26)$$

分子撞在壁面并不停留（只有发生相变情况下，如凝聚，蒸发等，才有分子在壁面停留或突变），而立即弹回。

碰到壁面的分子数，按式 (1-22) 取  $\phi = 1$ ，其式为

$$N_+ = \int_+ (\Pi \cdot \mathbf{V}') f(\mathbf{v}) dV_{\mathbf{v}}^* \quad (1-27)$$

从壁面弹回的分子数为

$$N_- = \int_- (\Pi \cdot \mathbf{V}') f(\mathbf{v}) dV_{\mathbf{v}}^* \quad (1-28)$$

由于撞击前后，分子总数不变，则分子数目之变化为

$$\begin{aligned} \int_{\text{TOT}} (\Pi \cdot \mathbf{V}') f(\mathbf{v}) dV_{\mathbf{v}}^* &= \int_+ (\Pi \cdot \mathbf{V}') f(\mathbf{v}) dV_{\mathbf{v}}^* \\ &\quad - \int_- (\Pi \cdot \mathbf{V}') f(\mathbf{v}) dV_{\mathbf{v}}^* = 0 \end{aligned} \quad (1-29)$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad \int (\Pi \cdot \mathbf{V}') f(\mathbf{v}) dV_{\mathbf{v}}^* &= \overline{(\Pi \cdot \mathbf{V}')} \int f(\mathbf{v}) dV_{\mathbf{v}}^* \\ &= \overline{(\Pi \cdot \mathbf{V}')} n = 0 \end{aligned} \quad (1-30)$$

而分子密度  $n$  不可能为零，故

$$\overline{\Pi \cdot \mathbf{V}'} = 0 \quad (1-31)$$

此式说明全部分子相对壁面（以  $\mathbf{v}'$  运动）而运动之平均法线分速为零。换言之，即没有通过壁面的分子流，而只有平行于壁面的平均速度分量。

而在式 (1-26) 中

$$\begin{aligned} \overline{(\Pi \cdot \mathbf{V}') \mathbf{v}} &= \overline{(\Pi \cdot \mathbf{V}') (\mathbf{v}_0 + \mathbf{V})} = \mathbf{v}_0 \overline{(\Pi \cdot \mathbf{V}')} + \overline{\mathbf{V} (\Pi \cdot \mathbf{V}')} \\ &= \overline{\mathbf{V} (\Pi \cdot \mathbf{V}')} = \overline{\mathbf{V} (\Pi \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}'))} \\ &= \overline{\mathbf{V} [\Pi \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}')] } = \overline{\mathbf{V} (\Pi \cdot \mathbf{V})} \\ &\quad + \overline{\mathbf{V} [\Pi \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}')] } = \overline{\mathbf{V} (\Pi \cdot \mathbf{V})} \end{aligned} \quad (1-32)$$