SHENGWUXUE ZHONG CHANGYONG SHUXUE FANGFA

生物学中常用数学方法

李淑霞 编

青岛海洋大学出版社

生物学中常用数学方法

李淑霞　编

青岛海洋大学出版社

内 容 提 要

序

现代生物学的发展愈来愈多地要求用数学方法进行定量研究，建立数学模型，以揭示生命现象的本质；但目前我国高等院校生物系使用的数学教材，基本上限于一般微积分及普通生物统计，远远赶不上近年来生物科学的飞速发展。不少生物系教师、研究生甚至一些生物科研人员在查阅文献资料、写作论文过程中遇到的困难往往是数学问题。因此，更新高校生物数学教材，出版一部新的、综合性的生物数学，是当前的迫切需要。

生物数学是应用数学中新兴起的一个数学分支。生物学是研究自然界中生命活动的学科，数学则是研究自然界中数量关系和空间形式的学科，过去这两门学科联系甚少，但近年来随着生物学实验中大量先进仪器及记录设备的使用，逐渐积累了大量数据，迫切需要用各种数学工具开拓生物学的研究，特别是电子计算机的飞速发展和大规模的推广应用，为生物学和数学的相互渗透提供了良好的条件。现代生物学的发展要求愈来愈多的生物学家了解和掌握一些基本的数学概念和方法。

本书作者在数学方面知识面较广，又有多年从事生物系“生物数学”教学的丰富经验，她在写这本“生物学中常用数学方法”时，写作方法上，力求通俗易懂、深入浅出，通过大量生物学实例来说明许多重要的数学概念，力求避免枯燥的数学推导，这是十分难能可贵的。相信随着本书的出版，必将对高等院校生物系的数学教学与科学研究起到强而有力的推动作用。

自然科学的财富不再是知识的堆积，而是知识的连锁。

吴宝铃

一九九〇年十二月八日于青岛

前　言

生物学离不开数学，数学在生物学中大有用武之地，这是本人长期从事生物数学教学与科研工作的一个体会。本书就是在为生物专业本科生和研究生讲授生物数学课讲稿的基础上，几经修改和补充，特别是吸收了国内外有关教材、论文中有参考价值的内容及有趣味、有启发性的例题和习题而逐步形成的。编写本书的指导思想是为改革和更新生物及相近专业数学课的内容以适应现代科学技术发展的需要。与国内已有的类似教材相比，本教材具有以下鲜明的特点：

一、内容广泛、新颖。本教材的全部内容基本概括了现代生物学中常用的数学理论和方法。第一章介绍的集合和映射概念，体现了本书观点新、起点高的特点。关于概率论的两章主要作为学生进一步学习数理统计、计量生物学等知识的一个十分有用的基础。线性代数、线性规划、马氏链、对策论以及微分方程和差分方程等，再加上生物统计是现代生物科学中最基本最有用的数学工具。本教材不包含生物统计的内容，因为生物统计是生物学专业中一个基本的部分，另当独立开设一门课程。

二、适用和应用性强。使用本教材的读者只须具备一般微分学的基础知识，因此可作为生物以及相近专业，如水产、环境、林业、农业、医学等本科生或研究生的生物数学教材。书中例题和习题类型较多、数量较大，尽量考虑上述专业的需要。由于差分方程对描述生物种群的增长动态更具有实用价值，所以除了介绍微分方程外，还着重介绍了差分方程的基本理论和方法。最后一章综合介绍了几种生物数学模型，启发学生如何建立数学模型以及如何运用数学模型解释和揭露生物现象的内在规律性。同时在这一章里还详细介绍了种群空间格局数学模型，具有实用价

值。

三、在处理数学理论推导方面，注意深入浅出，难易程度适中。冗长的数学推导往往使学生望而生畏，而纯粹介绍方法，不做任何数学推导和论证，又不能训练学生的逻辑思维能力。本书在这方面处理的比较恰当。另外，文字叙述比较通俗易懂，便于自学，使那些不曾学过高等数学课的学生，通过自学也会有所收益。

最后，我十分感谢我的学生，在我讲授这门课程时曾给予了很好的配合和有益的帮助，特别是段昊、王海、潘永强、盛平等在整理初稿、校对书稿过程中给我很多帮助，特此致谢。由于本人学识浅薄，水平有限，书中缺点与错误在所难免，恳切希望读者批评指正。

李淑霞

一九九〇年十月

目　录

第一章　预备知识

§1.1　集合的概念

集合既是一个普通的概念，又是现代数学和科技的基本概念和工具之一。本章将介绍集合的初步知识。

1. **集合的概念与记号**

什么是集合呢？用集合论的创始者康托的话，就是“把一定的并且彼此可以明确区别的事物（这种事物可以是直观的对象，也可以是思维的对象）放在一起，称为集合”。简单地说，集合（或简称为集）就是可以互相区别的事物的汇集。构成集合的事物称为集合的元素。

例 1.1.1　一本书中所有的页构成一个集合，每一页都是该集合的元素。

所有自然数构成一个集合，每一个自然数都是该集合的元素。

某医院中所有病人构成一个集合，每一个病人都是该集合的元素。

1970 至 1990 年间灭亡的生物种构成一个集合，此期间灭亡的每一个种都是该集合的元素。

单位圆上所有的点构成一个集合，其中每一个点都是该集合的元素。

在集合论中，一般用小写英文字母 a,b,c,…… 表示元素，而用大写英文字母 A,B,C…… 表示集合。当 a 是集合 A 的一个元素时，我们称 a 属于 A，记为 $a\in A$。否则称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$。任何一个具体元素 a 对一个具体的集合 A 而言，“属于”或“不属于”二者必居其一。任何一个集合的自身不能作为它的

元素，即 $A \overline{\in} A$。

当集合 A 由元素 a,b,c……构成时，可记为

$$A=\{a,b,c,\cdots\cdots\}$$

例如全体自然数的集合 N 记为

$$N=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$$

(0,1)区间内一切实数构成的集合记为

$$S=\{x:0<x<1\}$$

单位圆上所有点构成的集合记为

$$S=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$$

表示该集合是由所有坐标满足 $x^2+y^2=1$ 的平面上点 (x,y)构成的。

2.二集合的相互关系·子集

定义 1.1.1 如果集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全一样，称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

例 1.1.2. $S_1=\{x:0<x<4$ 且 x 为整数$\}$

$$S_2=\{x:x^3-6x^2+11x-6=0\}$$

S_1 和 S_2 中的元素都是 1,2,3,因此 $S_1=S_2$。

定义 1.1.2 含有有限个元素的集合称为有限集合，由无穷多个元素构成的集合称为无限集合。

例 1.1.3 $A=\{x:0<x<10\}$,$B=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$等都是无限集合，而上述 S_1 和 S_2 都是有限集合。

定义 1.1.3 不含任何元素的集合称为空集或零集，记为 $\varnothing$。

例 1.1.4 方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合就是一个空集。又如:$S=\{x:x$ 是能被 2 除尽的奇数$\}$、$A=\{p:p$ 是 1969 年以前在月球上走过的人$\}$等都是空集。

定义 1.1.4 在所研究的问题中，包含所有元素的集合，称为全集，记为 $\cup$。

例 1.1.5 一个准备参加考试的学生，他感兴趣的是考试中

所有可能出现的考题构成的集合，这就是该问题中的一个全集。当然，这是一个非常大的集合。对学生来说，他更重视的是在这个集合中很可能遇到的那些考试题目构成的比较小的集合。

再如：研究在一个国家中发生流行病的问题，这个国家中全部人口构成全集。而实际上须要研究的仅仅是从全部人口中挑选出来的一部份人构成的小得多的集合。

这些例子和研究思想导致了子集合的概念。

定义 1.1.5 由一个集合中部份元素构成的集合，称为该集合的子集合。

例 1.1.6 B 为 A 的子集合，意指若 $x \in B \Rightarrow$（$\Rightarrow$ 表示能够推出）$x \in A$，但反之不然，记为 $B \subset A$。若 B 不是 A 的子集合，记为 $B \not\subset A$。

若 $B \subset A$ 且 $A \subset B$ 则 $A = B$。

若 $B \subset A$ 而 $A \not\subset B$，称 B 为 A 的真子集。

例 1.1.7 $A = \{x: x$ 是人$\}$，$B = \{x: x$ 是女人$\}$ 则 B 为 A 的真子集。

又如：$A = \{x: x$ 是动物$\}$，

$A_1 = \{x: x$ 是昆虫$\}$，

$A_2 = \{x: x$ 是哺乳动物$\}$

则 A_1, A_2 皆为 A 的真子集。

只有一个元素的集合，称为单元素集，可用 $\{a\}$ 表示。应该注意，a 与 $\{a\}$ 是完全不同的。$a \in A$ 表示 a 为集合 A 的一个元素，而 $\{a\} \subset A$ 表示 $\{a\}$ 是集合 A 的一个子集合。

我们规定，空集 $\varnothing$ 包含于任何集合。显然，对任何集合 A 来说，非真子集只有两个：A 与 $\varnothing$。其它一切子集都是 A 的真子集。

例 1.1.8 $\{1,2,3\}$ 的所有子集合为：

$\varnothing$、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$\{1,2,3\}$，共有 $2^3 = 8$ 个子集合。

练习 1.1

1. 以{a,b,c……}形式写出下列各类数组成的集合：

(1)小于10的自然数；

(2)平方后不大于100的负整数；

(3)绝对值小于23的奇数。

2. 用语言描述下列集合中的元素是什么。

(1)$S_1=\{x:x^2+2x=0\}$；

(2)$S_2=\{x:5\leqslant x,x<9\}$；

(3)$S_3=\{x:1\leqslant x^2\leqslant 9\}$。

3. 包含n个元素的集合，有多少个子集合？

4. 现有四种药可以医治某种病，如果这种病至少可用两种药来治，而且用药的次序不受限制，试写出用这些药治这种病的不同方法。

5. 在一项减肥食物试验中，有300个志愿者参加食用这种食物达两个月。一个月以后，240个志愿者体重减少10公斤多，100人体重减少15公斤。两个月以后，260人体重减少10公斤以上，150人体重减少15公斤。假设没有人体重增加，试写出这些志愿者集合中四个子集合并指出它们之间的关系。

§1.2 集合的运算

本节我们将定义集合的若干种运算。通过集合运算可以构成其它的集合。例如，通过所有植物种构成的集合与所有动物种构成的集合之间的某种运算可以得到所有生物种的集合。

1. 并集

定义 1.2.1 由集合A及集合B的全体元素组成的集合，称为集合A与B的并集（或称为和集、加集），记为

$$A\cup B(\text{或 } A\dotplus B、A+B)$$

显然，这一定义可表为

$$A\cup B=\{x:x\in A \text{ 或 } x\in B \text{ 或 } x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

例 1.2.1 若 $A=\{1,3,6,8,\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，

则 $A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$。

例 1.2.2　A 是某城市中所有男性吸烟者构成的集合，B 是该城市所有的父亲组成的集合。则 $A\cup B$ 是该城市中所有吸烟的男人或者是父亲或者既是男性吸烟者又是父亲的人构成的集合。

注意，集合的求并运算与数字的求和运算有着本质的区别。通俗地说，前者是范围的合并，后者是数值的求和。两个集合总是可以求并，但其元素未必可以求和。因此集合求并运算与其元素求和运算毫不相干。

同理可以定义多个集合的求并运算：

$$A\cup B\cup C=\{x:x\in A \text{ 或 } x\in B \text{ 或 } x\in C\}$$

集合求并运算可用图 1.1 表示。图 1.1(a)中阴影部份表示集合 A，(b)、(c)中的阴影部份分别表示 $A\cup B$ 和 $A\cup B\cup C$。

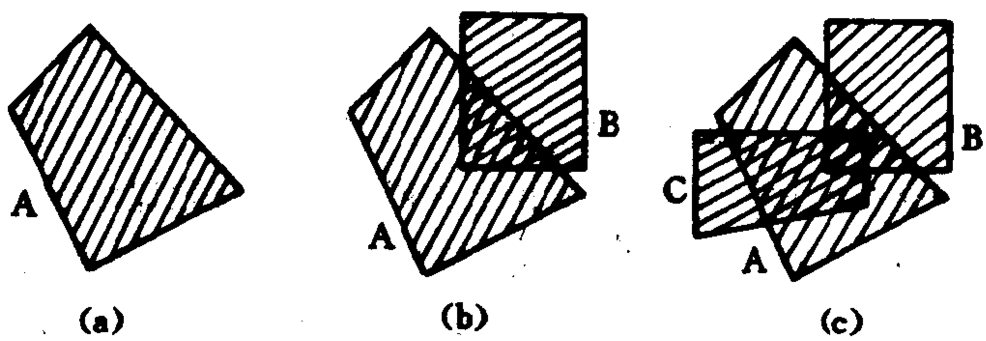


图 1.1

通常我们感兴趣的还有用另外的方法构成新的集合。例如，A 表示所有的男人集合，B 表示所有干活习惯用左手的人构成的集合，我们希望用一个集合表示所有惯用左手干活的男人。这就导致了以下的运算。

2. 交集

定义 1.2.2　同属于集合 A 及 B 的元素的全体组成的集合，称为集合 A 和 B 的交集，记作

$$A\cap B(\text{或 } A\times B、AB)$$

显然，这一定义可表为

$$A\cap B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

同理 $A\cap B\cap C=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B \text{ 且 } x\in C\}$

交集的图示见图 1.2。

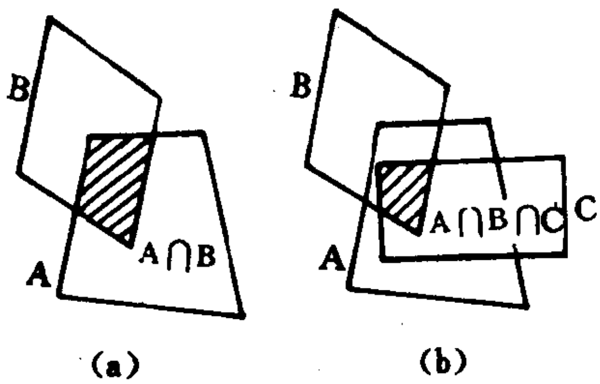


图 1.2

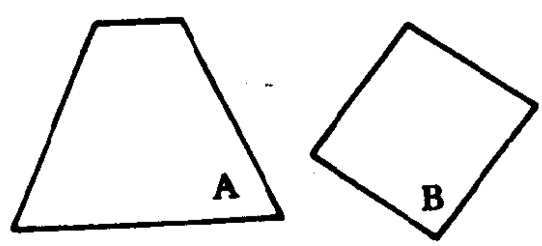
例 1.2.3　$A=\{1,3,6,8\}$，$B=\{2,4,6,8\}$

则 $A\cap B=\{6,8\}$

例 1.2.4　A 是一个给定种群中某种果蝇的集合，这种集合中的果蝇具有某种翅膀变异，B 是该种群中具有眼睛变异的果蝇的集合，则 $A\cap B$ 是该种群中既有翅膀变异又有眼睛变异的集合。

若 A 与 B 的交集 $A\cap B$ 是空集，称 A 与 B 不相交。如图 1.3 所示。

同样，集合的求交运算与数的求积运算有本质的区别。通俗地说，前者是求范围的公共部份，后者是求数值的倍数。二集合总是可以求交的，但其元素不一定能求积。因此，集合的求交与其元素的求积也是毫不相干的。



$A\neq\varnothing$　　$B\neq\varnothing$

$A\cap B=\varnothing$

图 1.3

3. 并、交运算的性质

定理 1.2.1　设 A、B 为二集合，则有

1)　$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$

2)　$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$

证明：1）若 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$

2）若 $x\in A$，则 $x\in A\cup B$；

若 $x\in B$，则 $x\in A\cup B$

定理 1.2.2（交换律）　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$，

定理 1.2.3（结合律）

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

定理 1.2.4（分配律）

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

定理 1.2.5（吸收律）

$$(A\cup B)\cap A=A$$

$$(A\cap B)\cup A=A$$

定义 1.2.3　若集合 A_1、A_2、……、A_n 都是两两互不相交的集合，即 $A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$ 且 $i,j=1,2,\cdots,n$，则称 A_1、A_2、……A_n 互不相交。

例如，在一部份人中，A 是指 10 岁以下人的集合；B 是 10 至 20 岁之间人的集合；C 是 20 岁以上人的集合，则 A、B、C 就是互不相交的集合，因为没有一个人是属于这三个集合中的任意两个集合。

在实际问题中，还对另外一种集合有兴趣。例如某一城市中全部人口构成全集，在甲肝病流行时，除注意患病人的集合外，也应充分注意未患病人的集合。引入下述定义。

4. **差集、补集**

定义 1.2.4　由属于集合 A 而不属于集合 B 的元素的全体组成的集合，称为集合 A 与 B 的差集，记为 $A-B$（或 $A\setminus B$）。

显然，这一定义可表为

$$A-B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\overline{\in} B\}$$

如图 1.4。

由图 1.4 可见 $A\bigcup B=(A-B)\bigcup(A\bigcap B)\bigcup(B-A)$这是两个集合的并集分解成三个不相交集的一种分解方法。读者可自行证明下面的定理 1.2.6。

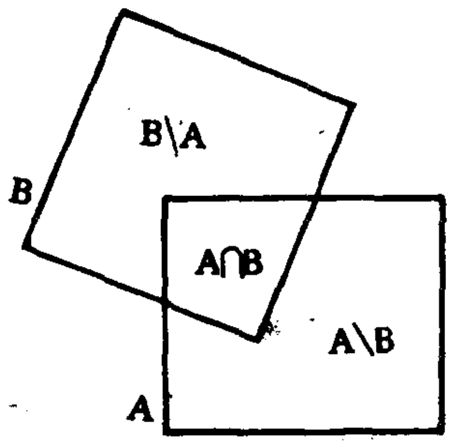


图 1.4

定理 1.2.6 对于任意集合 A、B，有

$$A-B=A-(A\bigcap B)$$

$$A=(A\bigcap B)\bigcup(A-B)$$

对于任意三个集合 A，B，C 有关系：

定理 1.2.7 $(A-B)\bigcap C=(A\bigcap C)-B=(A\bigcap C)-(B\bigcap C)$

证明：设 $x\in(A-B)\bigcap C$，则 $x\in(A-B)$ 且 $x\in C$，即 $x\in A$ 且 $x\in C$ 且 $x\overline{\in}B$，故 $x\in(A\bigcap C)-B$.

若 $x\in(A\bigcap C)-B$，则 $x\in A\bigcap C$ 且 $x\overline{\in}B$，即 $x\in A$ 且 $x\overline{\in}B$ 且 $x\in C$，故 $x\in(A-B)\bigcap C$。

同理证明 $(A-B)\bigcap C=(A\bigcap C)-(B\bigcap C)$

定义 1.2.5 若 Z 为全集，$A\subset Z$，称 $Z-A$ 为 A 关于 Z 的补集（也称余集），记作 $\overline{A}$（或 A'、A^c、$Z\setminus A$ 等）。

由此定义，可知 $\overline{A}=\{x:x\in Z 且 x\overline{\in}A\}$

关于补集的运算，读者可自行证明下述定理 1.2.8。

定理 1.2.8 若 $A\subset Z$，$B\subset Z$，则有

1）$A\bigcap\overline{A}=\varnothing$，$A\bigcup\overline{A}=Z$

2）$\overline{\varnothing}=Z$，$\overline{Z}=\varnothing$，$\overline{(\overline{A})}=A$

3）若 $A\subseteq B$ 则 $\overline{A}\supseteq\overline{B}$