成人高等教育教程丛书

高等数学

下 册

徐 兵　　計慕然

北京航空學院出版社

内 容 简 介

本书是作者在几年来为成人高等教育的"高等数学"教学讲稿的基础上，遵照国家教委工科院校高等数学课程教学指导委员会于一九八六年制定的"数学课程教学基本要求"及一九八一年十二月教育部审定的函授教学大纲改写而成。

作者注意到成人高等教育的特殊性及其特点，书中注意几何直观与物理解说。对一些难于理解或易于引起误解的概念与性质或指明问题的要点或提出思考题，以便引导读者正确理解。对于一些常见或重要的计算方法，书中给出一定的例题，并适当加以解说其方法。

全书共十四章，分上、下册出版。上册包括函数、极限、连续、导数、中值定理、导数应用、不定积分、定积分及其应用等八章。下册包括空间解析几何、多元函数的微分、重积分、曲线积分与曲面积分、级数及常微分方程初步等六章。

本书可供成人教育各专业选作教材或教学参考书。

高 等 数 学

GAODENG SHUXUE

（下 册）

徐 兵　　計慕然

責任編輯　　郭維烈

*

北京航空学院出版社出版

新华书店总店科技发行所发行　　各地新华书店经售

北京航空航天大学印刷厂印装

*

850×1168　1/32　印张：13　字数：338千字

1988年8月第一版　　1988年8月第一次印刷　印数：8000册

ISBN 7-81012-055-7/O·006

定价：2.20元

目　录

（下　册）

第九章　空间解析几何

第十章　多元函数及其微分法

第十三章 级 数

第十四章 常微分方程初步

目　录（上　册）

第九章　空间解析几何

教学基本要求

1．明了空间直角坐标系，熟悉两点间距离公式；

2．理解向量概念；

3．掌握向量的运算（线性运算、点乘法、叉乘法）、掌握两个向量夹角的求法与垂直、平行的条件；

4．熟悉平面的方程和直线的方程及其求法；

5．理解曲面方程的概念，掌握常用二次曲面的方程与图形。

6．知道空间曲线的参数方程和一般方程。

解析几何是用代数方法研究几何图形的科学。若仅限于研究平面上的几何图形，则为平面解析几何学；若仅限于研究三维空间中的几何图形，则为空间解析几何学。

解析几何的实质是建立点与实数之间的关系，把代数方程与曲线、曲面（通过坐标）对应起来，从而能用代数方法研究几何图形。

解析几何已成为特殊的数学工具：籍助于它，几何概念可以用代数表示，几何目标可以通过代数达到。反过来，籍助于它，能给代数语言以几何解释，以使人们能直观地掌握代数语言的意义，并能启发人们提出新的结论。这两方面构成了解析几何的基本问题。也可以更明确地说解析几何的基本问题为：

(1) 已知点的几何轨迹，如何建立它的代数方程？

(2) 已知代数方程，如何确定它的几何轨迹？

解析几何产生于十七世纪前半叶，笛卡儿于1637年著的《几

何学》被后人称为是解析几何的起点。十七世纪中叶解析几何问题由二维扩展到三维。欧拉在他1748年的著作《无穷小分析引论》中不但研究了平面曲线性质，还研究了三元二次方程变换问题等。该书被认定为第一本解析几何专著。拉格朗日在他1788年的著作《解析力学》中，象笛卡儿把点算术化一样，他把力、速度和加速度算术化了。一百年以后，由于电学理论的影响，数学和物理中开始广泛地研究这种有确定长度和方向的线段的一般理论。并称这种线段为向量。向量的理论称为向量代数，它在力学、物理等方面有很大价值，它也是现今解析几何学的重要组成部分。

§9.1 空間直角坐标系

由平面解析几何学可知，笛卡儿试图建立起一种通用的数学，使算术、代数和几何统一起来。他给出平面上点与实数对（x，y）间的对应关系，进而将方程与曲线对应起来，将“形”与“数”统一起来。这种能用代数方法研究几何图形的理论是以坐标法为基础的。同样，空间的“形”与“数”联系的媒介是空间坐标系。

这一节先来介绍空间直角坐标系。

所谓空间直角坐标系是指：给定一点o，过该点引出以这点为原点的三条互相垂直的数轴ox，oy，oz（通常称具有原点、方向和度量单位的直线为数轴），称之为坐标轴。o称为坐标原点。常记这坐标系为$oxyz$。

如果将一只手的大姆指、食指、中指表为两两垂直的形态，令它们依次表示ox、oy、oz轴。若用的是右手，则称这个坐标系$oxyz$为右手系。否则称为左手系。今后不加声明者，皆指右手坐标系。通常右手坐标系如图9-1所示。

三个坐标轴ox，oy，oz两两决定三个互相垂直的平面xoy，

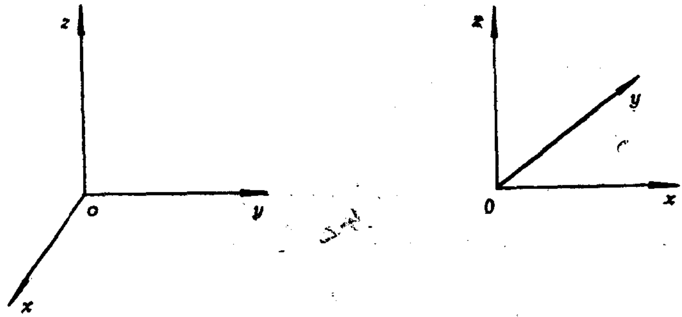

图 9-1

yoz，zox，称其为坐标平面。

设M为空间一定点，过M点作三个平面分别垂直于ox轴、oy轴、oz轴，并与ox轴、oy轴、oz轴的交点依次为A，B，C。设$oA=x$，$oB=y$，$oz=z$，则点M唯一决定了一组有序的三个数x，y，z。反过来，在三个坐标轴上依次给定三个点A，B，C，分别过A，B，C做三个平面依次垂直于ox轴，oy轴，oz轴，则这三个平面相交于一点，即一组有序的三个数x，y，z唯一决定了空间一点。于是空间的点M与一组有序的三个数间建立了一一对应关系。常称这组数x，y，z为点M的坐标，并称x为M的横标，y为M的纵标，z为M的竖标（或立标），常记为$M(x，y，z)$。如图9-2所示。

三个坐标平面将空间分为八个部分，称每个部分为卦限。这八个卦限用下述方法规定其顺序：

第一卦限	$x>0$，$y>0$，$z>0$
第二卦限	$x<0$，$y>0$，$z>0$
第三卦限	$x<0$，$y<0$，$z>0$
第四卦限	$x>0$，$y<0$，$z>0$
第五卦限	$x>0$，$y>0$，$z<0$

第六卦限　　$x<0$，$y>0$，$z<0$

第七卦限　　$x<0$，$y<0$，$z<0$

第八卦限　　$x>0$，$y<0$，$z<0$

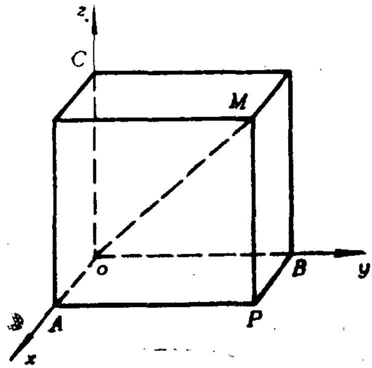

图 9-2

有必要指出，位于坐标平面或坐标轴上的点，我们约定它不属于任何卦限。但是这些点的特性应当明了：

位于yoz坐标平面上的点，其横标 $x=0$；位于zox 坐标平面上的点，其纵标$y=0$；位于 xoy坐标平面上的点，其竖标$z=0$。

位于 x 轴上的点，必有$y=z=0$；位于 y 轴上的点，必有$z=x=0$；位于 z 轴上的点，必有 $x=y=0$。

如果o 为原点，必有$x=y=z=0$。

如果给定 $M(x, y, z)$，那末点M到原点o的距离就是以o为顶点的三个棱长分别为$|x|$，$|y|$，$|z|$的长方体的对角线$|Mo|$之长。如图9-2所示。由勾股定理可得知

$$|Mo|^2=x^2+y^2+z^2$$

于是

$$|Mo|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

相仿，如果给定两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，过M_1，M_2各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体。由勾股定理可以得知

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$
$$=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2$$

如图 9-3 所示。

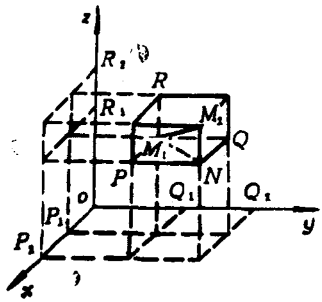

图 9-3

注意到 $|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$

$|M_1Q|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$

$|M_1R|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$

可知 $|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$

因而 $|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

上式又称为M_1，M_2两点间的距离公式。

例1 试判定以$A(4, 1, 9)$，$B(10, -1, 6)$，$C(2, 4, 3)$为顶点的三角形ABC的几何特性。

解 $|AB|^2=(10-4)^2+((-1)-1)^2+(6-9)^2=49$

$|AC|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49$

$|BC|^2=(2-10)^2+(4-(-1))^2+(3-6)^2=98$

由于$|AB|^2=|AC|^2$，可知$AB=AC$，因而ΔABC为等腰三角形。又由于$|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$，可知ΔABC为等腰直角三角形。

例2 在yoz坐标平面上，求与三个点$A(3, 1, 2)$，$B(4, -2, -2)$，$C(0, 5, 1)$等距离的点的坐标。

解 注意到在yoz坐标平面上点的特点，设所求点为$(0, y, z)$。由题意应有

$$|MA|=|MB|=|MC|$$

于是有

$$|MA|^2=|MB|^2, \quad |MA|^2=|MC|^2$$

即

$$\begin{cases}(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 \\ \quad =(0-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2 \\ (0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 \\ \quad =(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2\end{cases}$$

解得$y=1$，$z=-2$，于是所求点的坐标为$(0, 1, -2)$。

习 题 一

1. 试指出所给各点位置的特殊性质：$A(1, 0, 0)$，$B(0, -2, 0)$，$C(0, 1, 2)$，$D(0, 0, 0)$。

2. 求点$M(4, -3, 5)$与原点及各坐标轴间的距离。

3. 若已知$A(4, -7, 1)$，$B(6, 2, z)$，且$|AB|=11$，试求z。

4. 在z轴上求与点$A(-4, 1, 7)$和点$B(3, 5, -2)$等距离的点。

§9.2 向量的概念与綫性运算

在力学、物理学等问题中所遇到的量，可以分为两大类：其中一类完全可以用数值来决定，如质量、温度、时间、面积、体积等等，常称这类量为数量。另一类量，只知道其大小幷不能完全确定它们，还必须指出它们的方向，如力、速度、加速度等等，称常这类量为向量。

我们可以把向量用具有一定长度和方向的线段来表示。这种有确定长度和确定方向的线段常称为**有向线段**。常称这确定的长

度为**向量的长度**；称这个确定方向为**向量的方向**。

若A为向量的始点，B 为终点，常记为$\overrightarrow{AB}$。有时也用小写字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 等表示。或记为黑体 **a**，**b** 等。近年来一些西方工程技术书中也常用明体 a，b 等表示向量，为了能区分数量与向量，常常要依上下文意思由读者自行区分。本书中采用$\overrightarrow{AB}$或 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示向量。

向量 $\overrightarrow{AB}$，或$\vec{a}$的长度通常又称为**向量的模**，记为$\|\overrightarrow{AB}\|$，$\|\vec{a}\|$。

模为1的向量称为**单位向量**。

为了方便，我们特别定义模为零的向量为**零向量**，记为$\vec{0}$或 0。但有必要指出，零向量的方向可以看作是任意的。

如果向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$的模相等，且它们的方向也相同，则称向量$\vec{a}$与$\vec{b}$相等，记为 $\vec{a}=\vec{b}$。

与向量$\vec{a}$ 的模相同，而方向相反的向量，称为 $\vec{a}$的负向量，记为$-\vec{a}$。

由向量相等的定义可以看出，两个向量相等含有两个要素：模相等、方向相同（与向量的起始点位置无关！）。通常称与起始点位置无关的向量为自由向量。下面所研究的向量除特殊声明外，概指自由向量。

仿照力、加速度的合成法则，我们可以定义向量的线性运算：

一、向量的加法

设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为不位于同一条直线上的两个向量。将它们的始点移到同一点o，并记 $\vec{a}=\overrightarrow{oA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{oB}$。以$\overrightarrow{oA}$，$\overrightarrow{oB}$为邻边作平行四边形$oACB$，如图9-4（$a$）所示。则称$\overrightarrow{oC}=\vec{c}$ 为$\vec{a}$与$\vec{b}$ 的和向量，记为 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$。

上述用平行四边形对角线确定两个向量和的方法，常称为**向

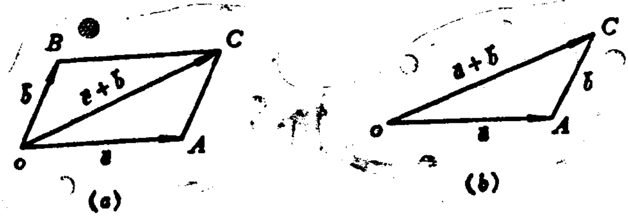

图 9-4

量加法的平行四边形法则。

当$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相同时，定义其和向量与这两个向量方向相同，其模为这两个向量模之和。当$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相反时，定义其和向量的方向与$\vec{a}$，$\vec{b}$中模较大向量方向相同，而和向量的模等于$\vec{a}$，$\vec{b}$中较大的模与较小的模之差。

注意到图9-4（a）中$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，我们可以简化向量的求和：自$\vec{a}$的终点$A$，作$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，连接$oC$，则向量$\overrightarrow{oC}$即为$\vec{a}$与$\vec{b}$的和向量。如图9-4（$b$）所示。这种求和常称为向量**加法的三角形法则**。

向量加法的三角形法则可以推广到求任意有限多个向量之和的问题中去。若给定了向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，…，$\vec{d}$。则从任一点o引出$\vec{a}$，然后从$\vec{a}$的终点引出$\vec{b}$，…。作出所谓向量折线$\vec{a}\vec{b}\cdots\vec{d}$。如图9-5所示。则以$o$点为始点，以上述向量折线中$\vec{d}$的终点为终点的向量$\vec{c}$，即为这些向量之和，记为

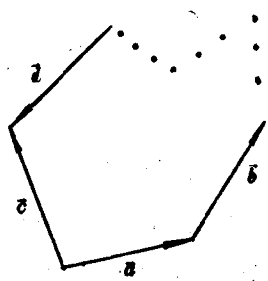

图 9-5

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\cdots+\vec{d}$$

由向量和的定义，不难验证：

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

二、向量的减法

由于$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$。如果$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行，可以利用上面求向量和的平行四边形法则求出$\vec{a}-\vec{b}$，如图9-6所示：作出以$\vec{a}$，$-\vec{b}$为邻边的平行四边形$oAC'B'$，则其对角线向量$\overrightarrow{oC'}$即为所求。注意到$\overrightarrow{oC'}=\overrightarrow{BA}$。为简化运算，可以定义为：

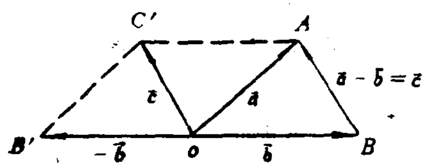

图 9-6

将$\vec{a}$与$\vec{b}$的起始点移到同一点o，记$\overrightarrow{oA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{oB}=\vec{b}$。则由$\overrightarrow{oB}$的终点$B$到$\overrightarrow{oA}$的终点$A$的向量$\overrightarrow{BA}$即为$\vec{a}-\vec{b}$，称之为$\vec{a}$与$\vec{b}$之差。

上述求两个向量之差的方法常称为**向量减法的三角形法则**。

如果$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相同或方向相反，则$\vec{a}-\vec{b}$的定义也可以由$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$得出，請读者思考。

三、向量与数的乘法

若给定向量$\vec{a}$和数量λ，则定义$\lambda\vec{a}$（或$\vec{a}\lambda$）为向量与数的乘法，它表示一个向量：

(1) $\lambda\vec{a}$的模等于$\vec{a}$的模的$|\lambda|$（λ的绝对值）倍。

(2) 当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$方向相同；

当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$方向相反。

特别，当 $\lambda=\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}$时，则

$$\lambda\vec{a}=\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$$

为与$\vec{a}$ 同方向的单位向量。

不难验证：

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$
$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$$
$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

其中λ，μ为任意实数；$\vec{a}$，$\vec{b}$为任意向量。

思考题 若 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 皆为非零向量，試考慮在什么条件下，下列关系正确？

(1) $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$；

(2) $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|$；

(3) $\|\vec{a}-\vec{b}\|=\|\vec{a}\|-\|\vec{b}\|$；

(4) $\|\vec{a}-\vec{b}\|=\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$。

习 题 二

1. 把$\triangle ABC$的边BC三等分，并用D_1，D_2表示分点。设$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，试用$\vec{a}$，$\vec{c}$表示向量$\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$。

§9.3 向量的代数表示

为了用代数运算表示向量运算，我们将向量引入空间直角坐标系。若将向量的起始点移到坐标原点o，则这个向量完全由其终点所确定。反过来，任给空间一点M，总可以唯一确定一个向量$\overrightarrow{oM}$。因此可以说，空间的点与起始点在坐标原点的向量有一

一对应关系。通常称向量$\overrightarrow{oM}$为点M对于点o的**向径**。我们设M点的坐标为(x, y, z)，即

$$oA=x,\ oB=y,\ oC=z$$

如图9-7所示。

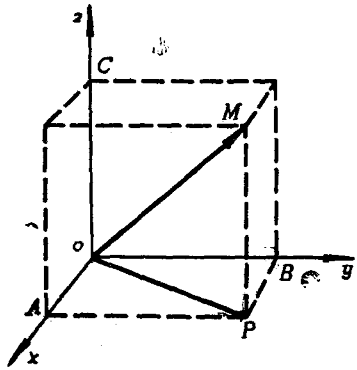

图 9-7

由向量的加法法则可知

$$\overrightarrow{oM}=\overrightarrow{oA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{oA}+\overrightarrow{oB}+\overrightarrow{oC}$$

如果在坐标轴ox，oy，oz上以o为起点分别取三个以坐标轴正向为其方向的单位向量，并依次记为$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$，则称其为基本单位向量。由向量运算法则可知

$$\overrightarrow{oA}=x\vec{i},\quad \overrightarrow{oB}=y\vec{j},\quad \overrightarrow{oC}=z\vec{k}$$

常称它们为$\overrightarrow{oM}$在三个坐标轴上的分向量。也可以记为

$$\overrightarrow{oM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

常称上式为向径的**坐标表示式**或**向量在坐标轴上的分解**。为方便，也常记为$\overrightarrow{oM}=\{x, y, z\}$，并称$x$，$y$，$z$为向径$\overrightarrow{oM}$的坐标。

利用向径的坐标，可以将向量的线性运算代数化。

设向径$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$，即