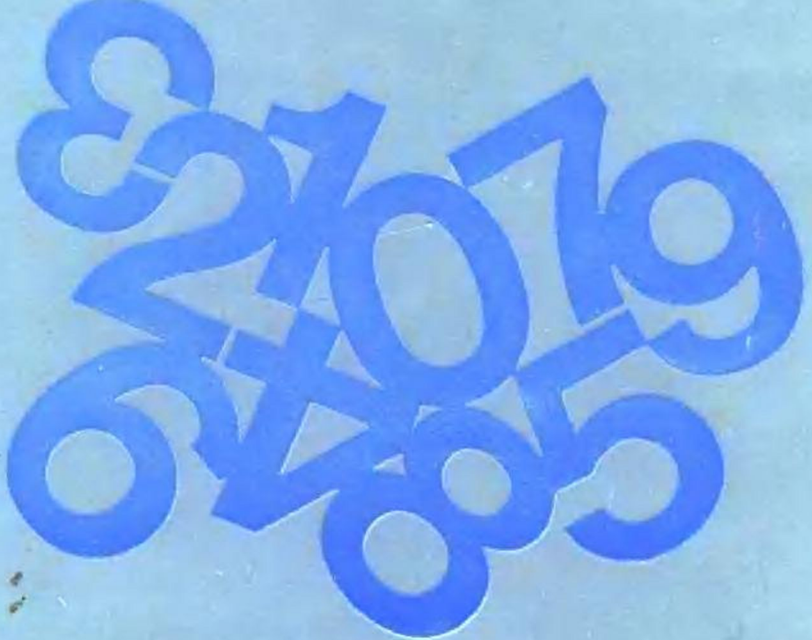
动态规划

DONG TAI GUI HUA

• 张有为著 • 湖南科学技术出版社



DYNAMIC PROGRAMMING

ZHANG YOUWEI

动态规划

● 张有为 著

湖南科学技术出版社

湘新登字004号

动 态 规 划

张有为 著

责任编辑：胡海清

※

湖南科学技术出版社出版发行
（长沙市展览馆路8号）
湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

※

1991年11月第1版第1次印刷
开本：850×1168毫米 1/32 印张：13.375 插页：4 字数：303,000
印数：1—1,000

ISBN 7—5357—0935—4
O·92　　定价：8.90元

地科 83—040

序

动态规划是应用数学中的一个实用分支，它是解决优化问题的一种特殊途径。所谓优化，通常指的就是从备选方案集合中，找出某问题的最好的解。我们将研究可以定量地公式化的问题，即我们将处理现实世界中存在的某些事物或现象的数学模型，指的就是从十分丰富的背景中所抽象或孤立出来的，并用数学语言加以描述的某种特征。若有一种有效的抽象与孤立，被忽略的特征影响都是微不足道的，那么我们就能期望，数学模型的解，将为我们提供被考察现象的一种深入的理解与合理精确的描述。就现实意义来说，产生一个恰当的模型，在较大的程度上是一种艺术，而不是一种严格的科学问题。通常数学家认为还不十分严密，而技术工作者认为确实已经足够准确了。显然，它是一种实用艺术，并且越来越获得成功。

动态规划是解决某些优化问题的有效方法，而不是一种特殊算法。它处理的问题可以包含有大量感兴趣的决策变量，使得问题好象由一系列问题组成的。从概念上来看，实际上动态规划所要做的，正是把解n变量问题，转化为解n个单变量问题。只要这样做可行，通常仅需要很小的计算量。

动态规划已广泛应用于解各个领域和各种类型的问题，值得注意的是，能应用动态规划解决问题的原始数学描述，可以有很大的差别。而线性规划数学描述的形式，总是相同的。所以线性规划是在简化方法意义上的一种算法，与此不同，动态规划不能说是一种算法，而是一种方法或途径。

动态规划作为应用数学的一个分支，是由理查德·贝尔曼(Richard Bellman)所建立的，1957年他首次提出了系统的论述。其后，贝尔曼及其他科学工作者发表了一系列的有关动态规划的著作，包括动态规划在经济学、管理科学、化学工程等工业工程、控制理论、资源理论、变分法、马尔可夫过程中的应用。引起了研究系统分析、优化及控制科学技术工作者的高度重视。

动态规划的出现已有了三十余年的历史，但是在古老的数学科学中，它仍然是一个很年轻的应用数学分支。它的成功之处是可以把一个n维问题变换为n个一维优化问题，一个一个地求解。这是经典极值方法所做不到的。它几乎超越了所有现存的计算方法，特别是经典优化方法。动态规划能够确定出绝对(全局)极大或极小，而不是相对(局部)极值。因而，人们不再需要关心伤脑筋的局部极大或极小问题。实质上，所有其它优化技术，各类约束都会引出严重麻烦问题。然而，变量的某些类型约束，对动态规划适用，但却使其它计算方法失去了应用的可能性。

从严格的数学意义上来说，动态规划还不是一个很完善的数学分支。贝尔曼及其以后的数学工作者阐述了动态规划的最优性原理，也解释了一类必要和充分条件的意义。但是，他们还没有清楚地给出这些条件的数学解释。从应用来说，使用动态规划时还存在有某些限制，最主要的是状态空间维数，状态维数越高，所遇到的计算量过大的困难越大。虽然有了一些解决的方法，但还没有哪种是十分令人满意的。

本书虽力求臻于完善，但不可能包罗整个学科。若追求完整性，则篇幅将会大大增加，以致于违背作者写作的原意。但是，仍然期望本书将提供对本学科基本理论的充分理解和有关方法的适用知识，并为进一步学习本书没有论及的本学科的其它课题，提供一个适度的起点。

本书在写作过程中参考和引用了国外许多作者的有关论述和应用实例，从中得到了启发和教益，也得到了国内朋友的支持与鼓励，在此谨表谢忱。

由于作者水平所限，本书难免有错误与不当之处，欢迎批评指正。

作者

1990年12月

目　录

第一章 导　论

动态规划是解决最优化问题的一种特殊途径。它可以把一个n维最优化问题，变换为n个一维最优化问题，一个一个地求解。这是经典极值方法所做不到的。它几乎超越了所有现存的计算方法，特别是经典最优化方法，能够确定绝对（全局）极大或极小，而不是相对（局部）的极值。因而可以不再需要关心伤脑筋的局部极大和极小问题。这就是动态规划能够立足于应用数学之林，得到广泛应用与发展之所在。作为导论，本章将从研究最优化问题开始，通过集与函数的描述，建立有关动态规划的最基本的概念，为读者呈现出动态规划的初步轮廓。

1.1 最优化问题

人们可以用各种方式来说明最优化问题，归根到底，**就是从备选方案的集合中，找出某问题的最优解**。规划是属于最优化理论的一个重要分支。早在1939年苏联的康托洛维奇(Л·В·Канторович）和美国的希奇柯克（F.L.Hitchcock）就在生产组织管理和制定交通运输方案方面首先研究和应用了线性规划的算法。1947年，旦茨基（G.B.Dantzig）提出了求解线性规划问题的单纯形算法，始为线性规划的理论与计算奠定了基础。非线性规划的基础工作则是由库恩（H.W.Kuhn）和塔克（A.W.Tucker）在1951年完成的。动态规划是规划理论的进一步发展，它另辟了一条新的途径，而不是象线性规划那样给出了一组明确定义的特殊算法。动态规划是由理查德·贝尔曼（Richard Bellman）所建

立的。1957年贝尔曼首次提出了系统的论述[1]，虽然大量的工作早些时候在兰德（Rand）公司报告以及贝尔曼的其它出版物中发表过。接着贝尔曼和他的合作者发表了动态规划应用[2]与动态规划在控制理论中的应用[3,4]等其它著作。1960年何瓦德(R.A.Howard)又提出了动态规划在马尔科夫过程中的应用[5]。其后，大量的论文与著作研究了动态规划在化学工程、资源理论、变分法、最优控制理论以及经济学中的应用。动态规划的发展始终是伴随着它的广泛应用不断臻善的。

前面我们说过，所谓最优化问题，指的就是从备选方案中，找出某问题的最优解。这样，我们就要把问题定量地公式化。因此我们必将处理现实世界中存在的一些现象或事态的数学模型。所谓数学模型，指的是从十分丰富的背景中所抽象或孤立出来的，并用数学语言加以描述的某些特征。若有一种有效地孤立，被忽略的特征的影响都是微不足道的，那么我们就能期望数学模型的解，将为我们提供被考察现象的一种深入理解与合理精确的描述。就上述意义来说，产生一个适合的模型，在较大程度上是一种艺术，而不是一种严格的科学问题。显然，这是一种广泛的实用艺术，并且越来越获得成功。

在评价一个数学模型时，实际工作者与数学家之间往往存在有认识上的差距，数学家通常认为还不十分严格，而实际工作者认为已经足够精确了。我们是否可以用下述例子来沟通两者之间的认识。正态分布是一个数学模型，首先是由狄·摩维尔（De Moivre）在1733年所发现的，但是他的发现一直到很久以后，才由高斯(Gauss，1809)及拉普拉斯（Laplace，1812）重新发现，所以许多著作中又称其为高斯分布。在高斯和拉普拉斯的影响下，在相当长的一个时期中，人们几乎把下述一段话看作是公理：只要能够进行大量的足够精确地观察，那么作为一个理想的极限形式，几乎一切的统计分布都趋向于正态分布。显然，这种说法太夸张了，应该加以纠正。但是，不能否认，在大量的应用中，我们遇到的许多分布，至少是近似正态的。任一个随机变量离开其

平均值而产生的差值，被认为是误差，它服从于正态分布所描述的误差定律。李普曼(Lippman)有过一句名言，大意是:“每个人都相信误差定律，实验工作者相信它，因为他们认为它是一个数学定理，而数学家相信它，因为他们认为它是一个实验的事实”。只要双方相信得不太绝对，下面这句话对双方看来都是可以接受的:“数学的证明告诉我们，在某些限制性条件下，期望一个正态分布是合理的，而统计的经验在事实上表明，分布常是近似正态的”。如果我们所建立的数学模型能够为实际工作者和数学家所共识，那是再好不过的了。

1.2 最优化模型

现在让我们来研究任一最优化问题数学模型的构成。它是由变量、目标函数和约束条件三部分来组成的。

变量（或为决策变量，或为策略变量，或为独立变量） 我们将通过对这些量或因素的处理，获得某些希望的结果或目标。最常用的变量将表示为x_1，x_2，…，x_n，或表示为变量的向量$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。通常我们称$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为$n$维欧几里得空间中的一个点，1.4节中我们将详细说明。

目标函数（或为收益函数，或为利润函数） 作为有关变量的特定组合，成为效率、价值或效用的某种量度。在许多场合，它是变量的单值函数，即$z=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。这是将被最优化(极大或极小) 的函数。在大多数情况下，函数$z=f(\boldsymbol{x})$是已知的。但在某些最优化问题中，情况并非如此。在这些问题中，函数本身是未知的，并且是最优化问题的解。就这些问题而论，通常用变分法来研究(在动态规划中亦有其它方法)。作为这类问题的一个例子，我们求某积分I的极小

$$I=\int_a^b F(x, y, y')dx. \tag{1—1}$$

式中，$y=f(x)$是极小化I的特定函数（即待求的），$F(x,y,y')$是

x、y的某已知函数，并且有$y' \equiv dy/dx$。因此，这里有两类截然不同的目标函数。第一类是，为了极大或极小化$f(\boldsymbol{x})$，求$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的值。第二类是，为了极大或极小化一个泛函

$$I=\int_a^b F(x, y, y')dx,$$

求未知函数$y=f(\boldsymbol{x})$。还会出现比这个例子更复杂的情况，我们将在以后的章节中详述。

约束（或为可行性条件）　约束是除了保证目标函数取极大或极小值外，还必需满足的代数等式、不等式或在某些情况中的微分方程。通常约束可表示为

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{h}_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 0,\\ \boldsymbol{h}_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\ \boldsymbol{h}_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0\end{array}\right\} \tag{1—2}$$

$$(i=1,2,\cdots,m).$$

对于一个给定的i，只能为三个可能的约束之一。在某些场合，特别是变分问题，可能出现微分方程约束。例如，我们希望极小化

$$I(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx,$$

约束为

$$\frac{dy}{dx}=h(x,y), \tag{1—3}$$

$$y(a)=C.$$

变量、目标函数、约束条件是最优化数学模型的三个组成。由它们就描述了一般变量的最优化问题，具体就是：

$$\max\ f(\boldsymbol{x}), \tag{1—4}$$

约束为

$$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x})\{\leqslant,=,\geqslant\}0 \tag{1—5}$$

$$(i=1,2,\cdots,m).$$

显而易见，$\min[f(\boldsymbol{x})]=-\max[-f(\boldsymbol{x})]$。因此，我们可以仅限于研究或者是极大化，或者是极小化问题。这里我们将不考虑一般的变分问题。动态规划应用于变分问题，将在第十一章中研究。

1.3 可分函数

在研究最优化问题时，我们非常关心目标函数及其约束函数的特征。我们考察它们的一个重要准则就是函数是否**可分**。可分函数是由单变量函数和所组成的函数，即

$$f(\boldsymbol{x})=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n). \qquad (1—6)$$

这种类型的可分函数在动态规划中是最常出现的。可分函数还有其它类型，在后续章节出现时再作介绍。

初看起来，似乎式（1—6）所给出的类型可能过份地限制了许多重要的函数，因为它们是不可分的。例如，下列函数显然是不可分的

$$f(x_1,x_2)=3x_1x_2+2x_1\sin x_2.$$

然而，不难看出，多数函数（但不是全部）可用增加辅助变量和附加约束条件的方法转换成为可分的。任意可因子化函数转换为可分的方法，由两个基本步骤组成，重复执行这两个步骤，直到得到可分函数为止[6]。这两个步骤是：

（1）用$y_1^2-y_2^2$置换函数中的任意乘项

$$h_1(x_1)h_2(x_2),$$

并附加约束

$$h_1(x_1)=y_1-y_2,$$

$$h_2(x_2)=y_1+y_2.$$

（2）以$H(y)$置换函数中任意项

$$H(h(x)),$$

并附加约束

$$h(x)=y.$$

能重复上述两个步骤分类的非线性函数类，组成了可因子化函数。可因子化函数是一个n变量函数，它可以按以下步骤产生：先组合（加或乘）一些单变量函数，对这些函数进行变换，再进行组合，……，共有限次。

我们下边研究一个运用这个步骤的例子，设我们希望得出下述问题的可分：

$$\max_{(x_1, x_2)} \quad x_1 e^{(x_1+x_2)^2}. \tag{1—7}$$

应用步骤（1）得到

$$\max_{(x_1, x_2, y_1, y_2)} \quad y_1^2 - y_2^2.$$

约束为

$$y_1 - y_2 = x_1, \tag{1—8}$$

$$y_1 + y_2 = e^{(x_1+x_2)^2}.$$

式（1—8）中的第二个约束仍不是可分的，再应用步骤(2) 得到

$$\max_{(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)} \quad y_1^2 - y_2^2.$$

约束为

$$y_1 - y_2 = x_1, \tag{1—9}$$

$$y_1 + y_2 = e^{y_3},$$

$$(x_1 + x_2)^2 = y_3.$$

式（1—9）中最后一个约束仍是不可分的，再应用步骤（2)得到

$$\max_{(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4)} \quad y_1^2 - y_2^2.$$

约束为

$$y_1 - y_2 = x_1, \tag{1—10}$$

$$y_1 + y_2 = e^{y_3},$$

$$y_4^2 = y_3,$$

$$x_1 + x_2 = y_4.$$

式（1—10）现在是完全可分的，并且与式（1—7）完全等价。

我们需要强调指出，在研究最优化问题时，我们常使用的一种重要准则是目标函数以及约束函数具有可分性的特征，并且可以用增加辅助变量和附加约束的方法将多数函数转换为可分的。

1.4 n维欧几里得空间与凸集

我们知道，研究最优化问题，实质上是研究在一定约束条件下，目标函数的极小或极大值。函数极小值与极大值的存在性，有一个重要的条件，就是函数的凸性或与其相反为凹性。在研究凸函数与凹函数之前，我们须先讨论一下n维欧几里得空间、集与凸集。因为函数一般来说是n维欧几里得空间中的超曲面，而研究凸函数又是基于凸集的。

集 把一些确定的彼此不同的事物（个体）做为一个整体来考虑时，这个整体便称为一个**集**。而组成集的客体（个体）称为**元素**。

我们用大写字母来表示集，用小写字母来表示元素，肯定时记为

$$x \in P,$$

表明"x是P的元素"，或读作"x属于P"。否定时记为

$$x \notin P,$$

表明"x不是P的元素"，或读作"x不属于P"。

对任意给定的性质S有一集P，它的元素恰好都是具有性质S的一些个体，即

$$P = \{x \mid S(x)\}. \tag{1—11}$$

这是用元素的公有特性来定义集的原理，称为抽象原理。

我们经常遇到的整数集、正整数集、实数集、复数集、有理数集，很明显，都具有它自己的公有特性。本节我们限于考虑点集，即一组对象或元它们是按顺序编排的实数。例如，(x_1, x_2, x_3)是三个数组成的点，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是由n个数组成的点。数组中的每个数有时称为点的分量。自然，我们可以称这些点的群为集合。由于我们限于研究点集，任意点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$将是n维欧几里得空间中的点。

点集中的数组，必然具有公有的特性，或称附加了一些条件，