

化工与通用机械参考资料

离心压缩机研究

一九七七年

毛主席语录

阶级斗争是纲，其余都是目。

无产阶级文化大革命是使我国社会生产力发展的一个强大的推动力。

自力更生为主，争取外援为辅，破除迷信，独立自主地干工业、干农业，干技术革命和文化革命，打倒奴隶思想，埋葬教条主义，认真学习外国的好经验，也一定研究外国的坏经验——引以为戒，这就是我们的路线。

化工与通用机械参考资料

离心压缩机研究

1977年1月

编辑

出版：合肥通用机械研究所

发行

制版：北京市制版厂

印刷：北京印刷二厂

工本费 1.5 元

目 录

- 一、离心式透平机械子午面内可压缩流动的一个通用的有限差分方法 (1)
- 二、透平机械流动计算中不定性的出现和消除 (16)
- 三、松弛因子*对透平机械流动计算性质的影响 (35)
- 四、径向流动压缩机叶片载荷的新计算方法 (56)
- 五、径流式或混流式叶轮进口流场的简化计算方法 (69)
- 六、径向透平机械中非粘性可压缩流体轴对称有旋流动的计算... (77)
- 七、设计轴流、混流、离心式流体机械叶片的倒置法理论 (92)
- 八、采用任意翼型叶片的离心叶轮内流动的研究(第一篇) (112)
- 九、采用任意翼型叶片的离心叶轮内流动的研究(第二篇) (127)
- 十、透平机械叶轮内的流动(第一部分 叶片间理论)..... (142)
- 十一、透平机械叶轮内的流动(第二部分 考虑了叶片间流动后回转流面的决定法) (153)
- 十二、关于透平机械叶轮内的流动(第三部分 有中间叶片的回转叶栅内的流动) (167)
- 十三、确定离心压缩机叶轮叶片上速度分布的快速近似法 (178)
- 十四、透平机械叶栅中速度的准三元计算..... (192)
- 十五、计算透平机械子午面速度分布的Fortran程序
- I. 离心压气机 (196)
- 十六、透平叶列表面速度分布和阻塞流动的准三元计算之Fortran程序.....

离心式透平机械子午面内可压缩流动的一个通用的有限差分方法

W. R. Davis

引言

在工业离心式透平机械领域内，最近相当重视有关提高效率和精确地预测性能的要求，并使人们致力于对离心式机械内复杂流动的研究。看来，计算流体动力学的新进展可有效地应用于这一领域。如 Senoo(1)¹和 Novak(2)已经把流线曲率法用来解离心式转子子午面内的流动。

更加传统的位势流解，如 Stanitz(3)的工作没有上述工作适用。其他的方法是采用基于大量数据的经验设计方法，这些方法实质上是处理进出口条件。Jansen(4)研究了一个无叶径向扩压器内的流动，他假设二个壁面的边界层是一样的，并求解了三元素流边界层方程的一个特殊情况。

正如 Dean(5)已经指出，必须懂得一个离心式机械内的流动是非常复杂的。尽管目前要描述一个真实机械内存在的所有现象是不可能的，但人们感觉到：由流体动力学中人为的(State-of-the-art)分析方法出发，并在不断的发展中加以推广，这样形成的一个系统的方法将会显著地改善我们对流动情况的了解，并提高预测性能及改进效率的能力。

一个办法是企图解复杂的 Navier-Stokes 方程，但这是一个非常困难的问题，以至于现在及不久的将来是做不到的。另一个方法是假设一个二层模型，即一个无粘性流动的解，而这解又与端部壁面边界层互相发生作用。在这个方法中，模型是灵活的，必要的话还可以使之包含有分离区及扭曲边界层。

在文献(6)中吴仲华介绍了二组相交的流面族上无粘性流动控制方程的严格推导。他把这二组相交的流面族叫做第一类流面和第二类流面。这些 S_1 和 S_2 面是比通常所知的跨叶间面及跨轮毂与轮盖间面更为一般的流面，不象通常所作那样限于简单的回转面 (S_1) 及由径向元素构成的面 (S_2)。而是这些流面允许任意地歪曲，它们只是决定于流场的计算。因此完全的三元流动解需要迭代。由一组曲面向另一组曲面提供信息直至获得稳定的收敛解。吴仲华(6)还推荐了一种解二组曲面上流场的有限差分法。这里会出现一组非线性方程组，然后可用迭代矩阵或松弛法来求解。

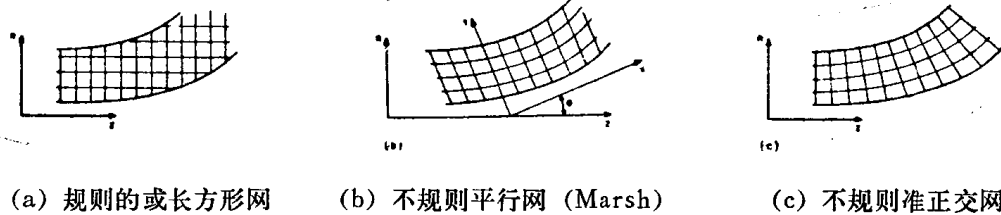
最近 Marsh(7)用吴仲华的方法，在 S_2 面上用不规则的有限差分网格，导出了非线性方程组，然后用迭代矩阵方法求解。这种不规则的网格的重要性在于使边界节点即使在边界是弯曲时也能落在机械本体的边界上，而在近代透平机械中本体的边界一般是弯曲的(图 1(b))。

1 括号内下面带横的数字指文章末的参考文献

Smith 和 Forst 把 Marsh-吴仲华的方法成功地推广到 S_1 面 (跨叶间曲面)。他们采用吴仲华推导的控制方程、Marsh 所发展的不规则有限差分网格及叶栅上下游近似边界条件。

作者已成功地把 Marsh 的方法及更有名的流线曲率法用于轴流式压缩机的 S_2 面上无粘性流动 (9)(10), 并作为 Carleton 大学中发展起来的轴流式压缩机性能预测计算程序的一部份。此外, 类似于 Smith (8) 所描述的一种矩阵方法也用于 S_1 面流动计算的一个计算程序之中了 (11)。用矩阵法的经验表明它是一种稳定的、精确的无粘性流动的计算方法, 它提供了一些优于更常用的流线曲率法的好处 (12)。

由于 Senoo (1) 和 Novak (2) 所采用的准正交流线曲率法看起来很诱人, 因而有必要。流线曲率法的不利的一面作一些说明。精确地计算流线曲率正是这一方法的问题所在, 而且还必须十分注意避免不稳定性, 而不稳定性会引起发散。Wilkinson (13) 的研究限于曲率很小这样一类问题, 并且推荐了一个与已经常用的方法很不相同的最优过程。但是对于一些离心式压缩机的部件中所遇到的曲率很大的情况并没有报导类似的研究。在文献 (12) 中 Davis 和 Millar 把流线曲率法和矩阵法用于轴流式透平机械的流动分析, 并作了比较, 结论是有利于矩阵法的, 主要是由于稳定性的原因。对于在本文中所研究的几何形状作了进一步的比较, 得到相似的结论。流线曲率法还要求作一些座标变换, 因为在柱座标系内, 在一些部件中流线斜率变为无限大。同样, 流线曲率也不能确定。这一方法的固有的不稳定性要求对流线变更加以阻滞。可以断定任何附加的与流线位置有关的解析模型, 如边界层的计算, 都会是不稳定的潜在因素。还应当注意到这样一点: 流线的斜率与曲率在流线位置改变时每次都要重新计算, 也即每次都需要迭代。



(a) 规则的或长方形网 (b) 不规则平行网 (Marsh) (c) 不规则准正交网

图 1 有限差分网格

Marsh 和 Smith 用前面描述的矩阵法写出了在由轴向转过一角度的直角坐标系中 (如图 1 (b) 所示) 的控制方程, 目的在于把他们的方法推广到更广泛的透平机械中去加以应用。

然而在离心式透平机械中, 特别是多级机械中, 在研究 S_2 面流动时, 设计者常常会遇到一系列的 90° 和 180° 的弯头, 在一些情况下, 这些弯头有很大的曲率及曲率的变化率。把 Marsh 型网格用于离心式机械的部件中去在很多情况下是十分困难的, 因为部件过于接近, 并且在另外一些情况下, 比如级间反向弯头 (180° 环形弯头) 就不可能用这种网格, 然而因为有限差分法已经证明其可靠性、精确性而且稳定, 而这一切对于研究离心式通道内的复杂流动是重要的, 因此仍希望采用这个方法。

上述讨论要求有这样的方法: 即既采用吴仲华 (6) 或 Marsh (7) 的固定网格, 又要有准正交网格的灵活性。这种方法对于离心式透平机械中所遇到的流动问题才会是合适的。为此, 作者发展了一个通用的有限差分法, 它用一曲线网格来解任意透平机械部件或部件组的 S_2 (跨轮毂与轮盖间的) 曲面上无粘性可压缩流动。如图 1 (c) 所示, 网格由任意准正交线组成, 准流线位于边界间的等间隔处。由于不需要流线的曲率和斜率, 所以任意管道的

几何形状都可以考虑，不会有其他的困难。同时矩阵法的稳定性和精确性都被保留下来了。

尽管在本文所讨论的例子中不包含象转子那样转动的部件，但本方法并不限于静止的部件。这种省略并不是轻率的，因为在对数据作任何有意义的比较之前需要对于转动的三元边界层、分离区、周向变化等等建立解析模型。一旦在这些领域中可靠的模型被建立起来后，就可以和这里描述的无粘性方法结合起来了。

本报告叙述上述准正交、有限差分法的发展及其对于透平机械中跨轮毂与轮盖间曲面上的流动的应用。还描述了流动的控制方程及其解法，在计算程序中还采用了有限差分法和紊流边界层计算。介绍了一个径向到轴向的进口，一个径向扩压器及一个级间回流弯头的结果。

数 学 分 析

本文中在 S_2 面上无粘性可压缩流动的控制方程的推导和吴仲华 (6) 所作的相同，在附录中给出。对于绝热流动，这些方程综述如下。

能量方程由

$$T \frac{Ds}{Dt} = Q = 0 \quad (1)$$

给出。其中算子 $D(\)/Dt$ 表示全导数。对于定常流动，即为沿流线的导数。

完全气体状态方程可以写为

$$P = \rho R_g T \quad (2)$$

由运动方程得到的叶片力与 S_2 流面正交关系给出如下式子：

$$\bar{F} \cdot \bar{W} = 0 \quad (3)$$

用方程 (3) 和柱坐标下的运动方程，我们有

$$\frac{DI}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (4)$$

运动方程周向分量可写为

$$\frac{1}{R} \frac{D(RV_\theta)}{Dt} = F_\theta \quad (5)$$

其中作用力向量的切向分量由

$$\bar{F} = -\frac{1}{R \cdot n_\theta} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} - T \frac{\partial s}{\partial \theta} \right] \bar{n} \quad (6)$$

确定。流函数由连续方程导出，定义为

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = \rho b R W_z \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Z} = -\rho b R W_R \quad (7b)$$

其中 Rb 可以看作是流面在切向的厚度。

若方程 (7) 代入在 S_2 面上写出的运动方程的径向与轴向分量中去，我们就得到形式上十分相似的二个方程。为简捷起见，可写为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = q\left(R, Z, \frac{\partial \psi}{\partial R}, \frac{\partial \psi}{\partial Z}\right) + \xi_i$$

$$(i=1,2) \quad (8)$$

其中

$$q = \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial(\ln R b \rho)}{\partial R} + \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial(\ln b \rho)}{\partial Z}$$

$$\xi_1 = -\frac{R b \rho}{W_R} \left[-\frac{\partial I}{\partial R} + T \frac{\partial s}{\partial R} + \frac{W_\theta}{R} \frac{\partial(R V_\theta)}{\partial R} + F_R \right]$$

$$\xi_2 = -\frac{R b \rho}{W_Z} \left[-\frac{\partial I}{\partial Z} + T \frac{\partial s}{\partial Z} + \frac{W_\theta}{R} \frac{\partial(R V_\theta)}{\partial Z} + F_Z \right]$$

方程(8)是一个二阶非线性二元偏微分方程,叫做流函数方程或基本方程。方程(8)可以分成二个基本方程,因为 ξ_1 相应于运动方程的径向分量, ξ_2 相应于轴向分量。解(1)到(8)方程组时只需要其中一个基本方程就行了。

吴仲华(6)和Marsh(7)都用径向分量,因为在轴向流式机械中 F_R 总是比 F_Z 小得多,而对于具有径向叶片部件的混流式转子, S_2 面上的 F_R 是零或几乎是零。

然而我们希望把基本方程用于纯径向或纯轴向流动的区域中去,也就是说 W_R 或 W_Z 一般为零的情况,于是方程中的二者之一的右边会是不确定的,这个困难可以用把方程在流线坐标系中写出来加以克服,但这样方程就与流线斜率和曲率有关,正如前面已经解释过了,总是希望避免这种依赖关系。

因此在 $W_Z > W_R$ 的区域内必须用方程(8)的轴向表示式($i=2$),而在 $W_R > W_Z$ 的区域内用方程(8)的径向表示式($i=1$)。

(1)到(8)方程中包含有7个独立的关系式,而有9个未知量(如果把 b 看作已知的话)。它们是 $\psi, W_R, W_Z, W_\theta, F_R, F_Z, F_\theta, S$ 和 I (或 ρ)。若假定 S_2 面形状已知,则 \bar{F} 或 \bar{n} 的分量间的二个辅助关系将使问题完全确定下来。

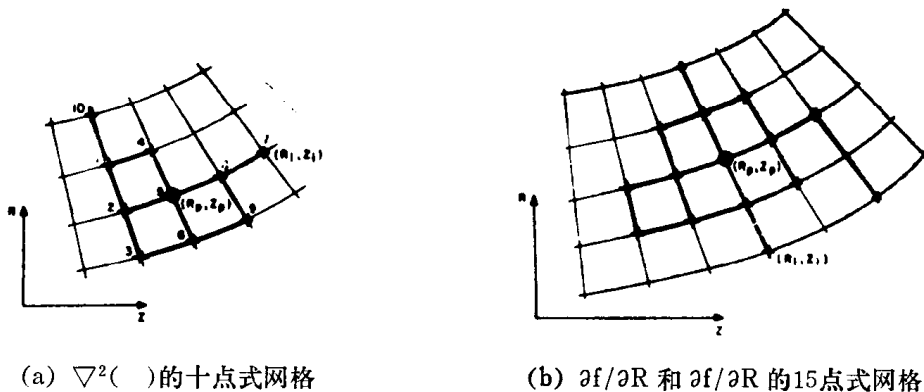


图2 有限差分网格

数值技术

上一节已描述了 S_2 面上无粘性可压缩流动的控制方程。这些方程构成了一组非线性偏微分方程组。一般说,除非采用一种近似的数值方法是无法求解的。

这里所描述的方法是致力于求解在给定边界条件的情况下在所关心的区域的离散点上基本方程的数值解。而其他方程 (1) 至 (7) 用作沿方程 (8) 算出的流函数线上流体特性的辅助方程。因为方程 (8) 是非线性的, 因此求解过程是迭代的, 即 ξ_1 和 q 函数假定已知, 而每次迭代都重新计算。

如果我们用一个节点网格覆盖所关心的区域, 方程 (8) 就能用到每个网格节点上去, 并把有限差分算子去代替微分算子 $\nabla^2(\)$, 这就将建立一个关于未知的 ψ 的代数方程组。这个方程组可以用矩阵形式表示为

$$[A][\psi] = [Q] \quad (9)$$

其中 $[A]$ 是替换微分算子时所得到的系数方阵, $[\psi]$ 是未知流函数值的列向量, $[Q]$ 为 q 量及边界量的列向量。

有限差分近似

用流场内离散点上函数值的某种线性组合来代替任一点 p 的关于 ψ 的数学算子是必要的。若这些离散点位于规则的网格上, 则线性系数是简单的, 很好确定, 在常见的教材中已被列出表格。然而对于一个不规则的网格, 为了保持给定量级的精度, 就需要大量的系数, 而且一般说来, 对于网格的各点系数会是不同的。

像大多数有限差分法一样, Taylor 级数用来讨论一个点的邻域内一有限间隔上的变化, 而该点正是我们要求其函数值及导数值的点。任何算子, 如 $\partial(\)/\partial z$ 或 $\nabla^2(\)$, 可以表示为周围一些点的函数值的线性组合, 其精度依赖于这些点的个数及其位置。设 α 表示这样一个算子, 它可以表示为

$$\alpha = \sum_i a_i \cdot f(R_i, \xi_i) \quad (10a)$$

其中 a_i 是与座标为 R_i, z_i 的 i 点函数值相乘的系数。函数值 $f(R_i, z_i)$ 可以展开为关于所关心的那一点 (R_p, z_p) 的二元台劳级数。若我们将它们代入 (10a) 并且归并同类项, 则有

$$\alpha = \left(\sum_i a_i \right) f \Big|_p + \left(\sum_i a_i \Delta R_i \right) f_R \Big|_p + \left(\sum_i a_i \Delta z_i \right) f_z \Big|_p + \dots \dots \dots (10b)$$

其中下标 R, z 分别表示关于 R, z 的偏导数。为了实用的目的, 台劳级数必须截断, 要求的精度规定了要保留的项数。如要求三级精度, 可以看到必须保留10项。为了解出这些系数, 我们得需要十个网格点。方程 (10b) 可以分成很多个方程, 其数量与归并同类项后的台劳级数项数相同。为要得到三级精度而保留十项, 就可以得出十个方程, 可以解十个系数 a_i 。如我们设 $\alpha = \partial^2 f / \partial R^2 + \partial^2 f / \partial z^2$, 方程 (10b) 左边 (右边也一样) 在第十项后就被截断了。这十项系数除二阶导数 f_{RR} 和 f_{zz} 外的系数均为零。

上述过程用一简单的例子可以看得更加清楚。研究一个在二个方向上间隔都为 X 的方形网格, 并假定网格点如图 2 (a) 所示那样编号, 现在当方程 (10b) 十项的系数对于方形网格展开并令等于拉普拉斯系数, 即导数 f_{RR} 和 f_{zz} 的系数为 1, 我们得到

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{10} = 0$$

$$X(a_1 + a_4) - X(a_3 + a_6 + a_9) + 2a_{10}X = 0$$

$$-X(a_1 + a_2 + a_3 + a_{10}) + X(a_8 + a_9) + 2a_7X = 0$$

等等, 最后我们得到关于10个未知量 a_i 的十个方程。

这方程组很快动手解得

$$\begin{aligned}
 a_1 = a_3 = a_9 = a_7 = a_{10} &= 0 \\
 a_2 = a_4 = a_6 = a_8 &= X^{-2} \\
 a_5 &= -4X^{-2}
 \end{aligned}$$

于是拉普拉斯算子的有限差分表达式归结为

$$\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cong \frac{1}{X^2} (f_2 + f_4 + f_6 + f_8 - 4f_5)$$

其中下标相应于图 2 (a) 的网格点号。

一般说, 对于长方形网格点, 若我们要求三级精度 (10 项), 我们就需要在 R 和 z 方向上四条网格线上获取信息, 也就是说有限差分网必须这么选用: 使得网格节点在每个方向上都落在四个网格线上。若我们不这样作, 那末方程将是可独立的。

总是希望有限差分网格所覆盖的网格线数最少, 因为对于实际应用来讲, 人们希望由差分方程组所产生的条带矩阵的宽度尽量减小。Marsh 使网格线数减少到 3 而仍保持三级精度。他用了让他的不规则网格具有特殊的几何形状这样一个巧妙的办法。说得清楚一点, 就是他用的不规则网格是由在一个方向 (轴向) 上是由平行线组成的 (如图 1 (b) 所示)。

不幸的是对于这里用的准正交网格来说, 这个方法不能用, 而在每个方向上必须用四条网格线。具有三级精度的有限差分网格如图 2 (a) 所示。已经证明, 在计算算子 $\partial^2(\)/\partial R^2 + \partial^2(\)/\partial z^2$ 是成功的。

为计算方程 (8) 的函数 ξ 和 q , 轴向和径向的一阶导数也必须用与前所述关于 $\nabla^2(\)$ 算子所作的相类似方法来进行计算。于是, 我们假设

$$B = \frac{\partial f}{\partial R} = \sum_i b_i f_i$$

及

$$\kappa = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_i c_i f_i$$

并且计算线性因子 b_i 和 c_i 。一个有趣的结果是对于一些所研究的几何形状来说, 要得到方程 (8) 的正确解, 对于一阶导数必须用一个四阶的有限差分网格 (15 个网格点)。因此在每个方向上覆盖 5 条网格线的 15 个节点网格被用来计算系数 b_i 及 c_i 。一个典型的节点网格见图 2 (b)。

正如察看图 2 的网格可以看到, 当被计算有限差分系数的点接近于边界时, 一些网格节点就会落在边界外面。为了避免这种情况, 网格只要这样变更一下就行了: 即让网格点落在所关心的区域内。形状的变化一般是把网格点移到网格的另一侧去来实现的。如在出口边界, 图 2 中的点 7 移到点 2 的前边去。

边界条件

在沿 S_2 面的流动中, 边界壁面从进口直到出口。若它们是固定的, 则流函数沿每个壁面是常数。就是说, 若我们定义 ψ' 为流函数 ψ 的无量纲量 (ψ 用质量流量来无量纲化), 我们有

$$\text{在轮毂或内壁上} \quad \psi'_{1,j} = 0$$

$$\text{在顶部或外壁上} \quad \psi'_{n,j} = 1.0$$

在进口我们可以假定条件已知, ψ' 在进口处穿过环形通道的变化可以计算出来。

在出口处, 必须作某些假定, 即假定在出口网格线上的 ψ' 值与相邻的上游网格节线上

的 ψ' 值相等。这里所作的假定就是二网格节线间的流函数不变, 即

$$\psi'_{i,n-1} = \psi'_{i,n}$$

同时出口处的位置应选得使这一近似能是合理的地方。

解法

上述有限差分算子与边界条件及整个流场特性的一个初始假定一起构成矩阵方程

$$[A][\psi] = [Q] \quad (11)$$

[A]是一个带宽为 $4n-7$ 的方带矩阵, 并且因为有 $(n-2)(m-2)$ 个内点 (其中 m 是准正交线数, n 是准流线数), 所以[A]是一个稀疏矩阵。为了尽量减少计算机贮存设备, [A]因式分解为一个上三角带形矩阵和一个下三角带形矩阵, 即

$$[A] = [L][U] \quad (12)$$

以及最后方程

$$[L][U][\psi] = [Q] \quad (13)$$

可以直接对 $[\psi]$ 求解。这样做是必要的, 因为[A]的逆置不是一个带形矩阵, 以至于磁心贮存设备会变得不能用了。

对于轴对称流动, 方程 (5) 给出

$$\frac{1}{R} \frac{d(RV_\theta)}{dm} = 0 \quad (14)$$

又因为由 (1) 式及 (4) 式

$$\frac{dI}{dm} = T \frac{ds}{dm} = 0 \quad (15)$$

一旦向量 ψ 已经被计算出来, 流体特性, I , RV_θ 及 s 就可以沿流线建立关系以便计算在每个网格点上这些量的值。注意“ m ”是流线在子午面上的方向, 将记作子午方向。

密度容许稍缓一次迭代, 即速度分量由 (7) 式一次算得, 密度则由状态方程简单计算得。

在一个管道区域内 (无叶片), S_2 面将由根据 (14) 式计算出的切向速度来确定, 然而若曲面通过一叶列, 就必须规定曲面形状。现在曲面与子午方向的角度在叶列间每个位置的方向都加以规定, 即

$$\beta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{V_\theta}{V_m} \right) \quad (16)$$

当流动特性在所有网格点上已算出来后, 向量[Q]就再次被计算出来, 再解方程 (13), 这样的过程不断重复, 直到相邻二次迭代, $[\psi]$ 向量的变化在规定的限度内为止。

限制

若由其他方面得到的信息足够使用的话, 本方法可以用来计算 S_2 面上纯三元无粘性流场。详细地说就是需要知道 S_2 流片的几何形状及特性的切向速度, 而这些一般需要完全解出各 S_1 流片的流动才行。

实际上, S_2 形状是估计的, 而且假定轴对称流动, 故切向速度消失了。若需要在叶列间进行计算, 则流面形状简化为由平均流动角所确定的平均流面。

把流体分成二层的方法要求: 若对粘性流动情况要加以很好的处理, 则必须采用可靠的端部壁面边界层的计算。对于二元和轴对称的场合, 文献中记载了很多好的边界层计算方法。

若三元效应，如边界层中有很明显的横向流动，或存在分离流动区，则需要建立另外的与无粘性流动解相关的模型。

基本方程（8）式是一个二阶非线性椭圆型偏微分方程，导数用中心有限差分来代替。若子午面内流动局部地方有超音速，则在这个区域内导数就不能用中心差分格式加以计算，因为这会使下游点影响上游点，而这与我们对超音速流的物理图案的了解相抵触。因此，严格地说本方法限于亚音速流动。基于对通过透平机械流动的分析，这个限制取二种形式：若规定角动量（ RV_θ ），则 $M_m < 1$ ；若规定流动角 β ，则在固定座标内为 $M_{als} < 1$ ，在转动座标内为 $M_{nel} < 1$ 。

Marsh (14) 提议：若密度允许迟后一次迭代，则计算密度和速度所引起的不确定性会得到解决，并且上述马赫数的限制也就放松，这样就允许计算有跨音速区和超音速通道的流场。

暂缓计算密度的方法如前所述已被采用，它改善了高亚音速马赫数下的稳定性。如果当流函数场看起来已经稳定时迭代过程就停止的话，则就可以计算超音速通道。然而如果计算还能进行下去的话，则在超音速区中的马赫数将缓慢地但不断地增加，以至不收敛到正确的解。

这一现象不是本文所述的方法所固有的，而是任何在固定网格解流函数时都会发生的，如同样的情况也在解 S_1 面流函数方程时看到（见(15)）。因此看来把密度计算迟后一次迭代并不能使超音速通道能得以处理。

边界层模型

把流场分成二层的模型要求：若希望内部流动有一真实的描写，则需要用边界层的计算来补充无粘性流场的计算。

在计算机程序中已经用的方法是基于 Head 首创的入口理论（entrainment theory）的积分关系式（16）在端部壁面上用 Head 的可压缩流动的入口函数（entrainment function）（如 Sumer 所描述的那样）（17）及 Lndweig-Tillman 表面摩擦关系式求解用流线座标系写出的二元可压缩动量积分关系式。

由于边界层的阻塞，也即由边界层计算得到的质量流量的偏差必然会影响到无粘性流计算。通常实行的一种办法是用计算得的排挤厚度重新确定端部壁面，也即用新的考虑了摩擦的物理边界作另一次无粘性流的计算。然后这二个解不断迭代会得到完整的解。

正如前面已经指出，当在一个环形通道中求解方程（8）时，沿轮毂和轮盖上的流函数是常数（0 和 1.0），因为每个壁面必须是一条流线。代替修改端部壁面和流函数的边界值保持这些常数的一个方法是改变边界值，其改变的大小数量上等于计算得到的当地边界层排挤质量。这一方法相当于上面所说的重新确定边界流法的方法，但它不改变有限差分网格，而网格的变化就必须重新计算有限差分系数。对于 $[\psi]$ 求解方程（9）的过程是：计算端部壁面边界层，重新确定流函数边界值，然后再解方程（9）。如果不用这个方法，则网格每次迭代都要变动，计算时间会增加 20~30 倍。

数值例子

用于上述数字计算过程的计算机程序已经完成。程序用 IBM370/168（有高速辅助存储器）机上使用的 Fortran 语言写出。

为了适应 70×20 这么大的网格的程序需要约 50K 个计算机单元 (computer word) 对于后面要介绍的数例来说计算时间在 5 ~ 10 秒之间变化。这些数值例子都有约 30×8 那么大的网格。这些计算时间是有代表性的, 因为对于有兴趣的特殊网格点来说 $[L]$ 和 $[U]$ 矩阵是只需一次计算得到。

选这些例子来说明本方法是: a) 因为它们在设计人员和研究人员所关心的离心式透平机械中有代表性的固定部件, 而且 (b) 进口段及扩压器这二个部件中数据是可以使用的。这意思是流动很有规则, 因而可以用来估计无粘性流动的方法。第三种情况用来说明有限差分网格用于一复杂几何形状, 即 180° 弯头时的灵活性。

下面给出的速度剖面是用有限差法计算的无粘性可压缩流动及上面说过的二元紊流边界层计算互相迭代得到的。边界层计算有效地制约着有阻塞的无粘性流动的计算。

所介绍的剖面有些只表示无粘性计算的结果, 而有些则表示结合无粘性及边界层二者的结果。在表示出边界层剖面的情况中, 剖面是由二元边界层计算得的积分参数给出, 并用指数规律剖面以保证从一个区域到另一个区域的光滑过渡。当无粘性剖面本身是歪歪扭扭或不均匀时, 这个漂亮的方法只能是近似的。

环形进口

图 3 (a) 所示的径向到轴向的环形流动进口被用来设计成为对实验数据及解析计算间作比较的一个试验装置 (18)。因此在整个进口, 无粘性流动及端部壁面边界层都有大量的可以使用的数据。此外, 用流线曲率法计算得到的无粘性流动剖面也是可以用的。

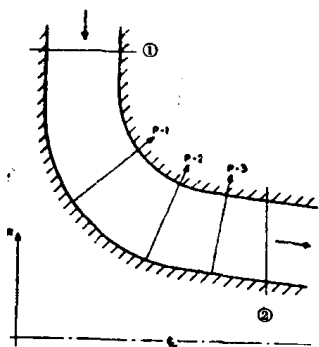


图 3 (a) 径向到轴向流进口

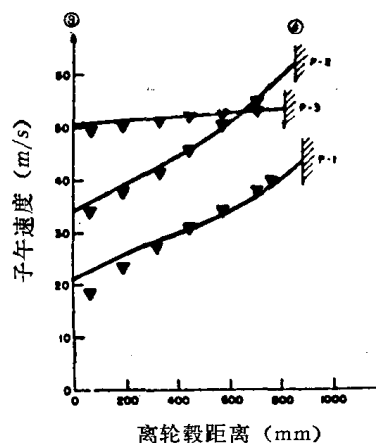


图 3 (b) 径向到轴向流进口速度剖面

①进口位置 ②出口位置 ③轮毂 ④轮盖
 ▼实验 ——有阻塞的无粘性流动

图 3 (b) 表示在准正交线 $p-1$, $p-2$, $p-3$ (见图 3 (a)) 上计算出的子午面速度剖面, 并把它们与实验作比较。用前述方法引及了边界层引起的阻塞, 但边界层和可粘性速度剖面没有互相联系起来。这就部份地解释了接近壁面所观察到的偏离。也就是说无粘性流动不能延伸到壁面, 那里是遵循边界层速度剖面的。这种解释还可以从第三个例子中更清楚地看到。第三个例子的无粘性流动及边界层的剖面都表示在图 5 (b) 中。

除壁面区外符合得都很好。此外尽管这里没有表示出来, 对于这一情况下的无粘性流动的速度剖面, 用流线曲率法和有限差分法之间吻合得很好。

径向扩压器

图 4 表示一个由转子顶部直径为 254mm (10吋) 伸到一个级间弯头进口, 也即扩压器

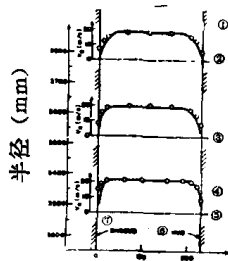


图4 径向扩压器速度剖面
(扭转角 $\alpha = 30^\circ$)

- ①——解析。实验
- ②准正交线*₁₇ ③准正交线*₁₂
- ④阻塞16% ⑤准正交线*₇
- ⑥轮毂 ⑦轮盖

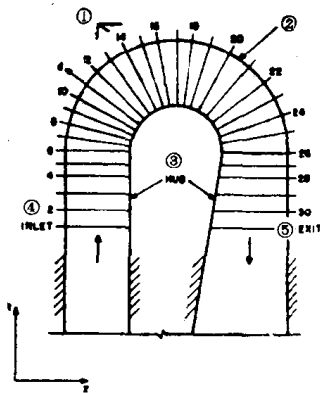


图5 (a) 级间反向弯头

- ①准正交线 ②轮盖
- ③轮毂 ④进口
- ⑤出口

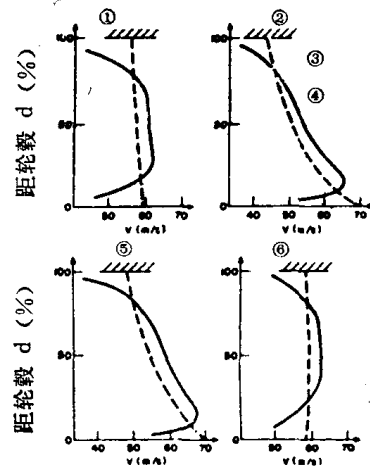


图5 (b) 级间反向弯头速度剖面
(流动角偏离径向 50°)

- ①#4位置 ②#15位置 ③——无粘性流
- ④——有边界层剖面的无粘性流
- ⑤#25位置 ⑥#30位置

的出口直径为 431.8mm (17吋) 的径向扩压器的中心剖面。该扩压器在交通局 (Carrier) 对于各种压缩机运行条件下作过广泛的试验, 这些不同的运行条件形成很多不同的扩压器进口条件。因而也就产生了不同的流动图案。图中所示的情况是具有均匀进口条件, 30° 的扭转角。因此所示的速度剖面是均匀的。在这里还给出了结合边界层与无粘性流动二者的速度剖面。边界层剖面是假定指数规律的速度剖面再根据边界层参数计算得出的。与实验结果符合得很好。

级间反向弯头

第三个例子是准正交网格在处理复杂几何形状及流动情况时是相当灵活的一个极好的例证。图 5 (a) 所示的管道是用来连接二离心级的有代表性的几何形状。当然很多工业用弯头在轮毂处有小得多的曲率半径以减少间轴向距离。

第 4、15、25、30号准正交线上的速度剖面在图 5 (b) 中示出, 这里有二个剖面, 其中一个表示无粘性流动情况, 而另一个则表示用边界层效应校正过的无粘性速度剖面。正如前面已经提到的, 边界层剖面是假定指数规律分布由计算得的参数算出的。最后再与计及边界层阻塞效应的无粘性流动的速度剖面联系在一起。

结 论

本文已介绍了一种新的有限差分法。该法能求出离心透平机械的子午面内可压缩流场的精确的、稳定的解。本方法在下述意义上是具有一般性的: 即复杂几何形状的弯道可以象简单的管道形状一样方便地得到处理, 而同时仍有三级精度。

用吴仲华 (6) 所述的二组流面的方法, 那末只要四周面上有足够的信息可供使用, 则就可以求解整个无粘性流动的运动和连续方程。

本方法已用来计算几个离心式机械的固定部件及一个级间反向弯头, 并且表明是成功的。此外尽管目前它还未作过, 但本方法也是适用于求解转动着的离心透平机械, 即转子内

的无粘性流场的。在这种情况下，困难在于象边界层内的横向流动、分离流动等那样的真实流动效应的精确的描写。

本方法已经表明，即使在曲率很大及与快速变化的端部壁面边界层相干扰这样的不利计算条件下也是稳定的。在采用象三维边界层计算、分离流动区那样更为错综复杂的粘性流动模型并必须与无粘性流动解互相影响时，本方法的这一特点尤为重要。

现在，准正交有限差分方法的可用性将使我们致力于去发展离心式机械内粘性的和三元流效应的模型。上述结果将比目前所能用的方法更为精确地预测离心式透平机械的性能。

术 语 表

<p>a_i, b_i, c_i = 与网格点函数值相乘之有限差分系数。</p> <p>[A] = 基本方程系数矩阵，方程 (8)。</p> <p>b = 连续方程积分因子，或流片厚度。</p> <p>\bar{F} = 平行于 \bar{n} 向量，由切向速度引起的单位质量上的力。</p> <p>f = 任何二维函数。</p> <p>h = 单位质量流体的静止焓。</p> <p>I = 转焓 ($H_0 - \omega R V_\theta$)。</p> <p>[L] = 下三角带状系数矩阵。</p> <p>m = 子午面方向，或子午面内流线的方向。</p> <p>M = 马赫数。</p> <p>m = 准正交线数。</p> <p>\bar{n} = 穿过环形通道的网格点数 (准流线数)。</p> <p>\bar{n} = 垂直于相对流面 S_2 的单位向量。</p> <p>p = 静压。</p> <p>q = 相对流面 S_2 上的任一量。</p> <p>[Q], q = 基本方程右侧向量。</p> <p>R = 半径。</p> <p>R_g = 气体常数。</p> <p>s = 单位质量的焓。</p> <p>S_1 = 在周向面内通过流体质点的相对流面。</p> <p>S_2 = 在子午面内通过流体质点的相对流面。</p> <p>T = 静态温度。</p> <p>t = 时间。</p>	<p>[U] = 上三角带状系数矩阵。</p> <p>\bar{V} = 绝对速度向量。</p> <p>\bar{W} = 相对速度向量。</p> <p>z = 轴向。</p> <p>α = 算子 $\nabla^2(\)$ 的有限差分算子。</p> <p>β, κ = 偏导数 f_R 和 f_z 的有限差分算子。</p> <p>β = 从子午面方向出发量得的流动角。</p> <p>ξ = 基本方程右端函数。</p> <p>ρ = 流体密度。</p> <p>θ = 切向。</p> <p>θ = R, z 与 x, y 坐标系之间的夹角。</p> <p>ψ = 相对流面 S_2 上的流函数。</p> <p>[ψ] = ψ 的列向量。</p> <p>$\bar{\omega}$ = 相对座标角速度。</p> <p>$\partial f / \partial R, f_R = f$ 对 R 的偏导数。</p> <p>$\nabla^2(\) = (f_{RR} + f_{zz})$ 算子。</p> <p>$D(\) / Dt$ = 总的或个体的微商。</p>
---	---

下标:

- i = 网格节点下标 (穿过环形通道)
- j = 网格节点下标 (沿着环形通道)
- m = 子午分量。
- o = 滞止状态。
- R, θ, z = 径向, 切向, 轴向分量。

附 录

本推导紧紧遵循吴仲华 (6) 的推导，这里只是全部摘录。

在稳定转动坐标系中运动方程由

$$-\bar{W} \times (\nabla \times \bar{V}) = -\nabla I + T \nabla s \quad (17)$$

给出。其中 \bar{W} 是相对速度向量， \bar{V} 为绝对速度向量。

并且
$$\nabla \times \bar{V} = \nabla \times \bar{W} + 2\bar{\omega} \quad (18)$$

其中 $\bar{\omega}$ 是坐标系角速度。

对于一般的旋转运动，运动方程、连续方程、能量方程、状态方程可以用柱座标写为

1. 运动方程

$$-\frac{W_\theta}{R} \left[\frac{\partial(RV_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial W_R}{\partial \theta} \right] + W_z \left(\frac{\partial W_R}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial R} \right) = -\frac{\partial I}{\partial R} + T \frac{\partial s}{\partial R} \quad (19a)$$

$$\frac{W_R}{R} \left[\frac{\partial(RV_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial W_R}{\partial \theta} \right] - W_z \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial I}{\partial \theta} + \frac{T}{R} \frac{\partial s}{\partial \theta} \quad (19b)$$

$$-W_R \left[\frac{\partial W_R}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial R} \right] + W_\theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial s}{\partial z} \quad (19c)$$

2. 连续方程

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\rho R V_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho W_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W_z) = 0 \quad (20)$$

3. 能量方程

$$T \frac{Ds}{Dt} = Q \quad (21)$$

4. 状态方程 (完全气体)

$$P = \rho R_g T \quad (22)$$

为了用相当简单的方法解定常三元流动, 采用这样的方法: 即用在二类完全不同的相对流面上的 (在数学上讲是) 二维的流动适当地结合起来得到三元解的办法。第一类相对流面是与某一位置的 z 面 (如进口) 的交线为圆弧的那样一类流面。第二类流面是在所考察的区域内与上述同一个 z 面的交线成一径向线的那样一类流面。这些面分别叫做 S_1 面和 S_2 面。在本文的工作中, 我们将研究由

$$S_2(R \cdot \theta \cdot z) = 0 \quad (23)$$

确定的 S_2 面。

考虑与曲面正交的单位向量 \bar{n} 是方便的。 \bar{n} 与 S_2 面关系为

$$n_R dR + n_\theta R d\theta + n_z dz = 0 \quad (24) *$$

\bar{n} 向量与相对速度 \bar{W} 垂直, 故

$$\bar{n} \cdot \bar{W} = 0 \quad (25)$$

现用方程 (23) (24) (25) 消去独立变量 θ , 即 S_2 面上任一量现在看作 $q = q[R, z, \theta(R, z)]$ 因此在 S_2 面上

$$\frac{\partial q}{\partial R} = \frac{\partial q}{\partial R} - \frac{n_R}{n_\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial q}{\partial \theta} \quad (26a)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{n_\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial q}{\partial \theta} \quad (26b)$$

其中算子 $\bar{\partial} ()$ 用来示任一量 q 在 S_2 面上关于 R 或 z 的变化而另一变量 (z 或 R) 保持不变。

* 原文为 $n_\theta d\theta$, 疑为 $n_\theta R d\theta$ 之误

于是连续方程变为

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\rho W_R R) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W_z) = \rho \cdot C(R, z) \quad (27)$$

其中

$$C(R, z) = -\frac{1}{n_e R} \left(n_R \frac{\partial W_R}{\partial \theta} + n_e \frac{\partial W_e}{\partial \theta} + n_z \frac{\partial W_z}{\partial \theta} \right)$$

在三个垂直方向上的运动方程变为

$$-\frac{W_e}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R V_e) + W_z \left(\frac{\partial W_R}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial R} \right) = -\frac{\partial I}{\partial R} + T \frac{\partial S}{\partial R} + F_R \quad (28a)$$

$$\frac{W_R}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R V_e) + \frac{W_z}{R} \frac{\partial}{\partial z} (R V_e) = F_e \quad \left(\text{或 } F_e R = \frac{D(R V_e)}{Dt} \right) \quad (28b)$$

$$-W_R \left(\frac{\partial W_R}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial R} \right) - \frac{W_e}{R} \frac{\partial}{\partial z} (R V_e) = -\frac{\partial I}{\partial z} + T \frac{\partial S}{\partial z} + F_z \quad (29)$$

其中 \bar{F} 是一个向量，它的单位为单位气体质量上的力。由

$$\bar{F} = -\frac{1}{n_e R} \left(\frac{\partial h}{\partial \theta} - T \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) \bar{n}$$

确定。

因为 \bar{F} 向量是垂直于 S_s 面的，故

$$\bar{F} \cdot \bar{W} = 0$$

为方便计，偏导数算子上的一横在以后推导中省去。利用积分因子 b ，连续方程 (27) 式可以改为

$$\frac{\partial (R b \rho W_R)}{\partial R} + \frac{\partial (R b \rho W_z)}{\partial z} = 0 \quad (30)$$

形式。这里有存在一个流函数 ψ 的充要条件，并且有

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = R b \rho W_z \quad (31a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -R b \rho W_R \quad (31b)$$

能够指出， b 正比于一薄流片的角厚度。该薄流片的平均曲面为 S_s 流面，它的变化着的周向厚度等于 R_b 。

运动方程可以用 (29) 式加以组合，给出

$$\frac{DI}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} \quad (32)$$